Wstęp do Kwantowej Teorii Wielu Ciał

Zestaw 1. Mechanika kwantowa - krótkie powtórzenie.

1.1. Udowodnij, że:
a) wartości własne operatora hermitowskiego należą do zbioru liczb rzeczywistych,
b) wektory własne operatora hermitowskiego są ortogonalne,
c) wektory własne operatora hermitowskiego stanowią bazę zupełną.

1.2. Udowodnij, że dowolny operator $\hat{A}$ można zapisać w bazie wektorów $\{|\phi_n\rangle\}$ (baza zupełna i ortogonalna) w postaci

$$\hat{A} = \sum_n \hat{A}_{nm} |\phi_n\rangle\langle\phi_m|,$$

gdzie A_{nm} to element macierzowy operatora $A_{nm} = \langle\phi_n|\hat{A}|\phi_m\rangle$

1.3. Operator spinu w mechanice kwantowej reprezentowany jest przez macierze Pauliego

$$\hat{s}_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i, \tag{1}$$

gdzie $i = x, y, z$, zaś σ_i to macierze Pauliego

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

- Oblicz wartości i wektory własne operatora σ_x, a następnie sprawdź czy są one ortogonalne i stanowią bazę zupełną.
- Przedstaw operator σ_y oraz σ_z w bazie wektorów własnych operatora σ_x.

1.4. Rozpatrzmy układ dwustanowy, którego Hamiltonian układu niezaburzonego posiada jedynie dwie wartości i dwa wektory własne

$$H_0|\psi_n^0\rangle = E_n^0|\psi_n^0\rangle, \qquad n = 1, 2. \tag{3}$$

Załóżmy, że do układu wprowadzamy zaburzenie H'. Hamiltonian układu zaburzonego dany jest równaniem

$$H = H_0 + V'. \tag{4}$$

Proszę:

(a) zapisać Hamiltonian H w bazie wektorów własnych Hamiltoniany niezaburzonego H_0,

(b) Znaleźć wartości własne Hamiltonianu H,

(c) Znajdź nowe wektory bazy w których Hamiltonian H jest diagonalny. Załóż, że operator unitarny, który diagonalizuje Hamiltonian H ma formę macierzy obrotu 2D

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{5}$$

1.5. Załóżmy, że Hamiltonian $\hat{H}$ w bazie orbitali $\{|S\rangle, |P\rangle\}$ wyrażony jest macierzą

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Znajdź nową bazę w której Hamiltonian ten jest diagonalny.

P. Wójcik,