

# Materiały i przyrządy półprzewodnikowe

## Wykład 4:

# Statystyka ładunku w półprzewodnikach samoistnych i domieszkowany

Paweł Wójcik,

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej  
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

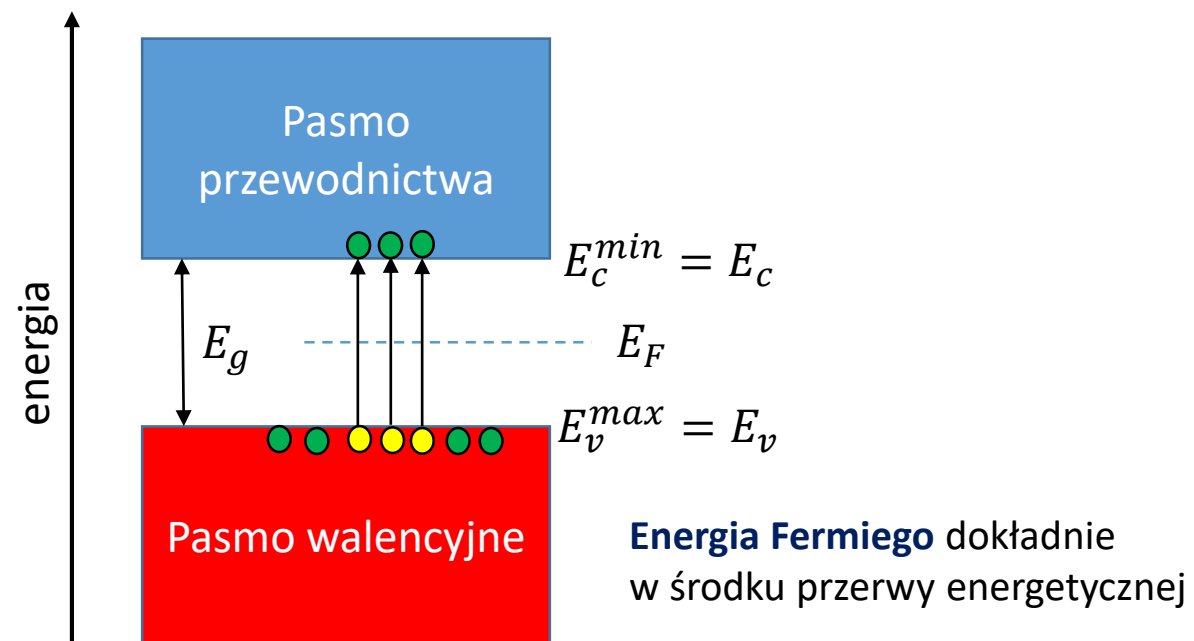
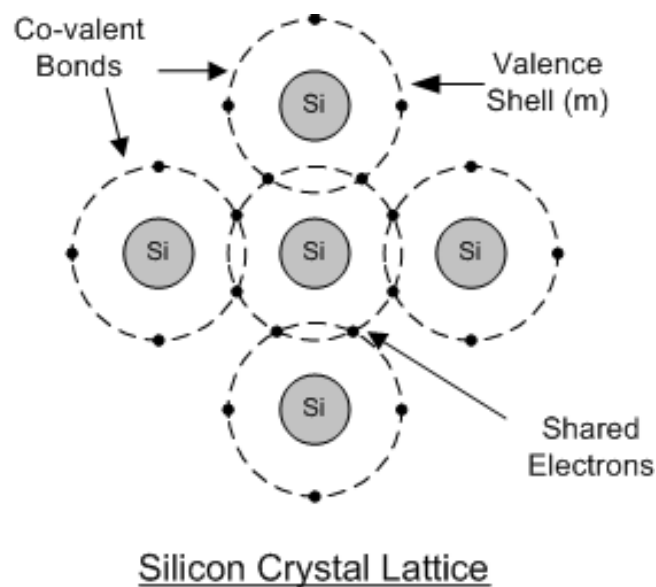


# Plan wykładu:

1. Domieszki
2. Stany domieszkowe
3. Rozkład Fermiego-Diraca
4. Gęstość stanów w układach 1D, 2D i 3D
5. Statystyki ładunku w półprzewodnikach samoistnych
6. Statystyki ładunku w półprzewodnikach domieszkowanych
7. Półprzewodniki zdegenerowane

# Rodzaje domieszek w materiałach półprzewodnikowych

**Półprzewodnik samoistny** – półprzewodnik, którego materiał jest idealnie czysty, bez żadnych zanieczyszczeń struktury krystalicznej. W temperaturze  $T = 0$  K pasmo walencyjne jest całkowicie obsadzone, zaś pasmo przewodzenia puste. Dla  $T > 0$  K następuje generacja par elektron-dziura, przy czym koncentracja elektronów w półprzewodniku samoistnym jest równa koncentracji dziur.



# Rodzaje domieszek w materiałach półprzewodnikowych

## Klasyfikacja defektów punktowych w półprzewodnikach

- (1) **Domieszka podstawieniowa:** atom obcy zajmuje w sieci krystalicznej miejsce atomu kryształu macierzystego.
- (2) **Domieszka międzywęzłowa:** atom obcy lub macierzysty znajduje się w położeniu międzywęzłowym (jest to miejsce, w którym nie znajduje się żaden atom w sieci idealnej).
- (3) **Luki (wakansje):** brak atomu w położeniu sieciowym.
- (4) **Defekty antystrukturalne (antisite defects):** w kryształach związku AB atom A zajmuje położenie atomu B i/lub odwrotnie.

## Rodzaje domieszek podstawieniowych

- (a) **Donor (D):** atom o większej walencyjności (większej liczbie elektronów walencyjnych), który zastępuje atom sieci macierzystej.
- (b) **Akceptor (A):** atom o mniejszej walencyjności, który zastępuje atom sieci macierzystej.
- (c) **Domieszka izowalencyjna (izoelektronowa):** atom innego pierwiastka o tej samej walencyjności zastępuje atom sieci macierzystej.

Domieszki donorowe i akceptorowe mają istotny wpływ na właściwości elektronowe materiałów półprzewodnikowych, w szczególności na przewodnictwo. Pozwalają one na otrzymywanie dodatnich i ujemnych nośników ładunku o zadanej koncentracji. Natomiast domieszki izowalencyjne znajdują zastosowanie w optoelektronice.

# Rodzaje domieszek w materiałach półprzewodnikowych

## Domieszki w półprzewodnikach pierwiastkowych grupy IV:

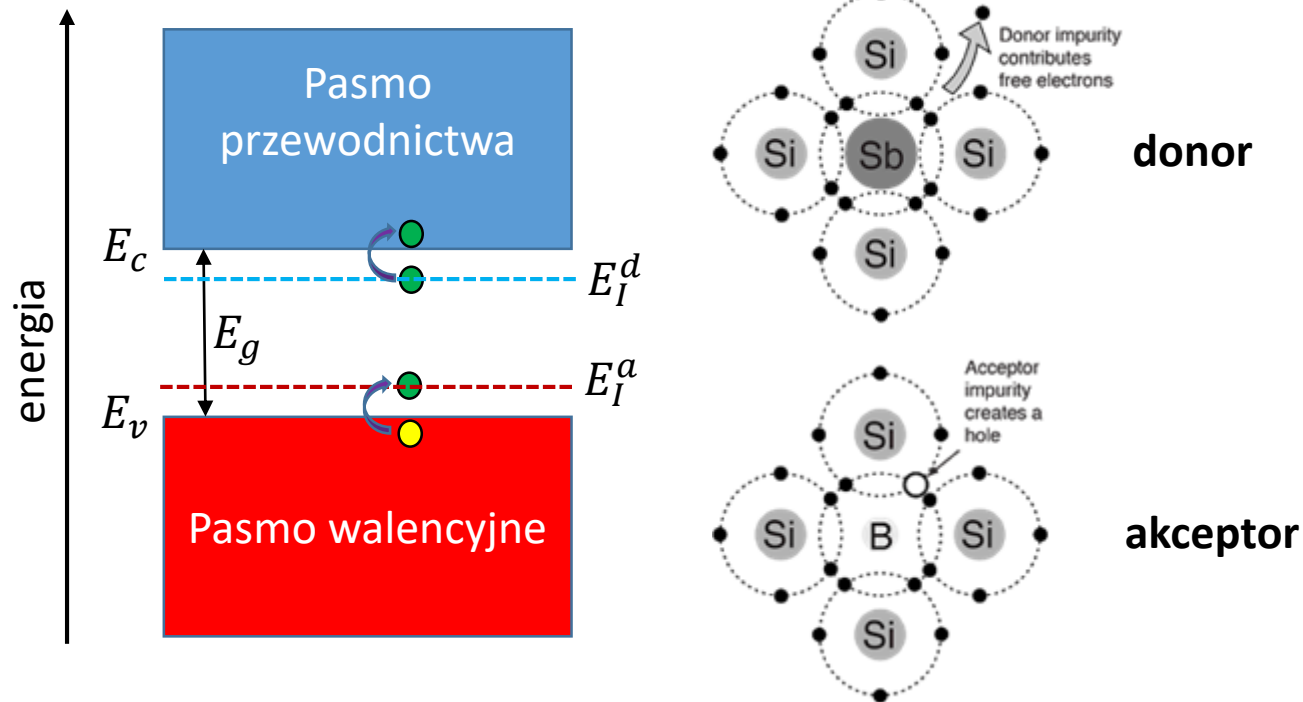
**Donory:** Jeżeli atomy pierwiastków grup V, VI i VII zastępują atom pierwiastka grupy IV, to powstają odpowiednio donory pojedyncze, podwójne i potrójne. Np. Si:P, Si:S, Si:Cl, Ge:As, Ge:Te, Ge:Br. **Półprzewodnik typu n**

**Akceptory:** Jeżeli atomy pierwiastków grup III, II, i I zastępują atom pierwiastka grupy IV, to powstają odpowiednio akceptory pojedyncze, podwójne i potrójne. Np. Si:B, Si:Be, Si:Li. **Półprzewodnik typu p**

**Domieszki izowalencyjne:** Domieszką podstawieniową jest atom innego pierwiastka grupy IV, np. Si:C, Ge:Si.

**PERIODIC TABLE OF THE ELEMENTS**

Relative atomic mass (A<sub>r</sub>) is shown for each element. The table includes groups I to VIII A and I to VIII B, and periods 1 to 7. A red circle highlights the elements in group IV: Carbon (C), Silicon (Si), Germanium (Ge), Tin (Sn), and Lead (Pb).



