Materiały i przyrządy półprzewodnikowe

Wykład 5:
Transport ładunku w materiałach półprzewodnikowych

Paweł Wójcik

Plan wykładu:

1. Transport ładunku – ujęcie kinetyczne i dynamiczne
2. Pomiar masy efektywnej za pomocą rezonansu cyklotronowego
3. Prąd dryftowy i dyfuzyjny
4. Opis stanów nierównowagowych
5. Magnetotransport
6. Efekt Halla

Transport ładunku – ujęcie kwazi-klasyczne

Czy da się opisać transport ładunku w materiałach półprzewodnikowych definiując ich równanie ruchu ?

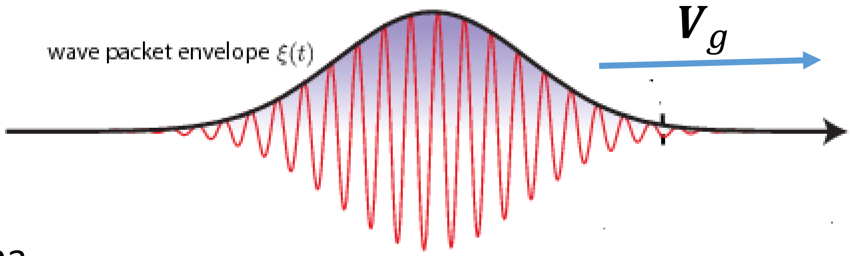
Zauważmy, że funkcje Blocha definiujące stan kwantowy ładunku w materiale półprzewodnikowych mają charakter fali płaskiej, a zatem nie są zlokalizowane. Aby mówić o ruchu ładunku, jego położeniu i prędkości musimy zdefiniować poprzez zlokalizowany pakiet falowy, którego ruch opiszemy równaniami.

$$f_{n\mathbf{k_0}}(\mathbf{r},t) = \int d^3k a_{n\mathbf{k}} \psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r},t)$$

współczynniki przyjmujące maksimum w $\boldsymbol{k}_0$

funkcje Blocha

$$\psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r},t) = e^{i\mathbf{kr}} u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) e^{-i\frac{E_{n\mathbf{k}}}{\hbar}t}$$



Współczynniki a_{nk} przyjmują silne maksimum w $\boldsymbol{k}_0$, a zatem można rozwinąć funkcję $f_{nk}(\boldsymbol{r},t)$ wokół $\boldsymbol{k_0}$ zakładając $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k_0} + \boldsymbol{\Delta k}$

$$E_{\mathbf{k}} = E_{n\mathbf{k}_0} + \Delta\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{k}} E_{n\mathbf{k_0}} + \cdots$$

$$u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = u_{n\mathbf{k_0}}(\mathbf{r}) + \Delta\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{k}} u_{n\mathbf{k_0}}(\mathbf{r}) + \cdots \approx u_{n\mathbf{k_0}}(\mathbf{r}) + \cdots$$

Transport ładunku – ujęcie kwazi-klasyczne

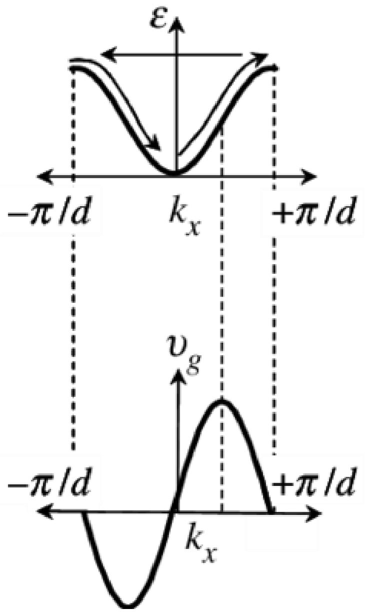
Otrzymujemy

$$f_{n\mathbf{k_0}}(\mathbf{r},t) = \underbrace{e^{i\mathbf{k_0}\mathbf{r}} u_{n\mathbf{k_0}}(\mathbf{r}) e^{-i\frac{E_{n\mathbf{k_0}}}{\hbar}t}}_{\text{funckja Blocha dla } \boldsymbol{k}_0} \int \underbrace{d^3\Delta k a_{n,\mathbf{k}_0+\Delta\mathbf{k}} e^{i\Delta\mathbf{k}\cdot[\mathbf{r}-(\nabla_{\mathbf{k}}E_{n\mathbf{k_0}}/\hbar)t]}}_{\text{funkcja obwiedni której położenie zmienia się w czasie}}$$

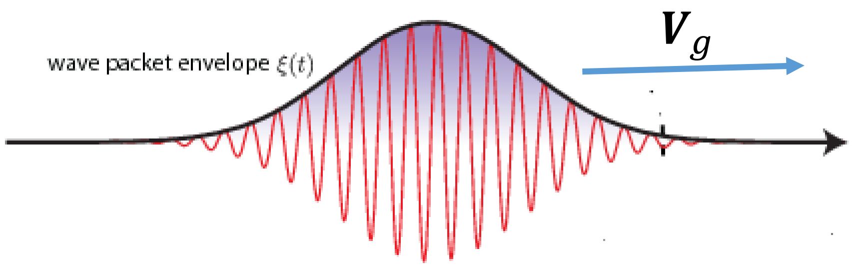
Możemy zdefiniować zatem prędkość grupową

$$\varepsilon(k_x) = \frac{\Delta}{2}(1-\cos(k_x d))$$

$$\upsilon_g(k_x) = \frac{\Delta d}{2\hbar}\sin(k_x d)$$



$$\boxed{\mathbf{V}_g(\mathbf{k}) = \frac{1}{\hbar}\nabla_{\mathbf{k}}E_{n\mathbf{k}}}$$



Transport ładunku – ujęcie kwazi-klasyczne

Zmierzając w kierunku uzyskania równania ruchu zróżniczkujmy powyższe równanie

$$\frac{d\mathbf{V}_g}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\hbar}\nabla_{\mathbf{k}} E_{n\mathbf{k}}\right) = \frac{1}{\hbar}\nabla_{\mathbf{k}}\frac{dE_{n\mathbf{k}}}{dt}$$

i korzystamy z zależności z fizyki klasycznej

$$\frac{dE_{n\mathbf{k}}}{dt} = \frac{d(\mathbf{F}\cdot\mathbf{r})}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{V}_g \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{V}_g}{dt} = \frac{1}{\hbar}(\nabla_{\mathbf{k}}\mathbf{V}_g)\cdot\mathbf{F}$$

otrzymujemy

$$\frac{d\mathbf{V}_g}{dt} = \frac{1}{\hbar^2}(\nabla_{\mathbf{k}}\nabla_{\mathbf{k}}(E_{n,\mathbf{k}}))\cdot\mathbf{F}$$

Porównując do równania Newtona $\boldsymbol{F} = m\mathbf{a}$ definiujemy tensor masy efektywnej

$$\boxed{\frac{1}{m^*} = \frac{1}{\hbar^2}\frac{\partial^2 E_{n\mathbf{k}}}{\partial k^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{m^*} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m^*_{xx}} & \frac{1}{m^*_{xy}} & \frac{1}{m^*_{xz}} \\ \frac{1}{m^*_{yx}} & \frac{1}{m^*_{yy}} & \frac{1}{m^*_{yz}} \\ \frac{1}{m^*_{zx}} & \frac{1}{m^*_{zy}} & \frac{1}{m^*_{zz}} \end{pmatrix}$$

gdzie $\frac{1}{m^*_{ij}} = \frac{1}{\hbar^2}\frac{\partial E^2}{\partial k_i \partial k_j}$

Transport ładunku – ujęcie kwazi-klasyczne

Równanie ruchu

$$\boxed{\frac{d\mathbf{V}_g}{dt} + \frac{\mathbf{V}_g}{\tau} = \left(\frac{1}{m^*}\right)\mathbf{F}}$$

Siła oporu związana z rozpraszaniem, proporcjonalna do prędkości, τ to czas rozpraszania

tensor masy efektywnej

Dokonując jeszcze kilku przekształceń i zakładając, że **k** zależy od czasu

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} \cdot \nabla_{\mathbf{k}} E_{n\mathbf{k}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V}_g = \mathbf{F} \cdot \frac{1}{\hbar} \nabla_{\mathbf{k}} E_{n\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{F} = \hbar \frac{d\mathbf{k}}{dt} \longrightarrow \underline{\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}}$$

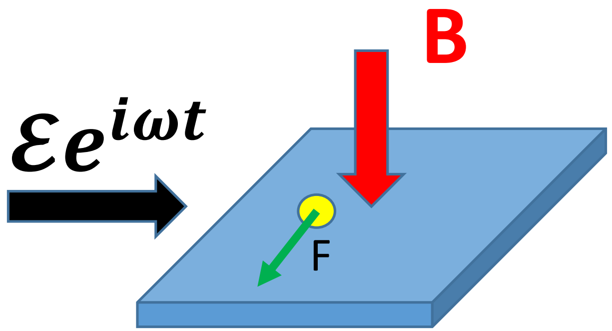
pęd ładunku

Przykład:
Dla pola elektrycznego, elektronu i izotropowego pasma parabolicznego, przy zaniedbaniu rozproszeń

$$\hbar \frac{d\mathbf{k}}{dt} = -e\boldsymbol{\mathcal{E}} \qquad m^* \frac{d\mathbf{V}_g}{dt} = -e\boldsymbol{\mathcal{E}}$$

Równanie się sprawdzą dla częściowo zapełnionych pasm.
Jeśli pasmo walencyjne jest całkowicie zapełnione elektrony nie mogą zmienić swojego k i równania nie są prawdziwe. Ale my będziemy rozpatrywać ruch elektronów w pasmie przewodnictwa.

