

Wstęp do Kwantowej Teorii Wielu Ciał

Zestaw 6. Nadprzewodnictwo. Teoria BCS.

6.1. Rozważmy Hamiltonian BCS w modelu pola średniego w postaci

$$\hat{H} = \sum_{k\sigma} \xi_{k\sigma} \hat{c}_{k\sigma}^\dagger \hat{c}_{k\sigma} - \sum_k \left(\Delta_k \hat{c}_{k\uparrow}^\dagger \hat{c}_{-k\downarrow}^\dagger + \Delta_k^* \hat{c}_{-k\downarrow} \hat{c}_{k\uparrow} \right) + \sum_k \Delta_k \langle c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger \rangle, \quad (1)$$

gdzie $\xi_k = \varepsilon_k - \mu$. Transformację Bogoliubova-Valatina definiujemy jako

$$\begin{aligned} \hat{c}_{k\sigma} &= u_k^* \hat{\gamma}_{k\uparrow} + v_k \hat{\gamma}_{-k\downarrow}^\dagger \\ \hat{c}_{k\sigma}^\dagger &= -v_k^* \hat{\gamma}_{k\uparrow} + u_k \hat{\gamma}_{-k\downarrow}^\dagger. \end{aligned} \quad (2)$$

- Proszę zapisać Hamiltonian BCS (1) w nowej bazie operatorów $\hat{\gamma}_{k\uparrow}$ i $\hat{\gamma}_{-k\downarrow}^\dagger$.
- Proszę dobrać współczynniki u_k oraz v_k aby Hamiltonian w nowej bazie był diagonalny.
- Dla tak dobranej współczynnikiów proszę wyznaczyć energie własne Hamiltonianu BCS.

6.2. Wiedząc, że energie kwazicząstek Bogoliubova dane są wyrażeniem

$$E_k = \pm \sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2} \quad (3)$$

wyprowadź wzór na gęstość stanów na spin w stanie nadprzewodzącym.
Wskazówka: ogólne wyrażenie na gęstość stanów

$$\rho(\varepsilon) = \frac{1}{\Omega} \sum_k \delta(\varepsilon - E_k). \quad (4)$$

6.3. Proszę pokazać, że elektronowe ciepło właściwe w stanie nadprzewodzącym dane jest wyrażeniem:

$$C_e = \frac{2k_B\beta}{V} \sum_k \left(-\frac{\partial f_k}{\partial E_k} \right) \left(E_k^2 + \frac{\beta}{2} \frac{\partial \Delta^2}{\partial \beta} \right). \quad (5)$$

Wskazówka: Ciepło właściwe można obliczyć z relacji

$$C = \frac{T}{V} \frac{dS}{dT}, \quad (6)$$

gdzie

$$S = -k_B \sum_i p_i \ln p_i = -k_B \sum_{k\sigma} [(1 - f_k) \ln(1 - f_k) + f_k \ln f_k], \quad (7)$$

gdzie $f_k = 1/(\exp(\beta E_k) + 1)$ jest rozkładem Fermiego-Diraca.

- 6.4.** Korzystając z wyniku zadania 6.3 proszę pokazać, że dla temperatury odpowiadającej temperaturze krytycznej $T = T_c$, w układzie pojawia się skokowa zmiana ciepła właściwego układu, dana wyrażeniem

$$\Delta C_e = \rho(0) \left(-\frac{\partial \Delta^2}{\partial T} \right)_{T=T_c}. \quad (8)$$

- 6.5.** Rozważmy Hamiltonian z parowaniem w przestrzeni rzeczywistej w postaci

$$\hat{H} = \sum_{i(j)\sigma} t \hat{c}_{i\sigma}^\dagger \hat{c}_{j\sigma} + J \sum_{i(j)\sigma} \hat{c}_{i\sigma}^\dagger \hat{c}_{j\bar{\sigma}}^\dagger \hat{c}_{i\bar{\sigma}} \hat{c}_{j\sigma}. \quad (9)$$

gdzie zarówno wyraz kinetyczny jak i parowanie ograniczamy do najbliższych sąsiadów. Proszę zapisać Hamiltonian w modelu pola średniego oraz wyprowadzić samouzgodnione równania na przerwę nadprzewodzącą.

P. Wójcik,