# Rodzaje domieszek w materiałach półprzewodnikowych

## Domieszki w związkach półprzewodnikowych

W związku półprzewodnikowym ten sam atom domieszki może być donorem lub akceptorem w zależności od położenia w sieci krystalicznej.

W związkach III-V (np. w GaAs) atom pierwiastka grupy IV (C, Si, Ge, Sn, Pb) tworzy donor, jeżeli jest podstawiony w położeniu atomu pierwiastka grupy III (Ga), natomiast tworzy akceptor w położeniu pierwiastka grupy V (As).

W tym przypadku mówimy o **amfoterycznym** charakterze domieszek.

Ponadto w związku półprzewodnikowym mogą występować zwykłe donory i akceptory. Np. GaAs<sub>1-x</sub>Se<sub>x</sub>; GaZnAs.

**PERIODIC TABLE OF THE ELEMENTS**  
<http://www.kj-split.hr/periodni/en/>

**Legend:**

- Metal
- Alkali metal
- Alkaline earth metal
- Transition metals
- Lanthanide
- Actinide
- Semimetal
- Nonmetal
- Chalcogens element
- Halogens element
- Noble gas

**STANDARD STATE (25 °C, 101 kPa):**

- Ne - gas
- Fe - solid
- Ga - liquid
- Li - synthetic

**LANTHANIDE:**

57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
La	Ce	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu

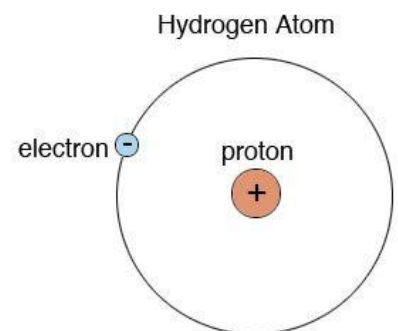
**ACTINIDE:**

89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103
Ac	Th	Pa	U	Np	Pu	Am	Cm	Bk	Cf	Es	Fm	Md	No	Lr

(1) Pure Appl. Chem., 73, No. 4, 687-683 (2011)  
Relative atomic mass is shown with five significant figures. For elements having no stable isotopes, the value enclosed in brackets indicates the mass number of the longest-lived isotope of the element.  
However three such elements (Tl, Pa, and U) do have a characteristic terrestrial isotopic composition, and for these an atomic weight is tabulated.  
Editor: Aditya Vardhan (advan@ncsl.gov)

# Stany domieszkowe donorowe i akceptorowe

## Atom wodoru (znamy rozwiązanie analityczne)



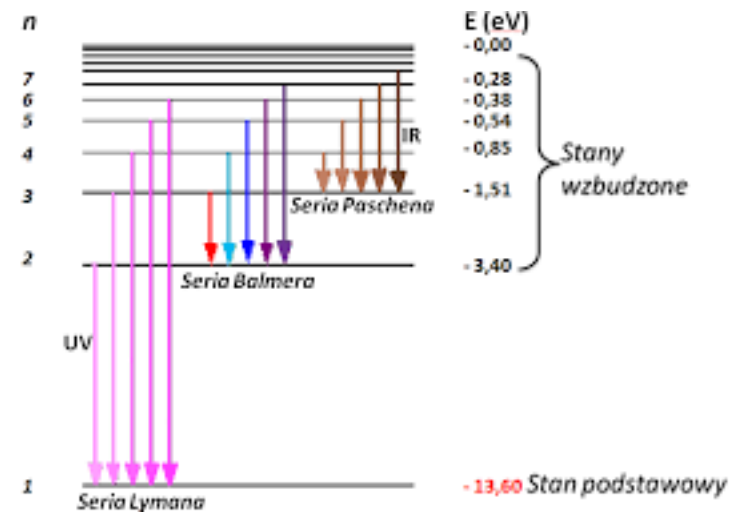
Równanie Schrödingera  

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$$
 z potencjałem Kulombowskim

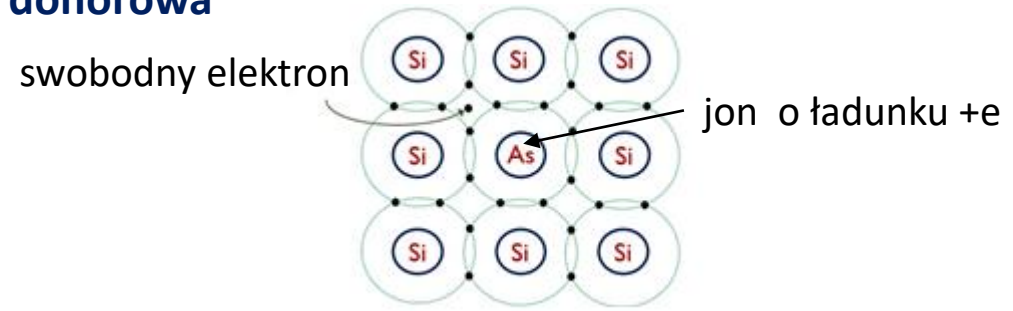
$$V(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

Energie

$$E_n = -\frac{m_0 e^4}{8h^2 \epsilon_0^2 n^2}$$



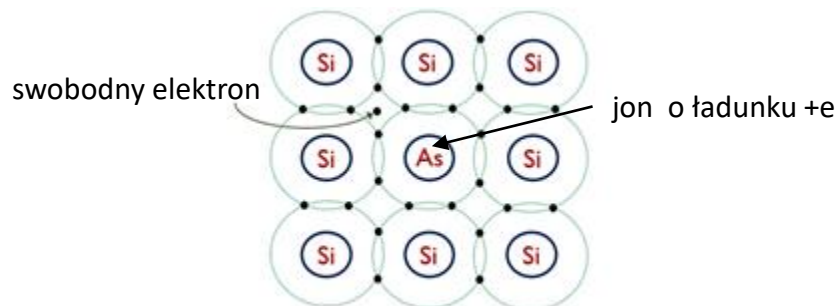
## Domieszka donorowa



Chcemy opisać stany energetyczne elektronu w polu pochodzącym od zjonizowanego donora oraz sieci krystalicznej

Byłoby nader wygodne, gdyby również w ciele stałym udało się opisać poziomy energetyczne domieszki wzorem analogicznym do wzoru dla wodoru, w którym masa elektronu swobodnego została zastąpiona masą efektywną, a oddziaływanie elektrostatyczne byłoby ekranowane stałą dielektryczną danego materiału. Czy istnieją takie warunki przy których można tak postąpić ?

# Stany domieszkowe donorowe i akceptorowe



Chcemy opisać stany energetyczne elektronu w polu pochodzącym od zjonizowanego donora oraz sieci krystalicznej

Jednoelektronowe równanie Schrödingera dla elektronu domieszki

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$$

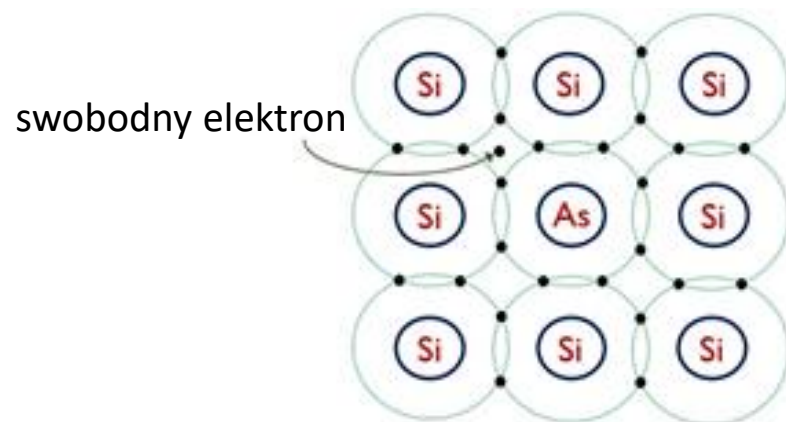
$U(\mathbf{r})$  → potencjał periodyczny sieci  
 $V(\mathbf{r})$  → potencjał od zjonizowanego atomu domieszki (zaburzenie potencjału periodycznego)

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{Ze^2}{r}$$

Zauważmy, że potencjał periodyczny  $U(\mathbf{r})$  jest zaburzony przez potencjał domieszki  $V(\mathbf{r})$  rozwiązania tego równania nie mają już formy funkcji Blocha, a zatem stanom elektronu nie można przypisać określonego  $\mathbf{k}$ . Innymi słowy  $\mathbf{k}$  nie jest dobrą liczbą kwantową.