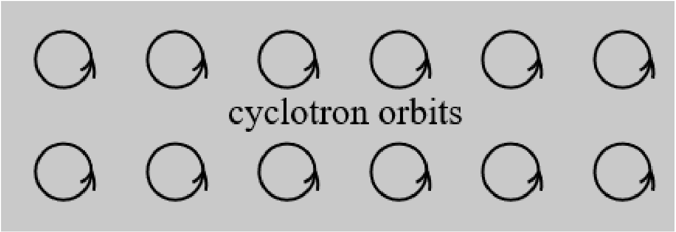
Pomiar masy efektywnej za pomocą rezonansu cyklotronowego



Pomiaru masy efektywnej można dokonać za pomocą pomiaru transportu ładunku wywołanego zmiennym polem elektrycznym w zewnętrznym polu magnetycznym. Metoda ta nosi nazwę **rezonansu cyklotronowego.**

Siła Lorentza powoduje zakrzywienie toru ruchu naładowanej cząstki

$$\mathbf{F} = q\mathbf{V} \times \mathbf{B} \xrightarrow{\text{dla pola prostopadłego}} F = qVB$$



A zatem pojawia się siła odśrodkowa

$$F_{od} = \frac{mV^2}{r}$$

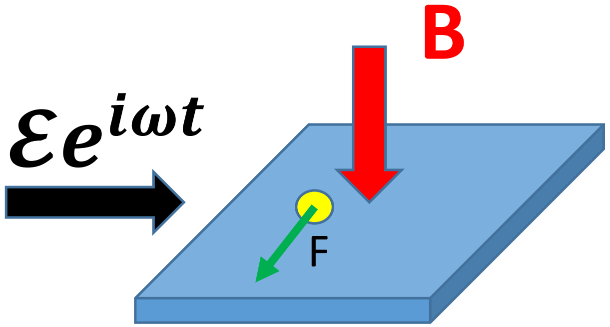
Porównując obie siły

$$\frac{mV^2}{r} = qVB \quad \Rightarrow \quad V = \frac{qBr}{m}$$

A zatem, częstość cyklotronowa z jaką elektrony poruszają się po orbitach kołowych

$$\omega_c = \frac{2\pi}{T} = \frac{V}{r} = \frac{|q|B}{m}$$

Pomiar masy efektywnej za pomocą rezonansu cyklotronowego



A zatem jeżeli będziemy próbkę poddawać zmiennemu polu elektrycznemu, to dla częstości oscylacji pola elektrycznego odpowiadającej częstości cyklotronowej powinniśmy obserwować rezonans – rezonansowe zwiększenie absorbcji energii. Spróbujmy rozwiązać to zagadnienie korzystając z równania ruchu

$$m^*\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}+\frac{\mathbf{V}}{\tau}\right)=q(\boldsymbol{\mathcal{E}}+\mathbf{V}\times\mathbf{B})$$

gdzie pole elektryczne i magnetyczne

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}=(\mathcal{E}_x^0,0,0)e^{i\omega t}\qquad \boldsymbol{B}=(0,0,B)\quad \xrightarrow{\text{Możemy założyć rozwiązanie}}\quad \boldsymbol{V}=(V_x^0,V_y^0,0)e^{-i\omega t}$$

Podstawiając, otrzymujemy

układ równań

$$\begin{cases} m^*\left(-i\omega+\dfrac{1}{\tau}\right)V_x=q\mathcal{E}_x+qV_yB \\ m^*\left(-i\omega+\dfrac{1}{\tau}\right)V_y=-qV_xB \end{cases}$$

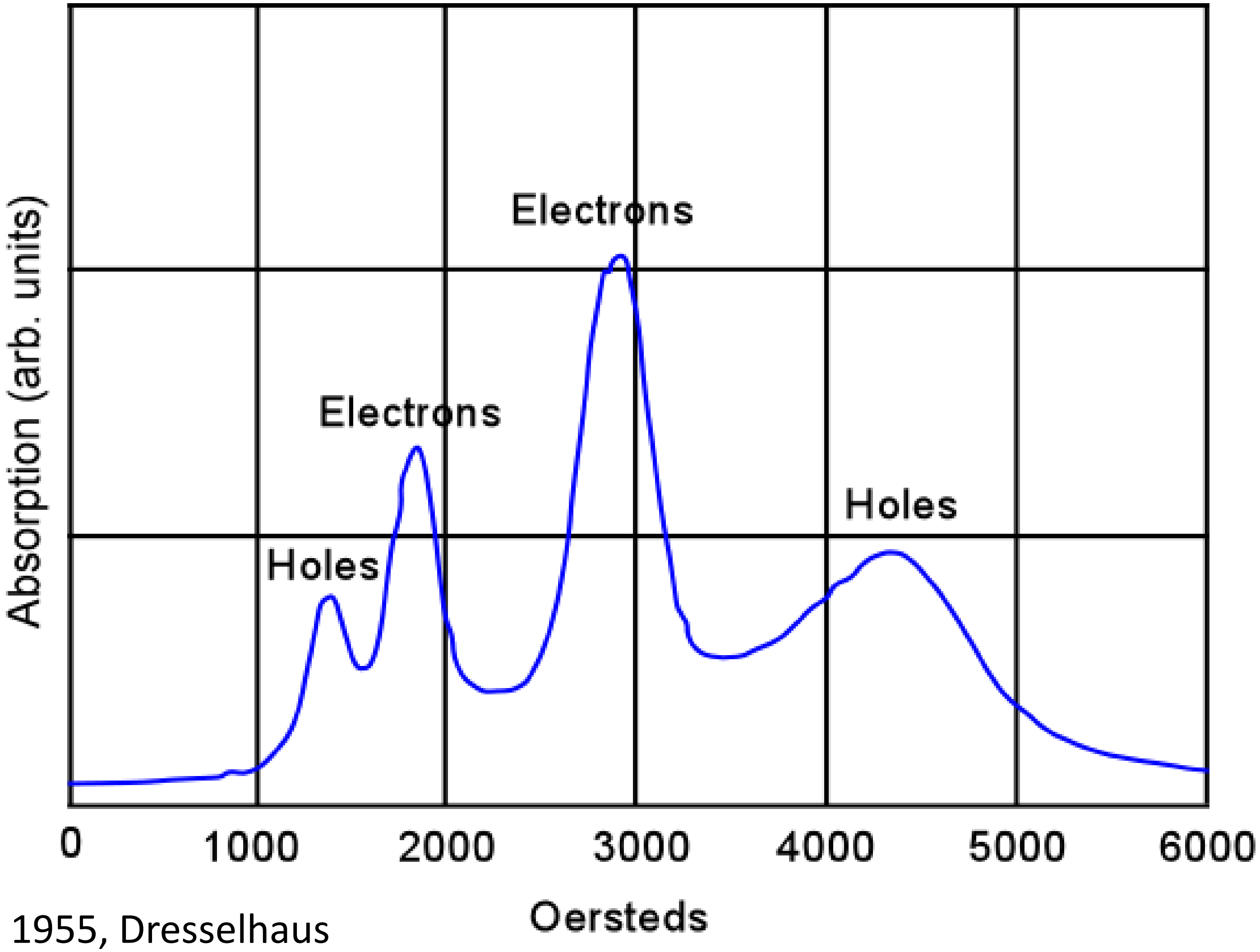
Stąd przewodność (zespolona)

$$\sigma(\omega)=\frac{j_x}{\mathcal{E}_x}=\frac{nqV_x}{\mathcal{E}_x}=\sigma_0\left[\frac{1+i\omega\tau}{1+(\omega_c^2-\omega^2)\tau^2+2i\omega\tau}\right]$$

