Wstęp do Kwantowej Teorii Wielu Ciał

Zestaw 7. Fonony. Oddziaływanie elektron-fonon.

6.1. Rozważmy Hamiltonian oscylatora harmonicznego w postaci

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

Dla równania tego możemy wprowadzić operatory

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right),$$
$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right).$$

a) Wiedząc, że $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ proszę pokazać, że operatory $\hat{a}^\dagger(\hat{a})$ spełniają bozonowe reguły komutacji.

b) Proszę pokazać, że Hamiltonian $\hat{H}$ w reprezentacji operatorów $\hat{a}^\dagger(\hat{a})$ przyjmuje postać
$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}).$$
Pokaż, że energie własne tego Hamiltonianu dane są wzorem
$$E = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

c) Wyznacz równanie ewolucji czasowej operatorów $\hat{a}^\dagger(\hat{a})$ w obrazie Heiseberga dla Hamiltoanianu $\hat{H}$, a następnie zapisz operator położenia w języku zależnych od czasu operatorów $\hat{a}^\dagger(t)[\hat{a}(t)]$.

6.2. Korzystając z formalizmu opisanego powyżej, rozwiąż problem oscylatora harmonicznego w zewnętrznym polu elektrycznym, którego Hamiltonian dany jest równaniem
$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + eFx,$$
gdzie F to natężenie pola elektrycznego.
Wskazówka: zdefiniuj nowe operatory

$$\hat{A} = \hat{a} + \frac{\lambda}{\hbar\omega},$$
$$\hat{A}^\dagger = \hat{a}^\dagger + \frac{\lambda}{\hbar\omega},$$

gdzie $\lambda = eF(\hbar/2m\omega)^{1/2}$.

6.3. Rozważmy łańcuch sprzężonych oscylatorów harmonicznych, którego Hamiltonian dany jest wzorem

$$\hat{H} = \sum_i \frac{\hat{p}_i}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \sum_i (\hat{x}_i - \hat{x}_{i+1})^2$$

- Zakładając periodyczne warunku brzegowe udowodnij, że Hamiltonian $\hat{H}$ w przestrzeni wektora falowego k można zapisać w postaci

  $$\hat{H} = \frac{1}{2m} \sum_k \hat{p}_k \hat{p}_{-k} + \frac{m}{2} \sum_k \omega_k^2 \hat{x}_k \hat{x}_{-k},$$

  gdzie

  $$\omega_k^2 = \frac{2K}{\omega}(1 - \cos ka) \tag{1}$$

- Wiedząc, że $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$, oblicz ile wynosi komutator $[\hat{x}_k, \hat{p}_{k'}]$.
- Następnie, wyraź Hamiltonian $\hat{H}$ w języku operatorów

  $$\hat{a}_k = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x}_k + \frac{i}{m\omega} \hat{p}_{-k} \right),$$
  $$\hat{a}_{-k}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x}_k - \frac{i}{m\omega} \hat{p}_{-k} \right).$$

  Jakie spełniają one relacje komutacji.

P. Wójcik,