## Stany domieszkowe donorowe i akceptorowe



Rozważmy brzeg (minimum lub maksimum) pasma energetycznego w środku strefy Brillouina,  $\mathbf{k} = \mathbf{0}$  (model Luttingera – Kohna, 1955)

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$$

Funkcje bazowe zaproponowane przez Luttingera i Kohna

$$\chi_{n\mathbf{k}} = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} u_{n0}(\mathbf{r})$$

a więc

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_n \sum_{\mathbf{k}} A_{n\mathbf{k}} \chi_{n\mathbf{k}}$$

Wstawiając do RS mnożąc przez sprzężenie i całkując po objętości komórki elementarnej

$$\left( E_n(0) + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0} \right) A_{n\mathbf{k}} + \sum_{n'} \frac{\hbar}{m_0} \mathbf{k} \hat{\mathbf{p}}_{nn'}(0) A_{n'\mathbf{k}} + \sum_{n'} [V(\mathbf{r})]_{nn'} A_{n'\mathbf{k}} = E A_{n\mathbf{k}}$$

$$[V(\mathbf{r})]_{nn'} = \int e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k})\mathbf{r}} V(\mathbf{r}) u_{n0}^*(\mathbf{r}) u_{n'0}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

# Stany domieszkowe donorowe i akceptorowe

Da się pokazać, że

(dokładne wyprowadzenie patrz: „Elektrony i dziury w półprzewodnikach”, I.M. Cydilkowski)

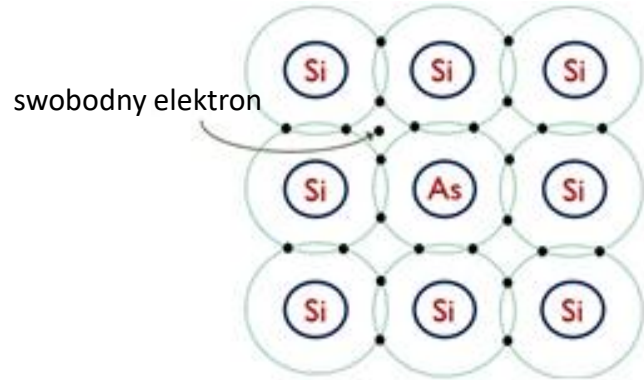
$$\psi(\mathbf{r}) \approx F_c(\mathbf{r})u_{c0}(\mathbf{r})$$

wtedy

$$[E_c(-i\nabla) + V(\mathbf{r})] F_c(\mathbf{r}) = E F_c(\mathbf{r})$$

Warunki:

- (a) Potencjał domieszki jest słaby i silnie ekranowany przez elektrony materiału macierzystego.
- (b) Potencjał jest wolno zmienny na odległości stałej sieci.
- (c) Potencjał jest silnie rozmyty i tylko stany z brzegu (ekstremum) pasma są istotne.



Dla pasma z izotropową relacją dyspersji

$$E_c(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}$$

otrzymujemy równanie jak dla atomu wodoru z masą efektywną oraz stałą dielektryczną materiału macierzystego

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{Ze^2}{r} \right] F_c(\mathbf{r}) = E F_c(\mathbf{r})$$

Energie

$$E_n = -\frac{m^* Z^2 e^4}{2(4\pi\epsilon)^2 \hbar^2 \epsilon^2 n^2} = -\frac{Ry^*}{n^2}$$

Rydberg donorowy, gdy  $m^* = m_e$   
(akceptorowy, gdy  $m^* = m_h$ )

Przykład: Energia jonizacji P w Si: 45 meV

# Stany domieszkowe donorowe i akceptorowe

Typowe wartości Rydberga donorowego

$$10 \text{ meV} \leq Ry_D \leq 100 \text{ meV}$$

Wodoropodobna funkcja falowa stanu podstawowego (1s) donora

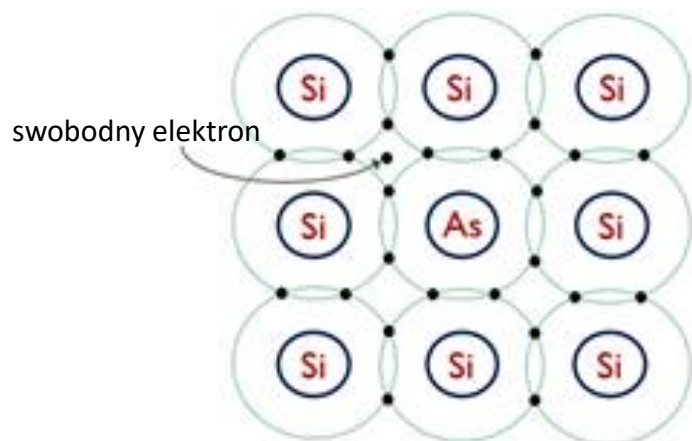
$$\psi_{1s}(r) = \frac{1}{(\pi a_D^3)^{1/2}} e^{-r/a_D}$$

Rozmycie funkcji falowej jest scharakteryzowane przez **donorowy promień Bohra**

$$a_D^* = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2\epsilon}{m^*Ze^2}$$

$$\sim 1 \text{ nm} \leq a_D \leq \sim 10 \text{ nm}$$

**Wielkość znacznie większa od stałej sieci !!!**



Dla pasma z anizotropową relacją dyspersji, np. Si, Ge

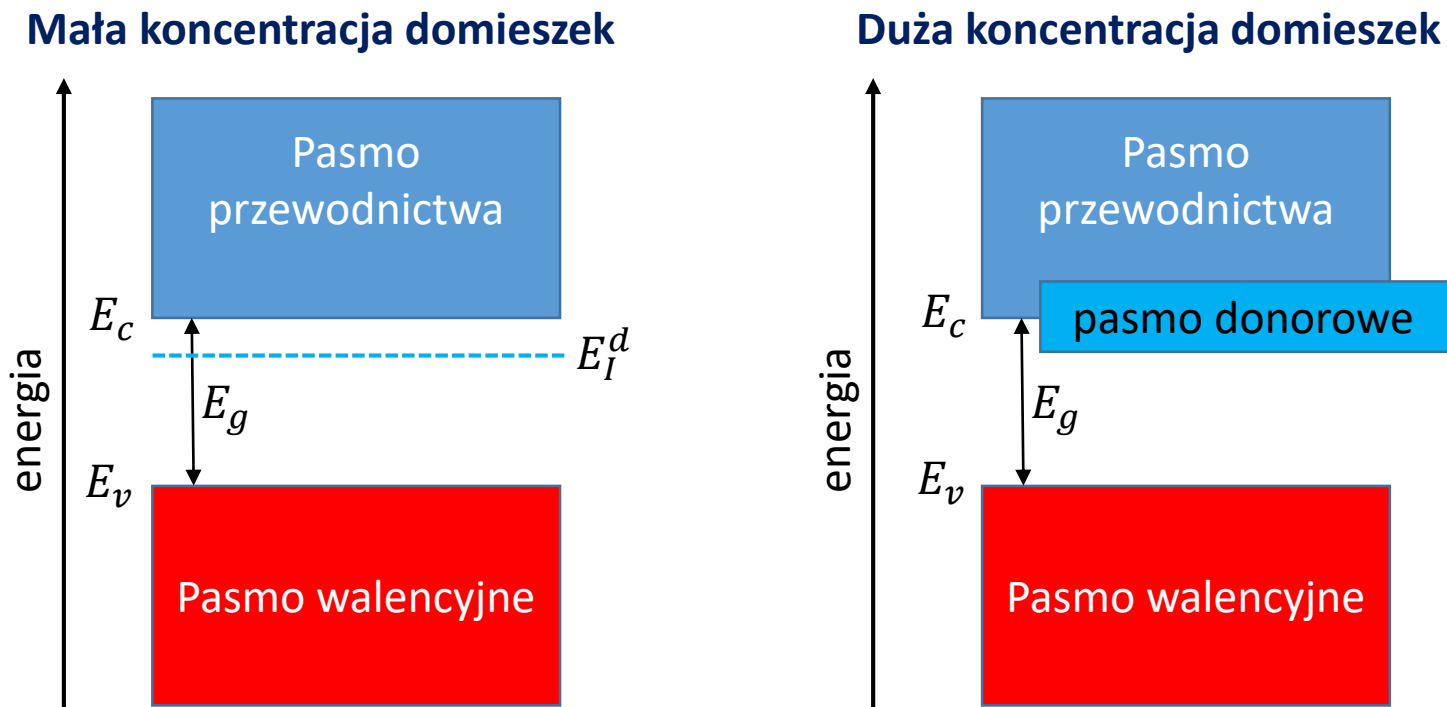
$$\left[ \sum_{\alpha=x,y,z} \frac{\hbar^2 (k_{0\alpha} - i\nabla_{\alpha})^2}{2m_{\alpha}^*} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{Ze^2}{r} \right] F_c(\mathbf{r}) = EF_c(\mathbf{r})$$

Równania nie da się rozwiązać analitycznie. Pozostaje rozwiązanie numeryczne.

## Stany domieszkowe donorowe i akceptorowe

Do tej pory rozpatrywaliśmy pojedynczą domieszkę zlokalizowaną w sieci. Jeśli koncentracja domieszek jest mała, domieszki można traktować jako pojedyncze i niezależne (ich funkcje falowe nie przekrywają się i nie oddziałują one ze sobą). Wtedy opis w ujęciu masy efektywnej, przedstawiony na poprzednich slajdach, jest poprawny.

Gdy koncentracja domieszek jest duża funkcje falowe sąsiadujących domieszek przekrywają się, wówczas przez analogię do kryształu pojedyncze stany donorowe rozszczepiają się tworząc pasmo donorowe. Mamy silnie **zdegenerowany (domieszkowany) półprzewodnik**.



