

Wstęp do Kwantowej Teorii Wielu Ciał

Zestaw 3. Druga kwantyzacja. Operatory kreacji i anihilacji dla bozonów i fermionów.

3.1. Reguły komutacji operatorów kreacji i anihilacji dla bozonów przyjmują postać

$$\begin{aligned} [\hat{b}_{\nu_i}, \hat{b}_{\nu_j}] &= 0, \\ [\hat{b}_{\nu_i}^\dagger, \hat{b}_{\nu_j}^\dagger] &= 0, \\ [\hat{b}_{\nu_i}, \hat{b}_{\nu_j}^\dagger] &= \delta_{\nu_i \nu_j}, \end{aligned} \quad (1)$$

przy czym $\hat{b}_{\nu_i}|0\rangle = 0$, gdzie $|0\rangle$ to stan próżni.

Korzystając z reguł komutacji udowodnij, że

- a) $[\hat{b}_{\nu_i}^\dagger \hat{b}_{\nu_i}, \hat{b}_{\nu_i}] = -\hat{b}_{\nu_i}$
- b) $[\hat{b}_{\nu_i}^\dagger \hat{b}_{\nu_i}, \hat{b}_{\nu_i}^\dagger] = \hat{b}_{\nu_i}^\dagger$

3.2. Zakładając, że $\hat{N}_{\nu_i} = \hat{b}_{\nu_i}^\dagger \hat{b}_{\nu_i}$ jest operatorem liczby cząstek w stanie ν_i takim, że

$$\hat{b}_{\nu_i}^\dagger \hat{b}_{\nu_i} |n_{\nu_i}\rangle = n_{\nu_i} |n_{\nu_i}\rangle \quad (2)$$

gdzie n_{ν_i} to liczba cząstek w stanie ν_i , proszę udowodnić,

- a) $\hat{b}_{\nu_i} |n_{\nu_i}\rangle = C |n_{\nu_i} - 1\rangle$
- b) $\hat{b}_{\nu_i}^\dagger |n_{\nu_i}\rangle = D |n_{\nu_i} + 1\rangle$

Wskazówka: Proszę korzystając z reguł komutacji z zadania 3.1 rozpatrzyć następujące operacje $\hat{b}_{\nu_i}^\dagger \hat{b}_{\nu_i} (\hat{b}_{\nu_i} |n_{\nu_i}\rangle)$ oraz $\hat{b}_{\nu_i}^\dagger \hat{b}_{\nu_i} (\hat{b}_{\nu_i}^\dagger |n_{\nu_i}\rangle)$

3.3. Dokonaj normalizacji stanów $\hat{b}_{\nu_i} |n_{\nu_i}\rangle$ oraz $\hat{b}_{\nu_i}^\dagger |n_{\nu_i}\rangle$, tzn. policz $||\hat{b}_{\nu_i} |n_{\nu_i}\rangle||^2$ i $||\hat{b}_{\nu_i}^\dagger |n_{\nu_i}\rangle||^2$ i wyznacz stałe C i D z zadania 3.2.

3.4. Dla operatorów kreacji i anihilacji

$$\begin{aligned} \hat{b}_{\nu_i}^\dagger &= \sqrt{n_{\nu_i} + 1} |n_{\nu_i} + 1\rangle, \\ \hat{b}_{\nu_i} &= \sqrt{n_{\nu_i}} |n_{\nu_i} - 1\rangle. \end{aligned} \quad (3)$$

Sprawdź, czy spełnione są reguły komutacji z zadania 1.1, oraz relacja $\hat{b}_{\nu_i}^\dagger \hat{b}_{\nu_i} |n_{\nu_i}\rangle = n_{\nu_i} |n_{\nu_i}\rangle$.

3.5. Wykaż, że operator całkowitej liczby cząstek

$$\hat{N} = \sum_{\nu_i} \hat{n}_{\nu_i} = \sum_{\nu_i} \hat{b}_{\nu_i}^\dagger \hat{b}_{\nu_i} \quad (4)$$

przy zmianie bazy z $\{\nu_i\}$ na $\{\mu_i\}$ nie ulega zmianie i przyjmuje postać

$$\hat{N} = \sum_{\mu_i} \hat{n}_{\mu_i} = \sum_{\mu_i} \hat{b}_{\mu_i}^\dagger \hat{b}_{\mu_i}. \quad (5)$$

3.6. Reguły atykomutacji operatorów kreacji i anihilacji dla fermionów przyjmują postać

$$\begin{aligned}\{\hat{c}_{\nu_i}, \hat{c}_{\nu_j}\} &= 0, \\ \{\hat{c}_{\nu_i}^\dagger, \hat{c}_{\nu_j}^\dagger\} &= 0, \\ \{\hat{c}_{\nu_i}, \hat{c}_{\nu_j}^\dagger\} &= \delta_{\nu_i \nu_j},\end{aligned}\tag{6}$$

przy czym $n_{\nu_i} = 0, 1$ co oznacza, że $(c_{\nu_i})^2|n_{\nu_i}\rangle = 0$ oraz $(c_{\nu_i}^\dagger)^2|n_{\nu_i}\rangle = 0$. W reprezentacji liczb obsadzeń

$$|n_{\nu_1} \dots n_{\nu_\infty}\rangle = \sqrt{N!} \hat{S}_- \{\Pi_i \psi_{\nu_i}(\mathbf{r}_i)\} = |\nu_1 \nu_2 \dots \nu_\infty\rangle_- \tag{7}$$

Dla Fermionów operator kreacji (anihilacji) tworzy (niszczy) stan tuż przy operatorze tzn.

$$\begin{aligned}\hat{c}_i^\dagger |\nu_j \nu_k \dots\rangle_- &= |\nu_i \nu_j \nu_k \dots\rangle_- \\ \hat{c}_i |\nu_i \nu_j \nu_k \dots\rangle_- &= |\nu_j \nu_k \dots\rangle_-\end{aligned}\tag{8}$$

Korzystając z tej zasady proszę pokazać, że spełnione są reguły komutacji (6).

3.7. Proszę wyprowadzić, że operator dwucząstkowy

$$\hat{V} = \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} \hat{V}_{ij} \tag{9}$$

w reprezentacji drugiej kwantyzacji przyjmuje postać

$$\hat{V} = \frac{1}{2} \sum_{\nu_a, \nu_b, \nu_c, \nu_d} V_{\nu_a, \nu_b, \nu_c, \nu_d} \hat{c}_{\nu_a}^\dagger \hat{c}_{\nu_b}^\dagger \hat{c}_{\nu_d} \hat{c}_{\nu_c} \tag{10}$$

Wskazówka: Proszę skorzystać z postaci operatora jednocząstkowego w drugiej kwantyzacji, reguł komutacji dla fermionów i bozonów oraz faktu, że $\hat{V}_{ij} = \sum_{\alpha, \beta} f_i^\alpha g_j^\beta$.

3.8. Oddziaływanie spinu elektronu w polu magnetycznym opisane jest Hamiltonianem Zeemana

$$\hat{H}_Z = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} g \mu_B \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma}_i, \tag{11}$$

gdzie $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ to wektor macierzy Pauliego. Proszę zapisać Hamiltonian Zeemana w drugiej kwantyzacji, zakładając że rozpatrywanym układem jest gaz elektronowy.