Absorbcja energii jest proporcjonalna do części rzeczywistej przewodności

$$\boxed{Re[\sigma(\omega)]=\sigma_0\left[\frac{1+(\omega_c^2+\omega^2)\tau^2}{[1+(\omega_c^2-\omega^2)\tau^2]^2+4\omega^2\tau^2}\right]}$$

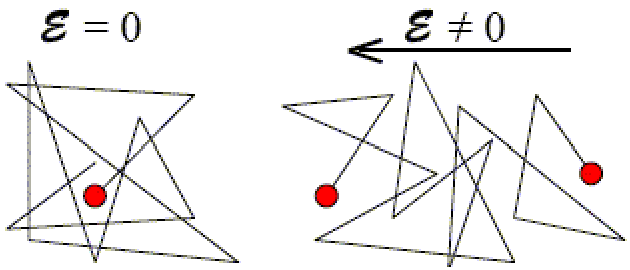
Pomiar masy efektywnej za pomocą rezonansu cyklotronowego



Dla krzemu (Si), 1955, Dresselhaus

Prąd unoszenia (dryftowy)

Rozważmy ruch elektronu pod wpływem działania stałego pola elektrycznego $\mathcal{E}$. Korzystając z wyprowadzonego wcześniej równania ruchu.



$$m^* \frac{d\mathbf{V}_q}{dt} = q\mathcal{E}$$

$$\mathbf{V}_q(t) = \frac{q\mathcal{E}}{m^*}t$$

Wyglądałoby na to, że prędkość rośnie liniowo z czasem, ale tak nie jest ponieważ ładunek **ulega rozpraszaniom z średnim czasem pomiędzy rozproszeniami τ**

Założymy, że N to liczba cząstek poruszających się z określoną prędkością w określonym kierunku. Liczba cząstek, która uległa rozproszeniu w czasie dt jest proporcjonalna do całkowitej liczby cząstek N oraz czasu dt. A zatem zmiana liczby cząstek, które **nie uległy** rozproszeniu dN dana jest wzorem

$$dN(t) = -\frac{N(t)}{\tau}dt \xrightarrow{\text{rozwiązanie}} N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$$

Stąd prawdopodobieństwo rozproszenia

$$\boxed{P(t) = \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}}$$

gdzie współczynnik przez funkcją exp wynika z normalizacji $\int_0^\infty P(t)dt = 1$

Prąd unoszenia (dryftowy)

Jeśli dane mamy prawdopodobieństwo rozproszenia nośników ładunku w czasie, możemy policzyć średnie wielkości charakteryzujące ruch ładunku pod wpływem pola elektrycznego

$$\langle t \rangle = \tau = \int_0^\infty tP(t)dt$$ średni czas pomiędzy procesami rozpraszania

Prędkość unoszenia (dryftu) dla nośnika o ładunku q

$$\langle \mathbf{V}_q \rangle = \mathbf{V}_{drf|q} = \int_0^\infty \mathbf{V}_q P(t)dt = \frac{q\mathcal{E}}{m^*}\int_0^\infty tP(t)dt = \frac{q\mathcal{E}\tau}{m^*} = \pm\mu_q\mathcal{E}$$

A zatem

$$\boxed{\mathbf{V}_{drf|q} = \pm\mu_q\mathcal{E}}$$

$$\boxed{\mu_q = \left|\frac{q\tau}{m^*}\right|}$$

Prędkość unoszenia jest wprost proporcjonalna do przyłożonego pola elektrycznego, zaś współczynnikiem proporcjonalności jest wielkość zwana **ruchliwością (mobilnością) nośników**, która mierzona jest w cm^2/Vs

Prąd unoszenia

$$\boxed{\mathbf{j}_{drf|q} = qn_q\mathbf{V}_q = \pm qn_q\mu_q\mathcal{E}}$$

	elektrony (cm^2/Vs)	dziury (cm^2/Vs)
Si	1350	480
GaAs	8500	400
Ge	3900	1900

Prąd unoszenia (dryftowy)

Prąd unoszenia (dryftu) dla elektronów i dziur

koncentracja elektronów

$$\mathbf{j}_{drf|e} = -en\mathbf{V}_e = en\mu_e\mathcal{E}$$

$$\mathbf{j}_{drf|h} = ep\mathbf{V}_e = ep\mu_h\mathcal{E}$$

koncentracja dziur

Całkowity prąd unoszenia (dryftu)

$$\mathbf{j}_{drf} = \mathbf{j}_{drf|e} + \mathbf{j}_{drf|h} = e(n\mu_e + p\mu_h)\mathcal{E}$$

Porównując z mikroskopowym prawem Ohma

$$\mathbf{j} = \sigma\mathcal{E}$$

mamy

$$\boxed{\sigma = ne\mu_e + pe\mu_h = e^2\left(\frac{n\tau_e}{m_e^*} + \frac{p\tau_h}{m_h^*}\right)}$$

Proszę zauważyć, że półprzewodniki nie podlegają klasycznemu prawu Ohma ponieważ przewodność σ(E) jest funkcja energii nośników od której zależą czasy rozpraszania. Nie jest to zatem prosta zależność liniowa jak w przypadku metali.

Ruchliwość nośników ładunku – kilka dodatkowych uwag

Ruchliwość (mobilność) nośników ładunku

ładunek średni czas rozpraszania

$$\mu_q = \left| \frac{q\tau}{m^*} \right|$$

masa efektywna przewodnictwa

1) Masa efektywna przewodnictwa nie jest tym samym co pasmowa masa efektywna, ale można znaleźć relacje pomiędzy obiema tymi wielkościami. Dla przykładu możemy rozpatrzeć n-Si, w którym występują po dwa minima pasma przewodnictwa zlokalizowane odpowiednio wzdłuż osi x, y, z. Każde z tych minimum jest scharakteryzowane przez podłużną i poprzeczną pasmową masę efektywną (anizotropia masy efektywnej w krzemie). Całkowity prąd

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{ex} + \mathbf{j}_{ey} + \mathbf{j}_{ez}$$

Jeżeli założymy, że prąd płynie w kierunku osi x

$$\mathbf{j}_{ex} = 2(n/6)e\mu_{ex}\boldsymbol{\mathcal{E}} = \frac{ne^2\tau_e}{3m_l}\boldsymbol{\mathcal{E}}$$

$$\mathbf{j}_{ey} = \mathbf{j}_{ez} = \frac{ne^2\tau_e}{3m_t}\boldsymbol{\mathcal{E}}$$

stąd otrzymujemy

$$\mathbf{j} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{m_l} + \frac{2}{m_t}\right) ne^2\tau_e\boldsymbol{\mathcal{E}}$$

$$\boxed{\frac{1}{m_c^*} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{m_l} + \frac{2}{m_t}\right)}$$

Ruchliwość nośników ładunku – kilka dodatkowych uwag

Ruchliwość (mobilność) nośników ładunku

ładunek

średni czas rozpraszania

$$\mu_q = \left| \frac{q\tau}{m^*} \right|$$

masa efektywna przewodnictwa

2) Średni czas rozpraszania w materiałach półprzewodnikowych jest związany głownie z dwoma rodzajami procesów:
   a) rozpraszanie na fononach (drganiach sieci krystalicznej),
   b) rozpraszanie na zjonizowanych atomach domieszek.