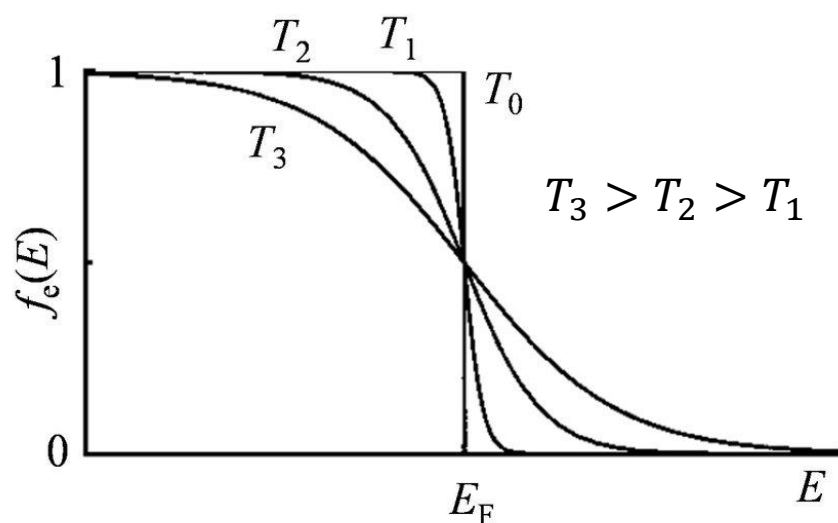
# Rozkład Fermiego-Diraca

Elektrony i dziury posiadają spin połówkowy, podlegają więc statystyce Fermiego-Diraca. Zgodnie z tą statystyką, w układzie identycznych fermionów w równowadze termicznej w temperaturze  $T$  prawdopodobieństwo obsadzenia przez fermion stanu kwantowego o energii  $E$  określone jest przez **funkcję rozkładu Fermiego-Diraca** o postaci

$$f(E) = \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)} + 1},$$

Postać tego rozkładu wynika z nierozróżnialności cząstek i związanego z tym zakazu Pauliego.

gdzie  $\beta = 1/(k_B T)$ , a  $\mu = E_F$  jest **potencjałem chemicznym** układu. W fizyce ciała stałego  $E_F$  często nazywamy **poziomem Fermiego**.



**Dla temperatury  $T=0K$**

$$f(E) = \begin{cases} 1 & \text{dla } E < \mu \\ 1/2 & \text{dla } E = \mu \\ 0 & \text{dla } E > \mu \end{cases}$$

# Rozkład Fermiego-Diraca

Zgodnie z zakazem Pauliego liczba fermionów w jednocząstkowym stanie kwantowym jest równa 0 lub 1. Na tej podstawie możemy obliczyć **średnią liczbę fermionów** w stanie kwantowym o energii  $E$  jako

$$\langle n(E) \rangle = \sum_{i=1}^2 n_i p_i = 0 \times f(E) + 1 \times f(E) = f(E) .$$

Wynika stąd, że funkcja rozkładu Fermiego-Diraca wyznacza średnią liczbę fermionów w stanie kwantowym o energii  $E$  (jeśli nie ma degeneracji spinowej), czyli

$$\langle n(E) \rangle = f(E) .$$

## Sens fizyczny potencjału chemicznego (poziomu Fermiego)

- Zwykle potencjał chemiczny interpretujemy jako zmianę energii układu spowodowaną dodaniem do układu  $N$  fermionów jednego dodatkowego fermionu, czyli

$$\mu = \frac{\Delta E}{\Delta N}$$

- Dla  $E = \mu$  otrzymujemy  $f(\mu) = 1/2$ , a zatem możemy interpretować potencjał chemiczny jako energię takiego stanu kwantowego, dla którego prawdopodobieństwo obsadzenia (średnia liczba fermionów) wynosi 1/2.

# Rozkład Fermiego-Diraca

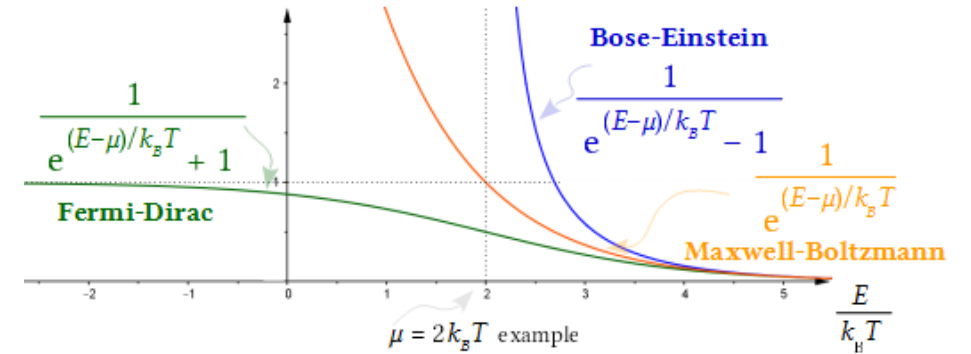
Często stosowane przybliżenie rozkładu Fermiego-Diraca rozkładem Boltzmann (półprzewodniki niezdegenerowane)

Jeżeli  $E - \mu \gg k_B T$

$$f(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E-\mu}{k_B T}\right) + 1} = \frac{1}{\exp\left(\frac{E-\mu}{k_B T}\right)} = C \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right)$$

rozkład Fermiego-Diraca

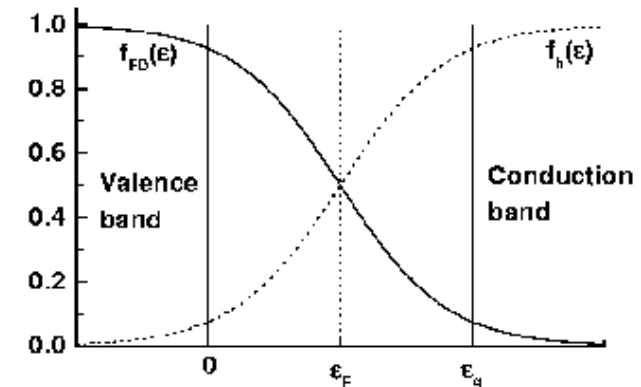
rozkład Boltzmann



## Rozkład Fermiego-Diraca dla dziur

Prawdopodobieństwo  $h(E)$  obsadzenia stanu kwantowego o energii  $E$  przez dziurę jest równe prawdopodobieństwu nieobsadzenia tego stanu kwantowego przez elektron, a zatem

$$h(E) = 1 - f(E) = \frac{1}{e^{\beta(\mu-E)} + 1}$$



## Funkcja gęstości stanów

Założmy, że mamy idealny półprzewodnik, bez domieszkowania (samoistny), a zatem stany kwantowe są stanami Blocha z dobrze określoną liczbą kwantową  $\mathbf{k}$ . Gęstość elektronów w pasmie przewodnictwa dana jest

$$n = \frac{2}{\Omega} \sum_n \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{e^{\beta[E_{n\mathbf{k}} - E_F]} + 1}$$

spin elektronu
objętość układu

Dla dużego układu odległości pomiędzy poszczególnymi wartościami  $\mathbf{k}$  są bardzo małe a zatem możemy przejść co całkowania

$$\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \int d^3k$$

Otrzymujemy

$$n = \frac{2}{(2\pi)^3} \sum_n \int d^3k \frac{1}{e^{\beta[E_{n\mathbf{k}} - E_F]} + 1}$$

**Całkowanie po całej strefie Brillouina !!!**

Zamiast całkować po wektorze falowym, ponieważ istnieje zależność  $E(\mathbf{k})$  możemy spróbować całkować po energii, przejście pomiędzy zmiennymi definiuje funkcję gęstości stanów

$$n = \sum_n \int dE g_n(E) \frac{1}{e^{\beta[E_n - E_F]} + 1}$$

**Funkcja gęstości stanów**



## Funkcja gęstości stanów 3D

Rozpatrzmy układ 3D w postaci prostopadłościanu w wymiarach  $L_1 \times L_2 \times L_3$   
Zakładamy układ nieskończony (brak efektów powierzchni).

**Warunki brzegowe Borna von Karmana.**

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_3)$$

Wstawiamy funkcje Blocha

$$e^{ik_\alpha x_\alpha} u_{k_\alpha}(x_\alpha) = e^{ik_\alpha(x_\alpha + L_\alpha)} u_{k_\alpha}(x_\alpha + L_\alpha) = e^{ik_\alpha(x_\alpha + L_\alpha)} u_{k_\alpha}(x_\alpha)$$

