

## Materiały i przyrządy półprzewodnikowe

**Zad. 1. Def.** W przestrzeni funkcji całkowalnych z kwadratem, operatorem sprzężonym po hermitowsku do operatora  $\hat{A}$  nazywamy operator spełniający, dla każdej pary funkcji  $f$  oraz  $g$ , zależność

$$\langle f|Ag\rangle = \langle A^\dagger f|g\rangle, \quad (1)$$

gdzie  $\langle f|g\rangle$  definiuje iloczyn skalarny w tej przestrzeni

$$\langle f|g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\mathbf{r})g(\mathbf{r})d\mathbf{r} \quad (2)$$

**Def.** Operatorem hermitowskim nazywamy operator, spełniający zależność

$$\hat{A} = \hat{A}^\dagger, \quad (3)$$

gdzie  $\hat{A}^\dagger$  jest operatorem sprzężonym po hermitowsku do operatora  $\hat{A}$ .

Proszę pokazać, że:

- operator pędu  $\hat{p}_x = -i\hbar\frac{d}{dx}$  jest operatorem hermitowskim,
- operator parzystości  $\hat{P}\phi(x) = \phi(-x)$  jest operatorem hermitowskim.

**Zad. 2.** Znajdź przybliżoną wartość energii stanu podstawowego elektronu uwięzionego w jednowymiarowej nieskończonej studni potencjału o szerokości  $L$ , w polu elektrycznym o wartości  $E$ .

- Zapisz Hamiltonian układu.
- Zapisz Hamiltonian układu w bazie nieskończonej studni potencjału.
- Ogranicz bazę do dwóch pierwszych stanów nieskończonej studni potencjału i wyznacz energię stanu podstawowego układu z polem elektrycznym oraz jego funkcję falową

**Zad. 3.** Rozwiązanie problemu elektronu w potencjale periodycznym - twierdzenie Blocha. Załóżmy, że elektron znajduje się w potencjale periodycznym o okresie  $a$ , odpowiadającym stałej sieci tzn.  $V(x) = V(x + a)$ .

- Zapisz równanie Schrödingera z potencjałem  $V(\mathbf{r})$ .
- Ponieważ potencjał  $V(x)$  jest funkcją okresową proszę przedstawić go w postaci szeregu Fouriera.

$$V(x) = \sum_G V_G e^{iGx} \quad (4)$$

Jakie warunki muszą spełniać wektory sieci odwrotnej  $G$  ?

- c) Przedstaw funkcję falową elektronu w potencjale periodycznym w bazie funkcji falowych swobodnego elektronu uwięzionego w pudle o szerokości  $L = Na$ , zakładając periodyczne warunki brzegowe.

$$\psi(x) = \sum_k C_k e^{ikx} \quad (5)$$

- d) Rozwinięcia z dwóch poprzednich podpunktów wstaw do równania Schrödingera i odpowiednio przekształć, tak by dla zadanego wektora falowego  $k$  otrzymać równanie wiekowe.
- e) Pokaż, że dla zadanego wektora falowego  $k$  funkcja falowa może przyjmować postać

$$\psi_k(x) = \sum_G C_{k-G} e^{i(k-G)x}, \quad (6)$$

gdzie  $C_k$  to współczynniki rozwinięcia,  $k$  to wektor falowy, zaś  $G$  to wektor sieci odwrotnej.

- f) Wykaż, że funkcje (6) można zapisać w postaci

$$\psi_k(x) = u_k(x) e^{ikx} \quad (7)$$

gdzie  $u_k(x)$  jest funkcją okresową o okresie  $a$ .

- g) Wykaż, że  $E(k) = E(k + G)$ , gdzie  $G$  to wektor sieci odwrotnej.
- h) Proszę spróbować rozwiązać problem własny zakładając sumowanie po jednym wektorze sieci odwrotnej  $G_0$ . Przeanalizuj zachowanie stanów energetycznych na granicy strefy Brillouina.

*P. Wójcik,*