   Zależność ruchliwości od temperatury związana z poszczególnymi procesami rozpraszania

   Fonony: $\mu_L \sim T^{-3/2}$

   Zjonizowane domieszki: $\mu_I \sim \frac{T^{3/2}}{N_I} \sim \frac{T^{3/2}}{N_d^+ + N_a^-}$

   Ponieważ prawdopodobieństwo procesu rozproszenia w czasie dt dane jest przez dt/τ to z sumowania prawdopodobieństw wynika

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_I} + \frac{1}{\mu_L}$$

Ruchliwość nośników ładunku – kilka dodatkowych uwag

Czy prędkość unoszenia jest zawsze wprost proporcjonalna do pola elektrycznego ?

$$\mathbf{V}_{drf|q} = \pm\mu_q\mathcal{E}$$

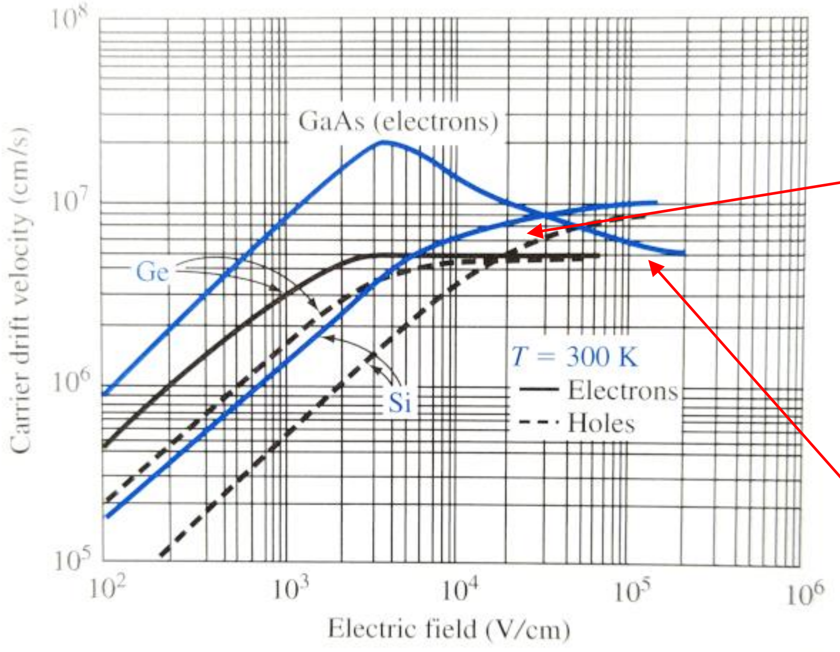


Figure 5.7 | Carrier drift velocity versus electric field for high-purity silicon, germanium, and gallium arsenide. *(From Sze [12].)*

nasycenie prędkości unoszenia dla Ge i Si

Dla GaAs spadek prędkości unoszenia związany z przeskokiem między minimami pasm przewodnictwa o różnych masach efektywnych

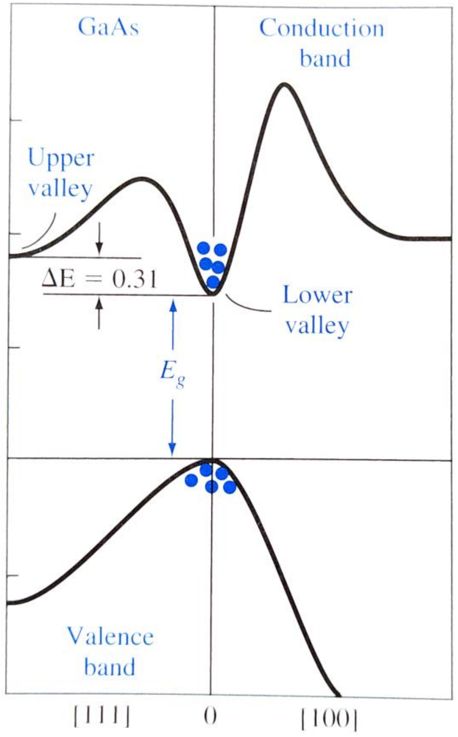
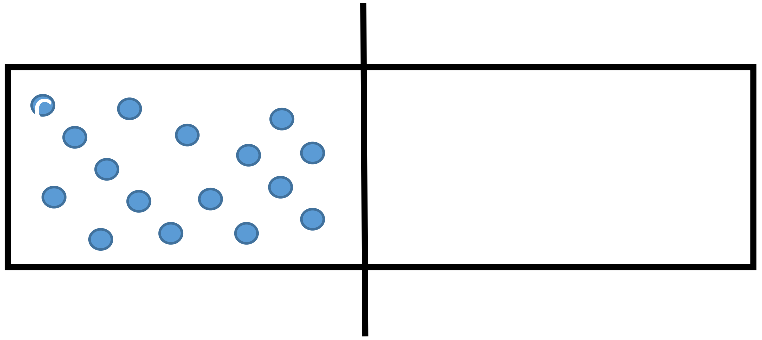


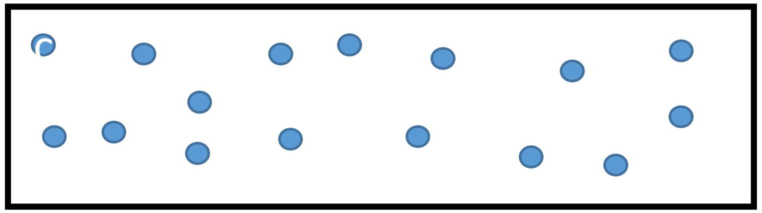
Figure 5.8 | Energy-band structure for gallium arsenide showing the upper valley and lower valley in the conduction band. *(From Sze [13].)*

Prąd dyfuzyjny

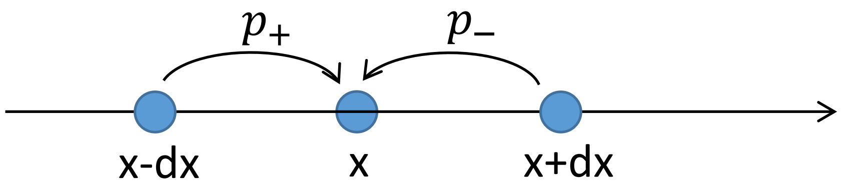


Otwieramy przegrodę i cząsteczki dyfundują z obszary o większej koncentracji do obszaru o mniejszej koncentracji.

Układ maksymalizuje entropie - **dyfuzja**



Rozważmy trzy sąsiadujące węzły o różnych koncentracjach cząstek pomiędzy którymi może następować przeskok z prawdopodobieństwem p_+ w prawo oraz p_- w lewo



Strumień cząstek przepływających przez punkt x

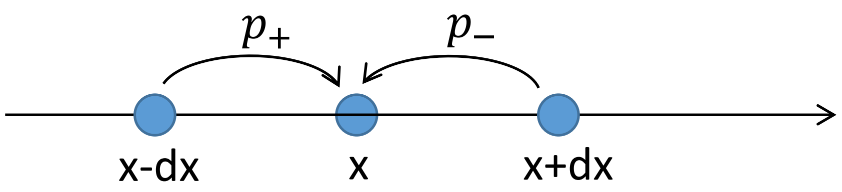
$$J_q(x) = \frac{p_+ n_q(x-dx)}{dx} - \frac{p_- n_q(x+dx)}{dx}$$

Rozwijając w szereg Taylora

$$J_q(x) = \frac{p_+}{dx}\left(n_q(x) - \frac{dn_q(x)}{dx}dx + \cdots\right) - \frac{p_-}{dx}\left(n_q(x) + \frac{dn_q(x)}{dx}dx + \cdots\right)$$

Prąd dyfuzyjny

Rozważmy trzy sąsiadujące węzły o różnych koncentracjach cząstek, pomiędzy którymi może następować przeskok z prawdopodobieństwem p_+ w prawo oraz p_- w lewo



$$J_q(x) = \frac{p_+ - p_-}{dx} n_q(x) - (p_+ + p_-) \frac{dn_q(x)}{dx}$$

Dla przypadku błądzenia przypadkowego (brak pola zewnętrznego)

$$p_+ = p_-$$

mamy

$$J_q(x) = -(p_+ + p_-) \frac{dn_q(x)}{dx} = -D_q \frac{dn_q(x)}{dx}$$

W 3D strumień cząstek związanych z dyfuzją

stała dyfuzji

$$\boxed{\mathbf{J}_q = -D_q \boldsymbol{\nabla} n_q}$$

Prąd dyfuzyjny i całkowity

Prąd dyfuzyjny dla elektronów

$$\boxed{\mathbf{j}_{dif|e} = -e\mathbf{J}_e = eD_e\nabla n}$$

Prąd dyfuzyjny dla dziur

$$\boxed{\mathbf{j}_{dif|h} = e\mathbf{J}_h = -eD_h\nabla p}$$

Prąd całkowity jest sumą prądu unoszenia (dryftowego) oraz prądu dyfuzyjnego

$$\mathbf{j}_e = \mathbf{j}_{drf|e} + \mathbf{j}_{dif|e} = en\mu_e\boldsymbol{\mathcal{E}} + eD_e\nabla n$$

$$\mathbf{j}_h = \mathbf{j}_{drf|h} + \mathbf{j}_{dif|h} = ep\mu_h\boldsymbol{\mathcal{E}} - eD_h\nabla p$$