$$e^{ik_\alpha L_\alpha} = 1$$

$$k_\alpha L_\alpha = 2\pi n_\alpha$$

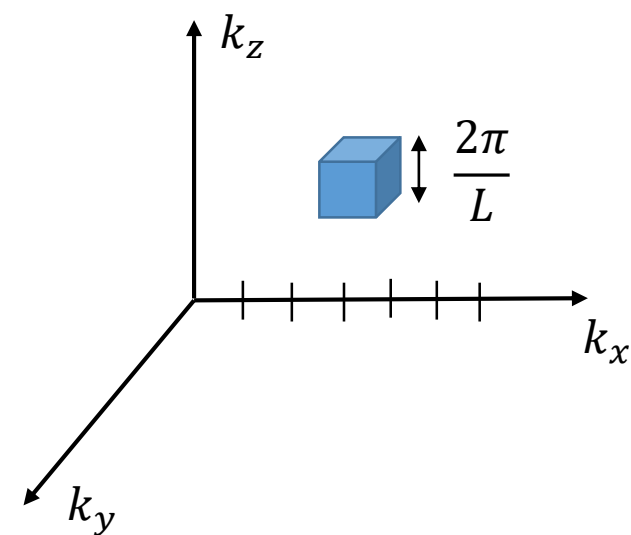
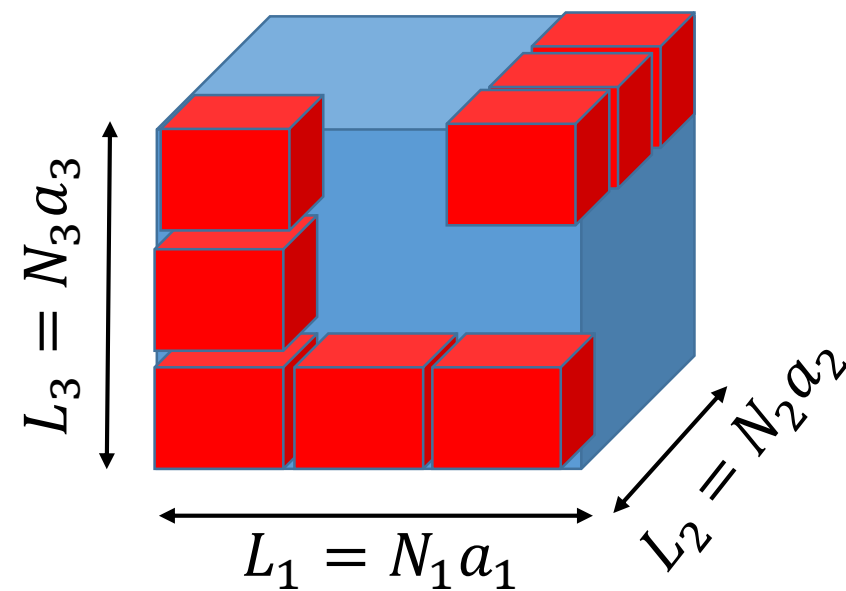
$$\Delta k_\alpha = \frac{2\pi}{L_\alpha}$$

Objętość stanu w przestrzeni  $\mathbf{k}$

$$\Omega_k = \frac{(2\pi)^3}{L_1 L_2 L_3} = \frac{(2\pi)^3}{\Omega}$$

Gęstość stanów w przestrzeni  $\mathbf{k}$

$$\tilde{g}^{3D}(\mathbf{k}) = 2 \frac{1}{\Omega_k} = \frac{2\Omega}{(2\pi)^3} \quad \rightarrow \quad dN^{3D} = \tilde{g}^{3D}(\mathbf{k}) dk_x dk_y dk_z$$



# Funkcja gęstości stanów 3D

Rozważmy elektron w przybliżeniu masy efektywnej w parabolicznym izotropowym pasmie przewodnictwa

$$E(\mathbf{k}) = E_c + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e}$$

Będziemy oznaczać  $m^* = m_{e(h)}$

Liczba stanów o energii mniejszej niż E na objętość dana jest wzorem

$$N^{3D}(\mathbf{k}) = \frac{4}{3}\pi k^3 \frac{\tilde{g}^{3D}(\mathbf{k})}{\Omega} = \frac{k^3}{3\pi^2}$$

Dla rozpatrywanego pasma

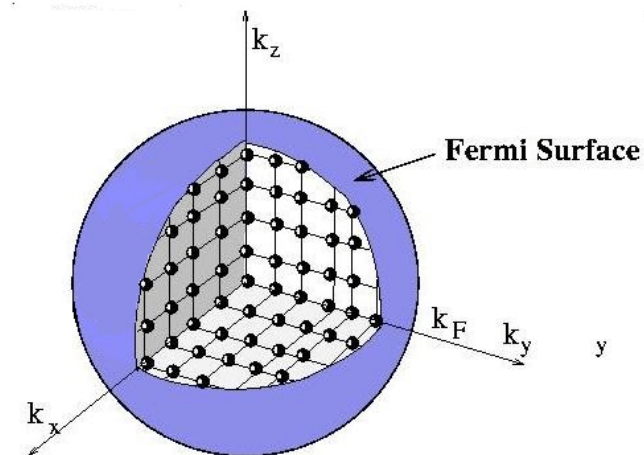
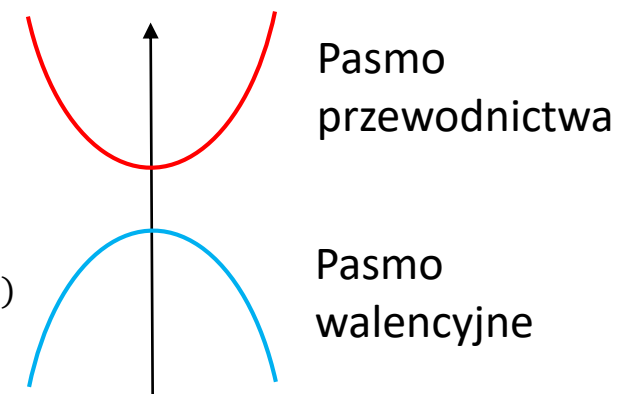
$$k = \frac{1}{\hbar} [2m_e(E - E_c)]^{1/2}$$

$$N^{3D}(E) = \frac{(2m_e)^{3/2}}{3\hbar^3\pi^2} (E - E_c)^{3/2}$$

Ale

$$N^{3D}(E) = \int_0^E g^{3D}(E') dE' \quad \longrightarrow$$

$$g_c^{3D}(E) = \frac{dN^{3D}}{dE}$$



## Funkcja gęstości stanów 3D

Gęstość stanów w pasmie przewodnictwa

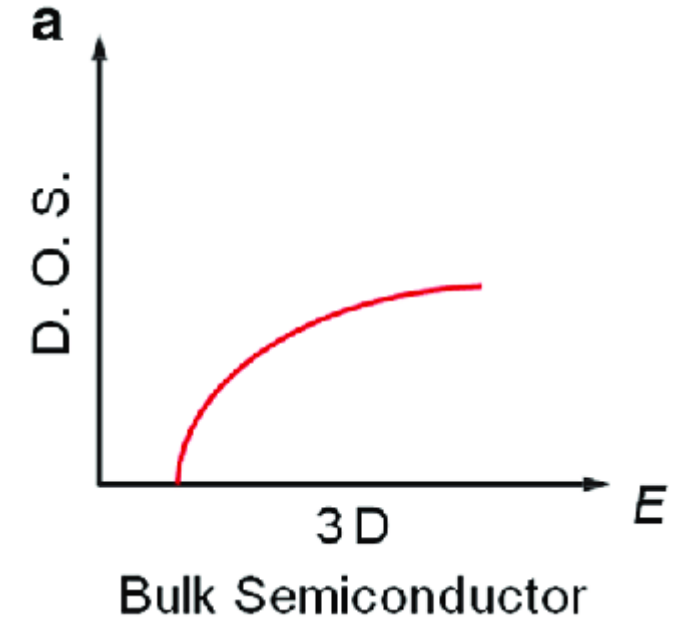
$$g_c^{3D}(E) = \frac{(2m_e)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3} (E - E_c)^{1/2}$$

Gęstość stanów w pasmie walencyjnym

$$E(\mathbf{k}) = E_v - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_h}$$



$$g_v^{3D}(E) = \frac{(2m_h)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3} (E_v - E)^{1/2}$$



Zauważmy, że powyższe wzory zostały wyprowadzone przy założeniu parabolicznego pasma i przybliżeniu masy efektywnej. W bardziej ogólnym przypadku wzór ten nie jest prawdziwy, a gęstość stanów należy policzyć całkując po wektorze falowym i całej strefie Brillouina.

# Funkcja gęstości stanów 2D

Rozpatrzmy układ 2D w postaci prostokąta w wymiarach  $L_1 \times L_2$ .

Objętość stanu w przestrzeni  $\mathbf{k}$

$$\Omega_k = \frac{(2\pi)^2}{L_1 L_2} = \frac{(2\pi)^2}{\Omega}$$

Gęstość stanów w przestrzeni  $\mathbf{k}$

$$\tilde{g}^{2D}(\mathbf{k}) = 2 \frac{1}{\Omega_k} = \frac{2\Omega}{(2\pi)^2}$$

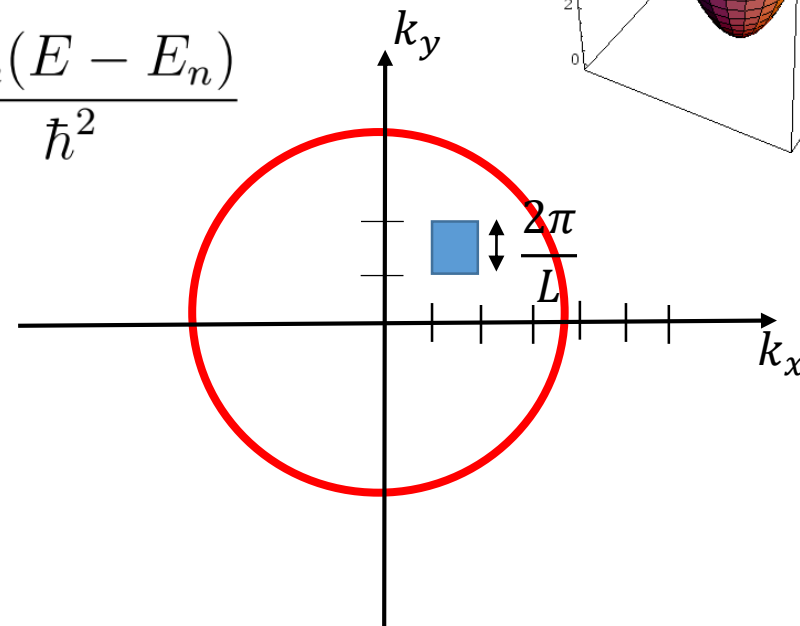
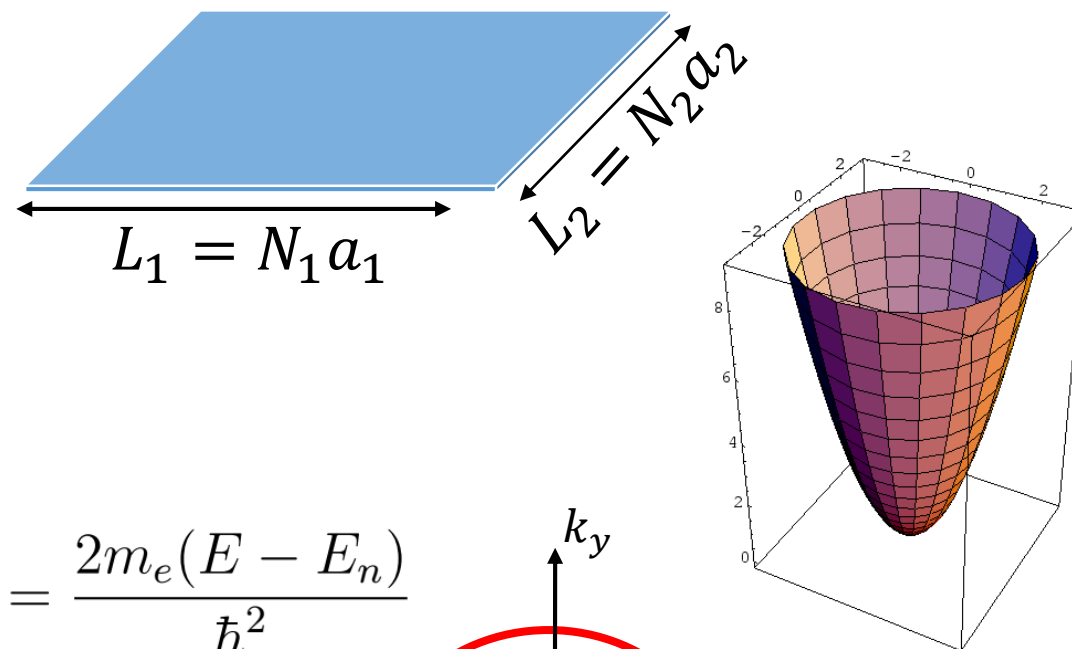
Paraboliczna relacja dyspersji z przesunięciem w energii  $E_n$

$$E(\mathbf{k}) = E_n + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e} \quad \rightarrow \quad k^2 = \frac{2m_e(E - E_n)}{\hbar^2}$$

Liczba stanów o energii mniejszej niż  $E$

$$N^{2D}(\mathbf{k}) = \pi k^2 \frac{\tilde{g}^{2D}(\mathbf{k})}{\Omega} = \frac{k^2}{2\pi}$$

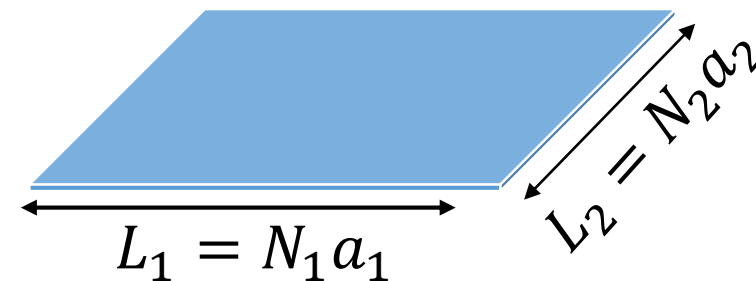
$$N^{2D}(E) = \pi k^2 \frac{\tilde{g}^{2D}(\mathbf{k})}{\Omega} = \frac{2m_e(E - E_n)}{2\pi\hbar^2}$$



## Funkcja gęstości stanów 2D

Gęstość stanu dla układu 2D jest stała

$$g^{2D}(E) = \frac{\partial N^{2D}}{\partial E} = \frac{m_e}{\pi \hbar^2}$$

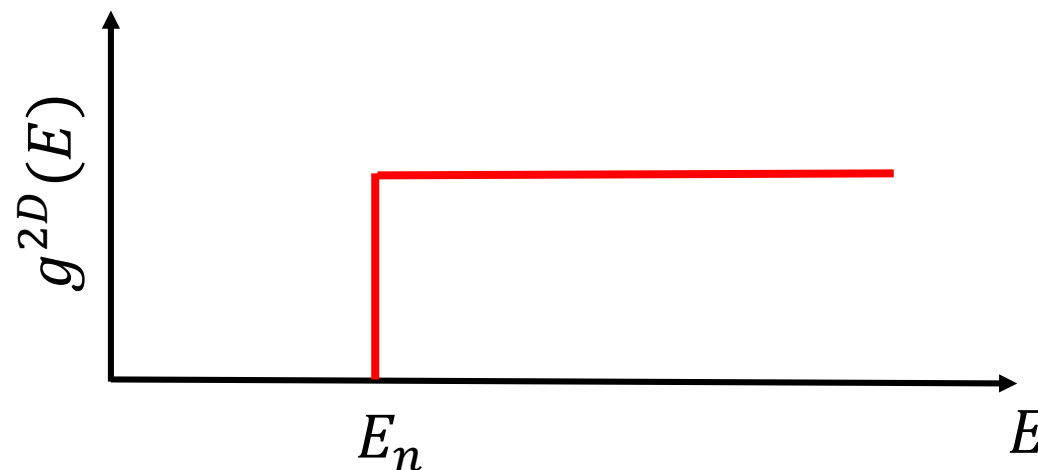


Oczywiście gęstość stanów jest stała dla energii większej od  $E_n$  dlatego lepiej zapisać

$$g^{2D}(E) = \frac{m_e}{\pi \hbar^2} \theta(E - E_n)$$

Gdzie funkcja Heaviside'a

$$\theta(E - E_n) = \begin{cases} 0 & \text{dla } E < E_n \\ 1 & \text{dla } E > E_n \end{cases}$$



# Funkcja gęstości stanów 1D

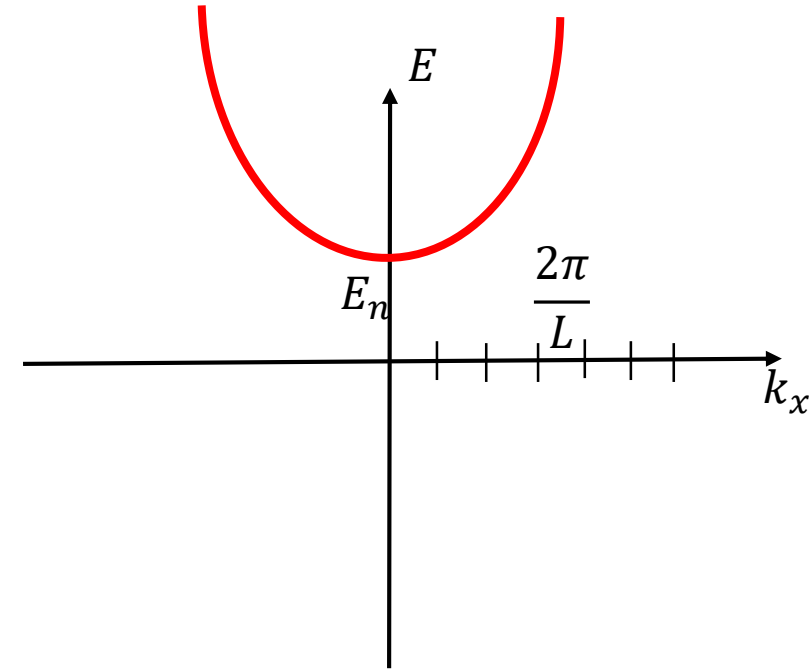
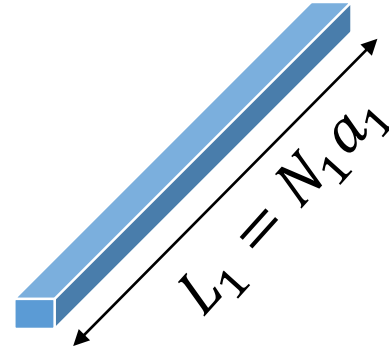
Rozpatrzmy układ 1D w postaci drutu o długości  $L_1$ .

Objętość stanu w przestrzeni  $\mathbf{k}$

$$\Omega_k = \frac{(2\pi)}{L_1} = \frac{(2\pi)}{\Omega}$$

Gęstość stanów w przestrzeni  $\mathbf{k}$

$$\tilde{g}^{1D}(\mathbf{k}) = 2 \frac{1}{\Omega_k} = \frac{2\Omega}{2\pi}$$



Paraboliczna relacja dyspersji z przesunięciem w energii  $E_n$

$$E(\mathbf{k}) = E_n + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e} \quad \rightarrow \quad k = \sqrt{\frac{2m_e(E - E_n)}{\hbar^2}}$$