Relacja Einsteina

Analizując prąd dyfuzyjny można powiedzieć, że wielkość $\nabla n/\mathrm{n}$ pełni rolę pewnego rodzaju efektywnego pola elektrycznego. Okazuje się, że istnieje ścisła relacja pomiędzy ruchliwością, a stałą dyfuzji zwana **relacją Einsteina.**

Aby ją wyprowadzić zauważmy, że w stanie równowagi prąd nie płynie, a zatem

$$en\mu_e\boldsymbol{\mathcal{E}} + eD_e\boldsymbol{\nabla}n = 0$$

Ponieważ pole elektryczne związane jest z potencjałem relacją $\boldsymbol{\mathcal{E}} = -\boldsymbol{\nabla}V(\boldsymbol{r})$, otrzymujemy

$$n\mu_e\boldsymbol{\nabla}V = D_e\boldsymbol{\nabla}n$$

Ponieważ dno pasma przewodnictwa zmienia się jak $E_c - eV(\boldsymbol{r})$, zależna od położenia koncentracja elektronów

$$n(\mathbf{r}) = \tilde{N}_c e^{-\beta(E_c - eV(\mathbf{r}) - E_F)}$$

W stanie równowagi poziom energii Fermiego nie zależy of położenia

$$\boldsymbol{\nabla}n(\mathbf{r}) = \beta en(\mathbf{r})\boldsymbol{\nabla}V(\mathbf{r})$$

Wstawiając do równania powyżej otrzymujemy

$$D_e = \frac{\mu_e}{\beta e} = \frac{k_BT}{e}\mu_e \longrightarrow$$

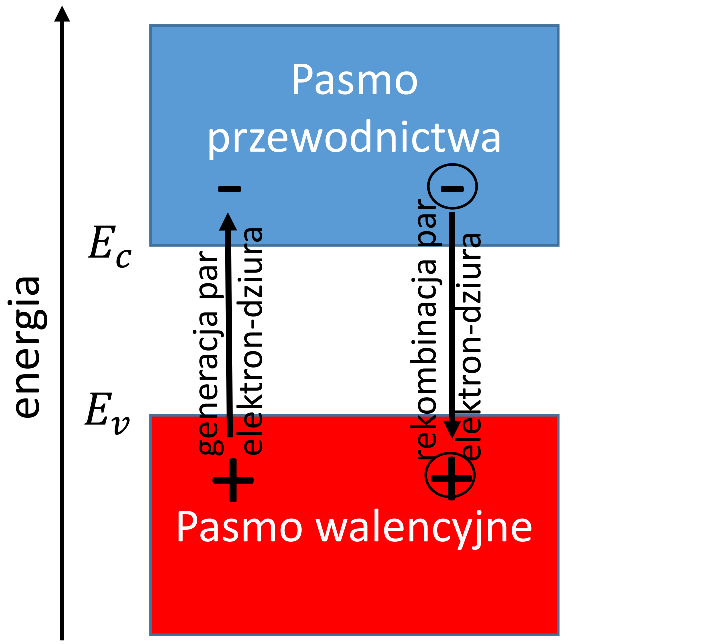
Relacja Einsteina

$$\boxed{\frac{D_e}{\mu_e} = \frac{D_h}{\mu_h} = \frac{k_BT}{e}}$$

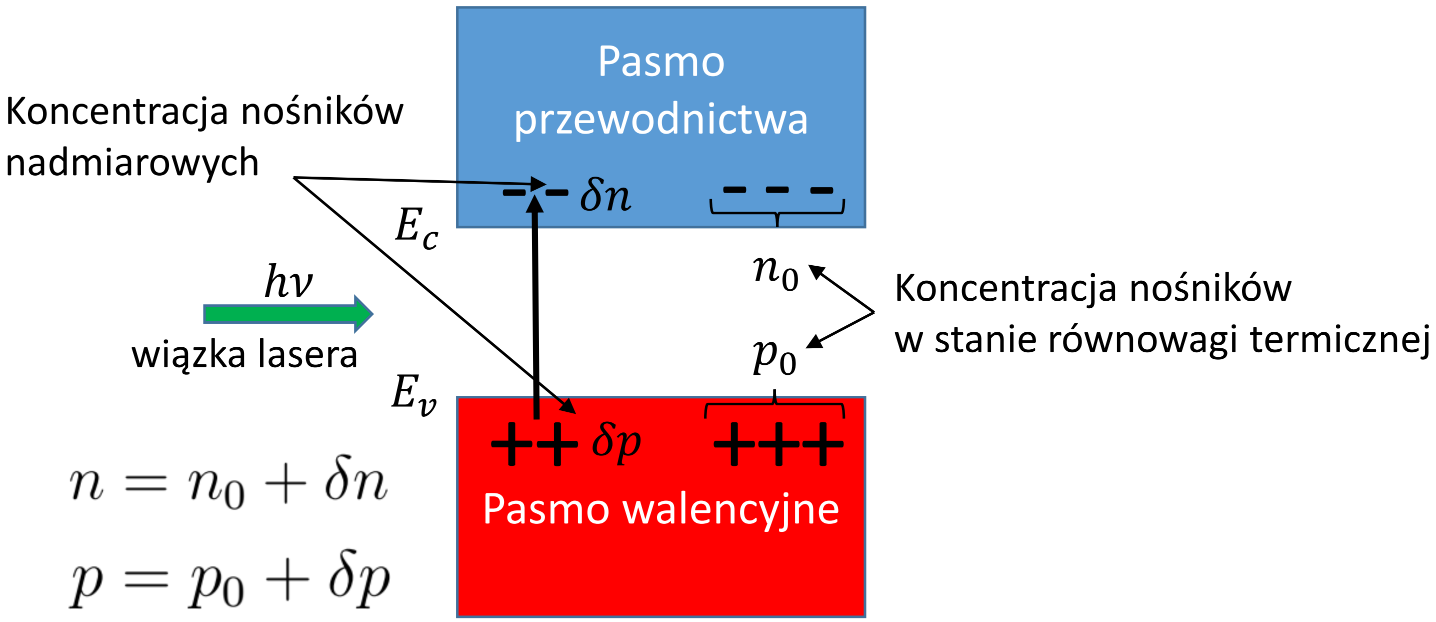
Transport nierównowagowy

Do tej pory rozpatrywaliśmy układy w stanie równowagi termodynamicznej, w której prawdopodobieństwo obsadzeń stanów elektronowych dane jest rozkładem Fermiego-Diraca, a energia Fermiego jest dobrze zdefiniowana. Nawet gdy rozpatrywaliśmy przepływ prądu (stan wzbudzony) zakładaliśmy, że mamy do czynienia ze stanem kwazi-równowagowym, a z pewnością stanem stacjonarnym, w którym gęstość prądu jest stała w urządzeniu.
Co się stanie kiedy w określonym punkcie przestrzeni naświetlimy naszą próbkę światłem generując nośniki prądu ?
Przechodzimy do stanu nierównowagowego, który musimy umieć opisać. Jest to proces który ma swoją dynamikę zarówno w przestrzeni jak i w czasie.

Stan równowagi termodynamicznej



Stan nierównowagi termodynamicznej

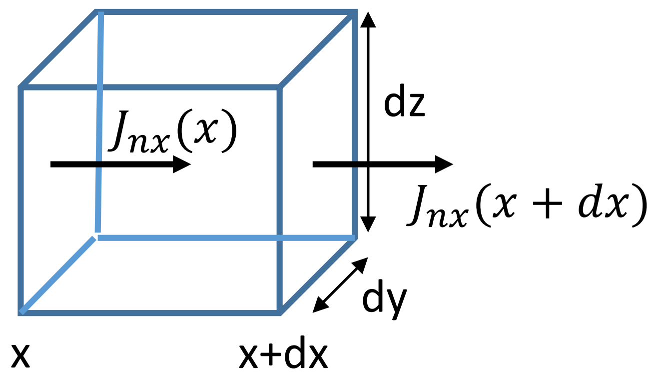


$$n = n_0 + \delta n$$

$$p = p_0 + \delta p$$

Transport nierównowagowy

Wyprowadźmy równania opisujące zależny od położenia i czasu rozkład koncentracji elektronów i dziur w stanie nierównowagowym. W tym celu rozpatrzmy element objętości $dxdydz$



Zmiana koncentracji elektronów w elemencie objętości $dxdydz$ wyraża się wzorem

$$\frac{\partial n}{\partial t}dxdydz = [J_{nx}(x) - J_{nx}(x+dx)]dydz = [J_{nx}(x) - J_{nx}(x) - \frac{\partial J_{nx}}{\partial x}dx]dydz = -\frac{\partial J_{nx}}{\partial x}dxdydz$$