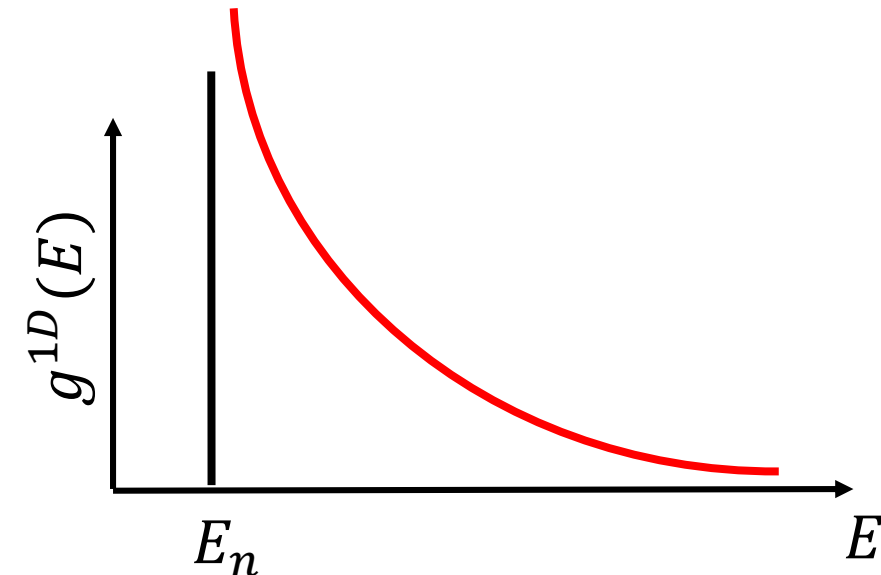
Liczba stanów o energii mniejszej niż  $E$

$$N^{1D}(\mathbf{k}) = 2k \frac{\tilde{g}^{1D}(k)}{\Omega} = \frac{2k}{\pi}$$

$$N^{1D}(E) = 2k \frac{\tilde{g}^{1D}(\mathbf{k})}{\Omega} = \frac{2\sqrt{\frac{2m_e(E - E_n)}{\hbar^2}}}{\pi} = \frac{2}{\pi\hbar} \sqrt{2m_e(E - E_n)}$$

Gęstość stanu dla układu 1D

$$g^{1D}(E) = \frac{\partial N^{1D}}{\partial E} = \frac{1}{\pi\hbar} \left( \frac{2m_e}{E - E_n} \right)^{1/2}$$



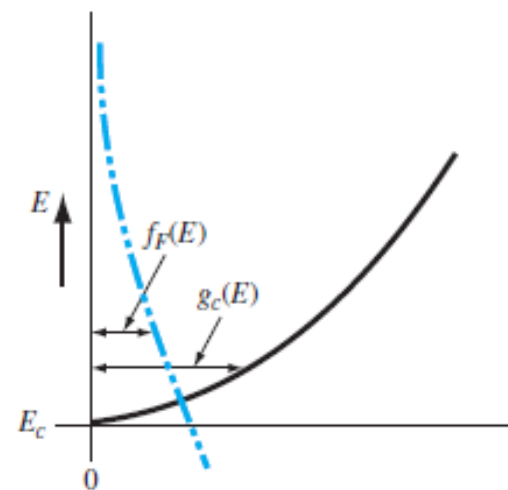
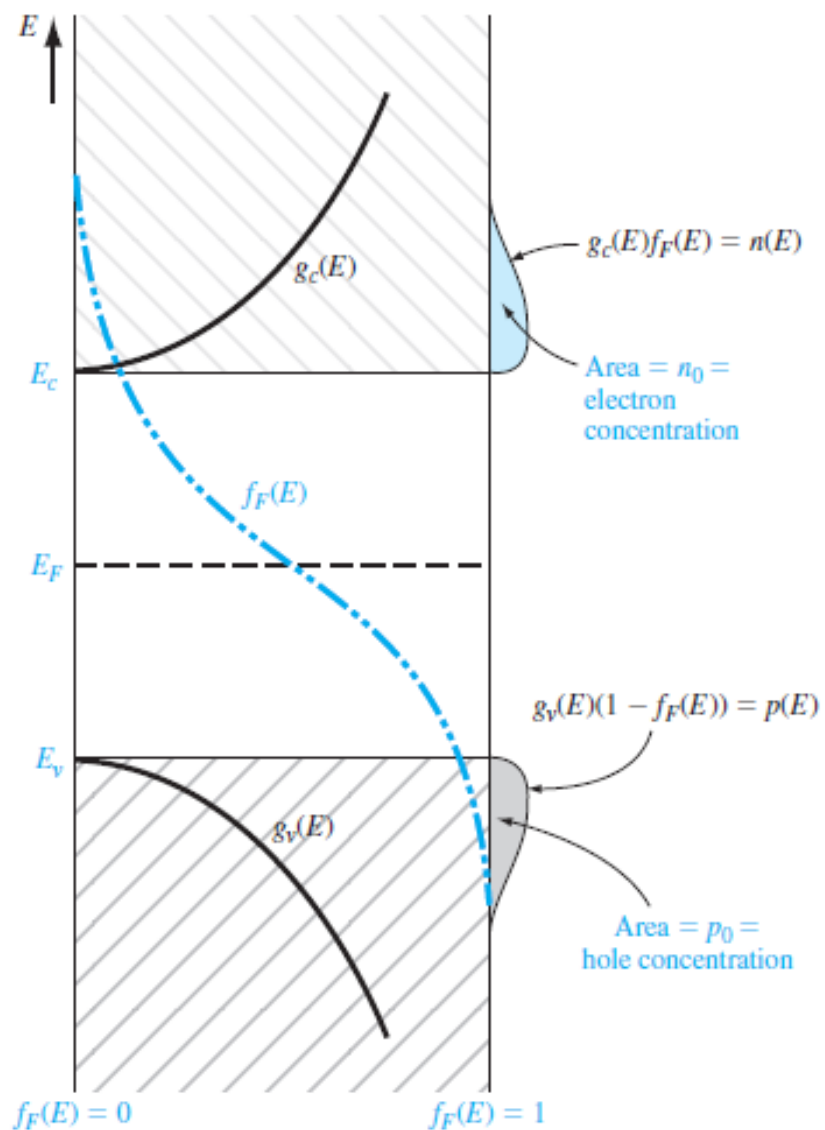
# Koncentracja elektronów i dziur w półprzewodniku

## Kilka uwag na temat stanu równowagi termodynamicznej

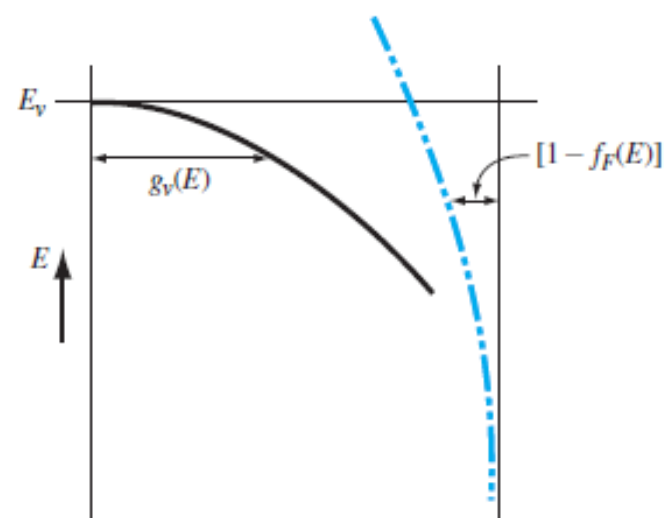
Zajmiemy się obliczaniem koncentracji nośników ładunku w pasmach, czyli liczby elektronów w pasmie przewodnictwa (dziur w pasmie walencyjnym) na jednostkę objętości kryształu. W półprzewodniku samoistnym elektrony (dziury) mogą się pojawiać w pasmie przewodnictwa (walencyjnym) w wyniku wzbudzeń optycznych, wzbudzeń termicznych, lub w wyniku wstrzyknięcia elektronów z elektrody zewnętrznej. Na ogół nośniki ładunku nie znajdują się w stanie równowagi termodynamicznej. Jednak czas rekombinacji elektron-dziura jest o kilka rzędów wielkości dłuższy od typowych czasów relaksacji układu nośników, która zachodzi wskutek oddziaływań z fononami lub domieszkami.

Zanim nastąpi rekombinacja pary elektron-dziura układ nośników ładunku osiąga stan **quasi-równowagi termodynamicznej**. Osiągnięcie przez nośniki ładunku stanu quasi-równowagi termodynamicznej pozwala na stosowanie do opisu własności termodynamicznych układu ładunków równowagowego rozkładu Fermiego-Diraca. W celu zaznaczenia quasi-równowagowego charakteru tego rozkładu wielkość  $\mu = EF$  nazywana jest **quasi-poziomem Fermiego**.

# Koncentracja elektronów i dziur w półprzewodniku



(b)





# Koncentracja elektronów i dziur w półprzewodniku

Rozważmy półprzewodnik bez domieszkowania, którego pasmo przewodnictwa oraz pasmo walencyjne może być opisane przybliżeniem pasma parabolicznego z masą efektywną.

Gęstość elektronów w tym półprzewodniku, w pasmie przewodnictwa, w określonym przedziale energii  $[E_c^{min}, E_c^{max}]$

$$n = \int_{E_c^{min}}^{E_c^{max}} dE g_c(E) f(E),$$

funkcja Fermiego-Diraca  
funkcja gęstości stanów 3D dla pasma przewodnictwa

A zatem koncentracje elektronów w półprzewodniku obliczymy całkując w przedziale  $[E_c, \infty]$  funkcję gęstości stanów 3D obliczoną poprzednio dla parabolicznego pasma przewodnictwa

$$n = \frac{(2m_e)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3} \int_{E_c}^{\infty} dE \frac{(E - E_c)^{1/2}}{e^{\beta(E - E_F)} + 1}$$

# Koncentracja elektronów i dziur w półprzewodniku

W całce dokonujemy zamiany zmiennych

$$x = \beta(E - E_c)$$

$$\zeta = \beta(E_F - E_c)$$

Co prowadzi do wyrażenia

$$n = \frac{(2m_e k_B T)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} \Phi_{1/2}(\zeta)$$

**Całka Fermiego-Diraca rzędu 1/2. Wartość całki Fermiego-Diraca możemy znaleźć w tablicach całek lub obliczyć ją numerycznie**

gdzie

$$\Phi_{1/2}(\zeta) \stackrel{def}{=} \int_0^{\infty} dx \frac{x^{1/2}}{e^{x-\zeta} + 1}$$