Jeżeli dołożymy do tego możliwość generacji oraz rekombinacji nośników w tym elemencie objętości, to

$$\frac{\partial n}{\partial t}dxdydz = -\frac{\partial J_{nx}}{\partial x}dxdydz + g_n dxdydz - r_n dxdydz$$

g_n - częstość generacji elektronów na jednostkę objętości

r_n - częstość rekombinacji elektronów na jednostkę objętości

Transport nierównowagowy

Otrzymujemy dla elektronów i dziur następujące równania

(*)

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial J_{nx}}{\partial x} + g_n - r_n$$
$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial J_{px}}{\partial x} + g_p - r_p$$

$\xrightarrow{\text{dla układu 3D}}$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_n + g_n - r_n$$
$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_p + g_p - r_p$$

Powracając do równania dryftowo-dyfuzyjnego na prąd

(**)

$$\mathbf{J}_n = \frac{\mathbf{j}_n}{-e} = -\mu_n n \boldsymbol{\mathcal{E}} - D_n \nabla n$$
$$\mathbf{J}_p = \frac{\mathbf{j}_p}{+e} = \mu_p p \boldsymbol{\mathcal{E}} - D_p \nabla p$$

Różniczkując obustronnie równania (**) i wykorzystując równania (*)

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \mu_n \nabla \cdot (n\boldsymbol{\mathcal{E}}) + D_n \nabla^2 n + g_n - r_n$$
$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\mu_p \nabla \cdot (p\boldsymbol{\mathcal{E}}) + D_p \nabla^2 p + g_p - r_p$$

Transport nierównowagowy

Następnie różniczkując wyraz z polem elektrycznym

$$\nabla \cdot (p\boldsymbol{\mathcal{E}}) = \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \nabla p + p\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}$$

Otrzymujemy równania na zależną od przestrzeni i czasu koncentracje elektronów i dziur w półprzewodniku

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} &= \mu_n \left(\boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \nabla n + n\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}\right) + D_n \nabla^2 n + g_n - r_n \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= -\mu_p \left(\boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \nabla p + p\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}\right) + D_p \nabla^2 p + g_p - r_p \end{aligned}}$$

Zależne od czasu równanie dyfuzji

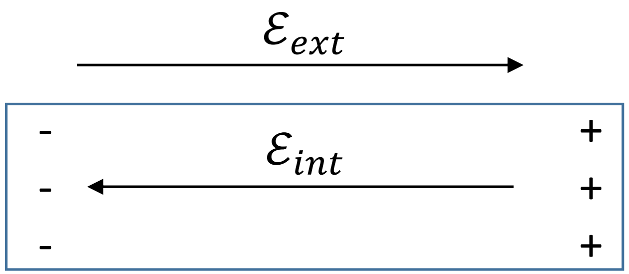
Jeżeli $n = n_0 + \delta n$ oraz $p = p_0 + \delta p$ oraz założymy, że liczba nośników równowagowych jest stała $n_0, p_0 = const$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial(\delta n)}{\partial t} &= \mu_n \left(\boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \nabla(\delta n) + n\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}\right) + D_n \nabla^2 (\delta n) + g_n - r_n \\ \frac{\partial(\delta p)}{\partial t} &= -\mu_p \left(\boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \nabla(\delta p) + p\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}\right) + D_p \nabla^2 (\delta p) + g_p - r_p \end{aligned}}$$

Równanie opisujące nośniki nadmiarowe $\delta n, \delta p$

Transport nierównowagowy

Spróbujmy rozwiązać równania z poprzedniego slajdu. Zauważmy jednak, że nie są one pełne dlatego, że generacja nośników ładunku w określonym punkcie przestrzeni powoduje generacje wewnętrznych pól elektrycznych (patrz rysunek)



Generacja nośników w zewnętrznym polu elektrycznym $\mathcal{E}_{ext}$ powoduje przestrzenną separacje ładunku. To z kolei pociąga za sobą generacje wewnętrznego pola elektrycznego .

W związku z tym zależne od czasu równania dyfuzji należałoby uzupełnić równaniem Poissona

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_{int} = \frac{e(p-n)}{\epsilon} = \frac{e(\delta p - \delta n)}{\epsilon}$$

A zatem zależne od czasu równania dyfuzji musza być rozwiązywane w sposób samouzgodniony z równaniem Poissona.

Aby analitycznie rozwiązać tak zdefiniowany problem przyjmijmy kilka przybliżeń:

- $|\mathcal{E}_{int}| \ll |\mathcal{E}_{ext}|$
- $g_p = g_n = g$ oraz $r_p = r_n = r$
- warunek neutralności ładunkowej tzn. $\delta n = \delta p$

Transport nierównowagowy

Otrzymujemy dwa równania na δn

$$\frac{\partial(\delta n)}{\partial t} = \mu_n \left(\boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \nabla(\delta n) + n \nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}\right) + D_n \nabla^2(\delta n) + g - r$$

$$\frac{\partial(\delta n)}{\partial t} = -\mu_p \left(\boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \nabla(\delta n) + p \nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}\right) + D_p \nabla^2(\delta n) + g - r$$

Wyeliminujemy stąd pole elektryczne mnożąc drugie równanie przez $\mu_n n$ zaś pierwsze przez $\mu_p p$ i dodając stronami

$$(\mu_n n D_p + \mu_p p D_n)\nabla^2(\delta n) + \mu_n \mu_p (p-n)\boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \nabla(\delta n) + (\mu_n n + \mu_p p)(g-r) = (\mu_n n + \mu_p p)\frac{\partial(\delta n)}{\partial t}$$

co można zapisać jako

$$\boxed{D' \nabla^2(\delta n) + \mu' \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \nabla(\delta n) + (g-r) = \frac{\partial(\delta n)}{\partial t}}$$

Równanie opisujące dynamikę nośników nadmiarowych

gdzie efektywny współczynnik dyfuzji D' oraz efektywna ruchliwość μ' nośników nadmiarowych

$$D' = \frac{\mu_n n D_p + \mu_p p D_n}{\mu_n n + \mu_p p} \xrightarrow[\frac{\mu}{D} = \frac{e}{k_B T}]{\text{Z relacji Einsteina}} \boxed{D' = \frac{D_n D_p (n+p)}{D_n n + D_p p}} \qquad \boxed{\mu' = \frac{\mu_n \mu_p (p-n)}{\mu_n n + \mu_p p}}$$

Transport nierównowagowy

Załóżmy półprzewodnik typu *p*, czyli $p_0 \gg n_0$ oraz niską koncentrację wstrzykiwania ładunków $\delta n \ll p_0$

$$D' = \frac{D_n D_p (n+p)}{D_n n + D_p p} = \frac{D_n D_p (n_0 + \delta n + p_0 + \delta n)}{D_n (n_0 + \delta n) + D_p (p_0 + \delta n)} \xrightarrow[\delta n \ll p_0]{p_0 \gg n_0} D' = D_n$$

$$\mu' = \frac{\mu_n \mu_p (p-n)}{\mu_n n + \mu_p p} = \frac{\mu_n \mu_p (p_0 + \delta n - n_0 - \delta n)}{\mu_n (n_0 + \delta n) + \mu_p (p_0 + \delta n)} \xrightarrow[\delta n \ll p_0]{p_0 \gg n_0} \mu' = \mu_n$$

A zatem równanie opisujące nośniki nadmiarowe w półprzewodniku typu *p*

$$D_n \nabla^2 (\delta n) + \mu_n \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \nabla (\delta n) + (g - r) = \frac{\partial (\delta n)}{\partial t}$$

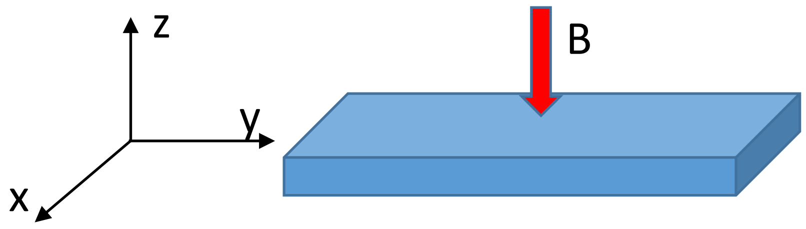
Przeprowadzając analogiczne rozumowanie opisujące nośniki nadmiarowe w półprzewodniku typu *n*

$$D_p \nabla^2 (\delta n) + \mu_p \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \nabla (\delta n) + (g - r) = \frac{\partial (\delta n)}{\partial t}$$

Zauważmy, że dynamika ładunków nadmiarowych zdeterminowana jest przez parametry nośników mniejszościowych. Dla półprzewodnika typu *p* związana jest z parametrami D_n oraz μ_n, zaś dla półprzewodnika typu *n* z parametrami D_p oraz μ_p.

Magnetotransport

Równanie opisujące transport ładunku w wyniku działania pola elektrycznego skierowanego w płaszczyźnie $\boldsymbol{\mathcal{E}} = (\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, 0)$ oraz magnetycznego $\boldsymbol{B} = (0,0,B)$



$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \frac{\mathbf{V}}{\tau} = \frac{q}{m^*}\boldsymbol{\mathcal{E}} + \frac{q}{m^*}(\mathbf{V} \times \mathbf{B})$$

Rozpisując równanie wektorowe, otrzymujemy

$$\frac{dV_x}{dt} + \frac{V_x}{\tau} - \frac{qB}{m^*}V_y = \frac{q}{m^*}\mathcal{E}_x$$

$$\frac{dV_y}{dt} + \frac{V_y}{\tau} + \frac{qB}{m^*}V_x = \frac{q}{m^*}\mathcal{E}_y$$

$$\frac{dV_z}{dt} + \frac{V_z}{\tau} = \frac{q}{m^*}\mathcal{E}_z$$

$\xrightarrow{\text{rozwiązanie}}$

Znak + dotyczy elektronów
Znak – dotyczy dziur

$$\omega_c = \frac{eB}{m^*}$$

$$V_x = \frac{e\tau}{m^*}\left(\frac{\mathcal{E}_x \pm \omega_c\tau\mathcal{E}_y}{1+\omega_c^2\tau^2}\right)$$

$$V_y = \frac{e\tau}{m^*}\left(\frac{\mathcal{E}_y \mp \omega_c\tau\mathcal{E}_x}{1+\omega_c^2\tau^2}\right)$$

$$V_z = \frac{e\tau}{m^*}\mathcal{E}_z$$

Magnetotransport

Poszczególne składowe prądu j_α, gdzie $\alpha = x, y, z$

$$j_\alpha = n_q q V_\alpha$$

Wstawiając V_α, gdzie $\alpha = x, y, z$ z poprzedniego slajdu, możemy prąd zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \\ \mathcal{E}_z \end{pmatrix}$$

gdzie

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{n_q e^2 \tau}{m^*} \frac{1}{1 + \omega_c^2 \tau^2}$$

$$\sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = \pm \frac{n_q e^2 \tau}{m^*} \frac{\omega_c \tau}{1 + \omega_c^2 \tau^2}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{n_q e^2 \tau}{m^*} = \sigma_0$$

$\longrightarrow$ zazwyczaj jednak mówi się o oporności właściwej

$$\rho_{xx} = \rho_{yy} = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2}$$

$$\rho_{xy} = -\rho_{yx} = -\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2}$$

$$\rho_{zz} = \frac{1}{\sigma_{zz}}$$

Magnetotransport

Magnetorezystancja – zmiana oporu wywołana polem magnetycznym

$$MR = \frac{\Delta\rho}{\rho(0)} = \frac{\rho(B) - \rho(0)}{\rho(0)}$$

Z poprzednich wzorów widzimy, że magnetorezystancja w kierunku osi z, $\Delta\varrho_{zz}/\varrho = 0$

Magnetorezystancje w kierunku poprzecznym x, definiujemy jako

$$\frac{\Delta\rho}{\rho(0)} = \frac{\rho_{xx}(B) - \rho(0)}{\rho(0)}$$

Dla małego pola magnetycznego, możemy rozwinąć wzory na przewodność do drugiego rzędu względem ω_c

$$\sigma_{xx} = \frac{n_q e^2 \tau}{m^*}(1 - \omega_c^2 \tau^2)$$

$$\sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = \pm\frac{n_q e^2 \tau}{m^*}\omega_c \tau$$

$$\longrightarrow$$

Zauważmy, że w półprzewodnikach czas rozpraszania τ zależy od energii, a zatem powinniśmy posługiwać się raczej wartościami uśrednionymi po energii.

$$\langle\sigma_{xx}\rangle = \frac{ne^2}{m^*}(\langle\tau\rangle - \omega_c^2\langle\tau^2\rangle)$$

$$\langle\sigma_{xy}\rangle = \pm\frac{n_q e^2}{m^*}\omega_c\langle\tau^2\rangle$$

Magnetotransport

Opór właściwy w kierunku poprzecznym

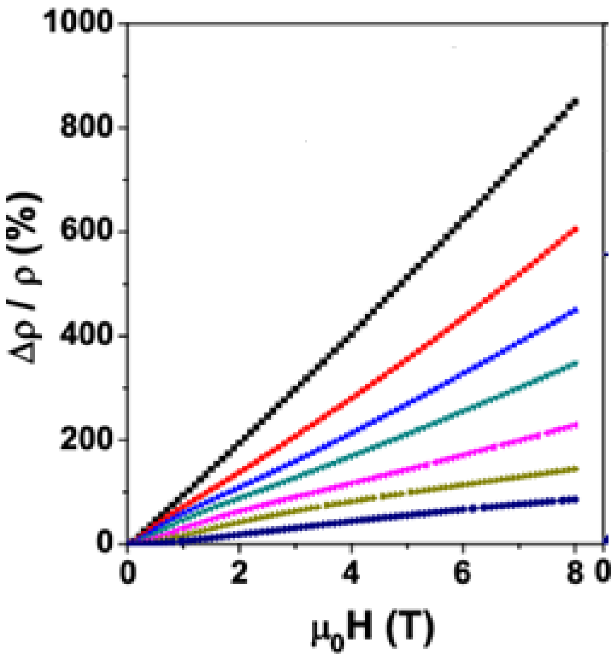
$$\langle \rho_{xx} \rangle = \frac{m^*}{n_q e^2 \langle \tau \rangle} \left[1 + \omega_c^2 \frac{\langle \tau^3 \rangle}{\langle \tau \rangle} - \omega_c^2 \frac{\langle \tau^2 \rangle^2}{\langle \tau \rangle^2} \right]$$

stąd magnetorezystancja

$$\frac{\Delta \rho}{\rho(0)} = \left(\frac{e}{m^*} \right)^2 \frac{\langle \tau^2 \rangle^2}{\langle \tau \rangle} (A-1) B^2$$

gdzie

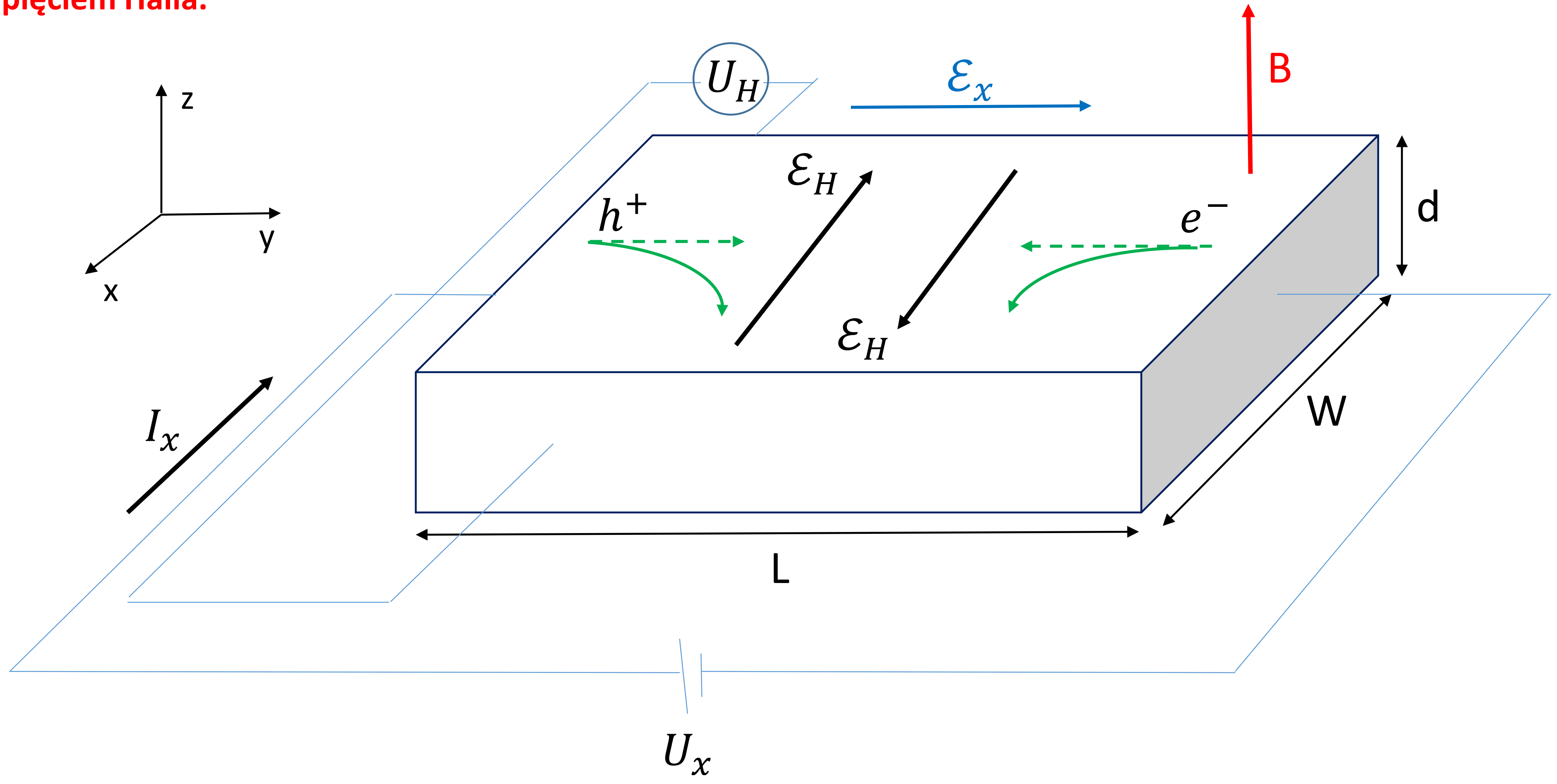
$$A = \frac{\langle \tau^3 \rangle \langle \tau \rangle}{\langle \tau^2 \rangle^2}$$



Magnetorezytsancja poprzeczna dla n-Si i różnych temperatur.

Efekt Halla

W wyniku przepływu prądu i działania siły Lorentza w próbce powstaje poprzeczne pole elektryczne zdefiniowane **napięciem Halla.**



Efekt Halla

Na ładunki płynące w próbce działa siła Lorentza od pola magnetycznego

$$\mathbf{F} = q[\boldsymbol{\mathcal{E}} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}]$$

powodując zakrzywienie toru ładunku i ich akumulacje na jednym z brzegów próbki. Akumulacja ładunków o przeciwnych znakach na przeciwnych brzegach próbki skutkuje pojawieniem się pola elektrycznego skierowanego w poprzek próbki. W pewnym momencie siła działająca od wyindukowanego pola poprzecznego równoważy siłę Lorentza

$$q\mathcal{E}_y = qV_x B_z$$

Stąd napięcie Halla

$$U_H = \mathcal{E}_H W = V_x W B_z$$

Ale prędkość unoszenia w kierunku x dla półprzewodnika typu *p*

$$V_x = \frac{j_x}{ep} = \frac{I_x}{epWd} \xrightarrow[\text{powyższego}]{\text{Podstawiając do}} U_H = \frac{I_x B_z}{epd}$$

Stąd koncentracja dziur

$$\boxed{p = \frac{I_x B_z}{edU_H}}$$

Efekt Halla

Dla półprzewodnika typu *n*

$$U_H = -\frac{I_x B_z}{ned} \qquad n = -\frac{I_x B_z}{edU_H}$$

Idąc dalej wiemy, że

$$j_x = ep\mu_p \mathcal{E}_x \longrightarrow \frac{I_x}{Wd} = ep\mu_p \frac{U_x}{L}$$

Stąd ruchliwość

$$\mu_p = \frac{I_x L}{epU_x W d} \qquad \mu_n = \frac{I_x L}{enU_x W d}$$

Efekt Halla – konkluzje:

1. **Znak napięcia Halla pozwala określić czy prąd w półprzewodniku niesiony jest przez dziury czy elektrony**
2. **Wartość napięcia Halla pozwala określić koncentracje nośników w półprzewodniku**
3. **Wartość napięcia Halla pozwana również na pomiar ruchliwości nośników**

Efekt Halla – model bardziej rzeczywisty

W modelu bardziej rzeczywistym powinniśmy wyjść od równania ruchu z czasem relaksacji. Korzystając z wcześniejszych równań oraz zakładając małe pole magnetyczne

$$\langle V_x \rangle = \frac{e}{m^*}(\langle \tau \rangle \mathcal{E}_x \pm \omega_c \langle \tau^2 \rangle \mathcal{E}_y)$$
$$\langle V_y \rangle = \frac{e}{m^*}(\langle \tau \rangle \mathcal{E}_y \mp \omega_c \langle \tau^2 \rangle \mathcal{E}_x)$$

Ponieważ w stanie ustalonym $V_y = 0$, z drugiego równania

$$\mathcal{E}_y = \pm \omega_c \frac{\langle \tau^2 \rangle}{\langle \tau \rangle} \mathcal{E}_x$$

Eliminując $\mathcal{E}_x$ z pierwszego równania i ograniczając się do wyrazów najniższego rzędu w B

$$\boxed{U_H = \frac{B_z \langle j_x \rangle}{ned} \frac{\langle \tau^2 \rangle}{\langle \tau \rangle^2}}$$

Dodatkowy czynnik związany z rozpraszaniem

Efekt Halla – model bardziej rzeczywisty

Jeśli w układzie występują dziury i elektrony to te dwa typu nośników niosą prąd jednocześnie, wówczas

$$\langle j_y \rangle = \frac{ne^2}{m_e^*}\left(\langle\tau\rangle\mathcal{E}_y + \omega_{ce}\langle\tau^2\rangle\mathcal{E}_x\right) + \frac{pe^2}{m_h^*}\left(\langle\tau\rangle\mathcal{E}_y - \omega_{ch}\langle\tau^2\rangle\mathcal{E}_x\right)$$

W stanie ustalonym $\langle j_y \rangle = 0$

$$\mathcal{E}_y = \frac{eB_z}{e(p\mu_h + n\mu_e)}\frac{\langle\tau^2\rangle}{\langle\tau\rangle^2}(p\mu_h^2 - n\mu_e^2)\mathcal{E}_x$$

Porównując z poprzednim wyrażeniem na $\mathcal{E}_y$

$$\boxed{U_H = \frac{e(p\mu_h^2 - n\mu_e^2)}{[e(p\mu_h + n\mu_e)]^2}\frac{B_z\langle j_x\rangle}{d}\frac{\langle\tau^2\rangle}{\langle\tau\rangle^2}}$$

Wyrażenie na napięcie Halla kiedy uwzględnimy prąd od obu typów nośników ładunku oraz ich rozpraszania (założyliśmy, że czasy rozpraszania dla elektronów i dziur są takie same)

Najważniejsze informacje z wykładu - podsumowanie

- Przepływ prądu w materiałach półprzewodnikowych zdeterminowany jest kilkoma parametrami tj. ruchliwość, tensor masy efektywnej czy stała dyfuzji nośników ładunku. Wielkości te związane są ze strukturą pasmową materiału oraz procesami rozpraszania.
- Pomiaru przewodzącej masy efektywnej można dokonać za pomocą rezonansu cyklotronowego, a wyznaczoną w ten sposób wartość można powiązać z pasmową masą efektywną.
- W półprzewodnikach mamy do czynienia z dwoma rodzajami nośników ładunku (elektrony i dziury) oraz dwoma rodzajami prądu: prąd dryftowy (unoszenia) oraz prąd dyfuzyjny.
- Stała dyfuzji oraz ruchliwość nośników ładunku powiązana jest relacją Einsteina.
- W stanie nierównowagi (np. wstrzyknięcie ładunku) transport nośników zdeterminowany jest zależnymi od czasu równaniami dryftowo-dyfuzyjnymi.
- Dynamika ładunków nadmiarowych zdeterminowana jest przez parametry nośników mniejszościowych.
- W materiałach półprzewodnikowych rezystancja zależy od przyłożonego pola magnetycznego i jego kierunku, wielkość opisującą tą zmianę nazywamy magnetorezystancją.
- Jednym z podstawowych metod pomiaru ruchliwości ładunku i ich koncentracji w materiałach półprzewodnikowych jest efekt Halla.