Stąd ostatecznie koncentracje możemy zapisać jako

$$n = N_c \Phi_{1/2}(\zeta)$$

gdzie

$$N_c = \frac{(2m_e k_B T)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3}$$

## Koncentracja elektronów i dziur w półprzewodniku

Koncentrację dziur w pasmie walencyjnym w półprzewodniku niezdegenerowanym oznaczamy symbolem  $p$ . Wyprowadzenie wzoru na koncentrację dziur przebiega podobnie jak dla elektronów.

$$p = \frac{(2m_h)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3} \int_{-\infty}^{E_v} (E_v - E)^{1/2} \left( 1 - \frac{1}{\exp[\beta(E - E_F)] + 1} \right) dE$$

$$p = \frac{(2m_h)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3} \int_{-\infty}^{E_v} (E_v - E)^{1/2} \frac{dE}{\exp[\beta(E_F - E)] + 1}$$

Wprowadzamy zmienne

$$x = \beta(E_v - E)$$

$$\xi = \beta(E_F - E_v)$$

Otrzymujemy

$$p = N_v \Phi_{1/2}(\xi)$$

$$N_v = \frac{(2m_h k_B T)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3}$$

# Koncentracja elektronów i dziur w półprzewodniku niezdegenerowanym

Rozważmy przypadek półprzewodnika niezdegenerowanego

$$E - E_F \gg k_B T$$

Wówczas rozkład Fermiego-Diraca da się przybliżyć rozkładem Boltzmann'a. Wówczas również całkę Fermiego-Diraca występującą we wcześniejszych wzorach da się przybliżyć jako

$$\Phi_{1/2}(\zeta) \simeq e^\zeta \int_0^\infty dx x^{1/2} e^{-x}$$

$$\Phi_{1/2}(\zeta) \simeq \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^\zeta$$

Funkcja gamma. Ta całka wynosi:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Definiujemy **efektywną gęstość elektronów w pasmie przewodnictwa** jako

$$\tilde{N}_c = \frac{\sqrt{\pi}}{2} N_c = \frac{\sqrt{\pi} (2m_e k_B T)^{3/2}}{2 \pi^2 \hbar^3} = 2 \left( \frac{m_e k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2}$$

$$n = \tilde{N}_c e^\zeta = \tilde{N}_c e^{\beta(E_F - E_c)}$$

# Koncentracja elektronów i dziur w półprzewodniku niezdegenerowanym

Rozważmy przypadek półprzewodnika niezdegenerowanego

$$E - E_F \gg k_B T$$

Wówczas rozkład Fermiego-Diraca da się przybliżyć rozkładem Boltzmann'a. Wówczas również całkę Fermiego-Diraca występującą we wcześniejszych wzorach da się przybliżyć jako

$$\Phi_{1/2}(\zeta) \simeq e^\zeta \int_0^\infty dx x^{1/2} e^{-x}$$

$$\Phi_{1/2}(\zeta) \simeq \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^\zeta$$

Funkcja gamma. Ta całka wynosi:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Definiujemy **efektywną gęstość dziur w pasmie walencyjnym** jako

$$\tilde{N}_v = \frac{\sqrt{\pi}}{2} N_v = \frac{\sqrt{\pi} (2m_h k_B T)^{3/2}}{2 \pi^2 \hbar^3} = 2 \left( \frac{m_h k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2}$$

$$p = \tilde{N}_v e^\zeta = \tilde{N}_v e^{\beta(E_v - E_F)}$$

# Koncentracja elektronów i dziur w półprzewodniku niezdegenerowanym

Podsumowując, w półprzewodniku niezdegenerowanym koncentracja elektronów i dziur dana jest wzorem

$$n = \tilde{N}_c e^{\zeta} = \tilde{N}_c e^{\beta(E_F - E_c)}$$

$$p = \tilde{N}_v e^{\zeta} = \tilde{N}_v e^{\beta(E_v - E_F)}$$

Proszę zwrócić uwagę na założenie izotropowego pasma parabolicznego. W Si i Ge występują pasma nieparaboliczne, a przy tym pasmo walencyjne składa się z pasma dziur lekkich i ciężkich, czego również nie uwzględniliśmy.

Przykładowe wartości

	$\tilde{N}_c (cm^{-3})$	$\tilde{N}_v (cm^{-3})$	$m_e/m_0$	$m_p/m_0$
Si	$2.8 \times 10^{19}$	$1.04 \times 10^{19}$	1.08	0.56
GaAs	$4.7 \times 10^{17}$	$7.0 \times 10^{18}$	0.067	0.48
Ge	$1.04 \times 10^{19}$	$6.0 \times 10^{18}$	0.55	0.37

# Prawo działa mas. Półprzewodnik samoistny.

Pomnóżmy koncentracje elektronów i dziur

$$np = \tilde{N}_c \tilde{N}_v e^{\beta(E_v - E_F)} e^{\beta(E_F - E_c)} = \tilde{N}_c \tilde{N}_v e^{-\beta(E_c - E_v)} = \tilde{N}_c \tilde{N}_v e^{-\beta E_g}$$

$$np = \tilde{N}_c \tilde{N}_v e^{-\beta E_g} = n_i^2$$

**Prawo działania mas** - w półprzewodniku niezdegenerowanym iloczyn koncentracji dziur i elektronów jest stały w danej temperaturze.

W półprzewodniku samoistnym elektrony w pasmie przewodnictwa oraz dziury w pasmie walencyjnym powstają na skutek przejścia przez przerwę (np. wzbudzenie termiczne). A zatem liczba elektronów w pasmie przewodnictwa jest równa liczbie dziur w pasmie walencyjnym  $n = p = n_i$

$$n = p = n_i = (\tilde{N}_c \tilde{N}_v)^{1/2} e^{-\beta \frac{E_g}{2}} = 2 \left( \frac{k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} (m_e m_h)^{3/4} e^{-\frac{E_g}{2k_B T}}$$

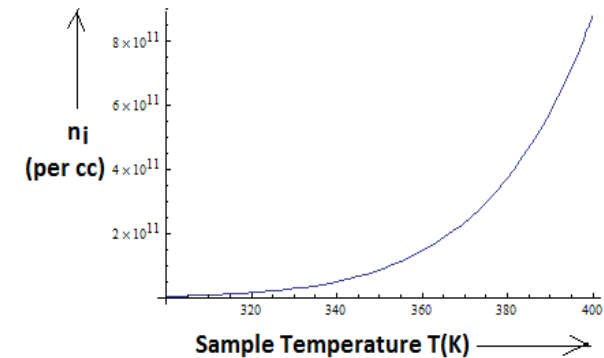


Figure 2.2.26. Exponential rise in Intrinsic Concentration of Si with the Sample Temperature.

# Energia Fermiego w półprzewodniku samoistnym

W półprzewodniku samoistnym, z równości koncentracji dziur i elektronów wynika

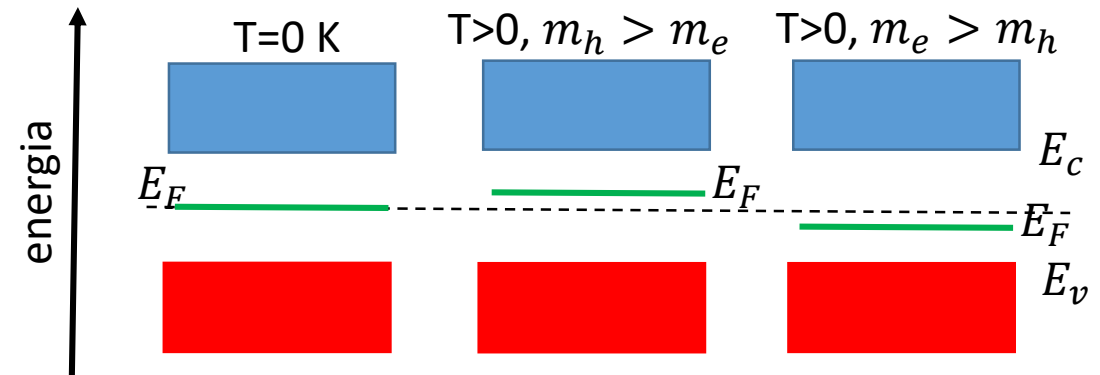
$$n = p$$

$$\tilde{N}_c e^{\beta(E_{Fi} - E_c)} = \tilde{N}_v e^{\beta(E_v - E_{Fi})}$$

$$2 \left( \frac{m_e k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} e^{\beta(E_{Fi} - E_c)} = 2 \left( \frac{m_h k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} e^{\beta(E_v - E_{Fi})}$$

Energia Fermiego dla półprzewodnika samoistnego

$$E_{Fi} = E_v + \frac{1}{2} E_g + \frac{3}{4} k_B T \ln \left( \frac{m_h}{m_e} \right)$$



W zerowej temperaturze energia Fermiego położona jest dokładnie w połowie przerwy energetycznej.

Dla  $T > 0$  odchylenie od tej pozycji związane jest z wzajemną relacją pomiędzy masą efektywną dziury i elektronu.



# Koncentracja elektronów i dziur w półprzewodniku domieszkowanym

Koncentracje elektronów i dziur w półprzewodniku domieszkowanym możemy wyprowadzić z wzorów ogólnych

$$n = \tilde{N}_c e^{\zeta} = \tilde{N}_c e^{\beta(E_F - E_c)}$$

$$p = \tilde{N}_v e^{\zeta} = \tilde{N}_v e^{\beta(E_v - E_F)}$$

$$\frac{n}{p} = e^{2\beta(E_F - E_{Fi})}$$

dokonując pewnych przekształceń

$$n = \tilde{N}_c e^{\beta(E_F - E_{Fi} + E_{Fi} - E_c)} = n_i e^{\beta(E_F - E_{Fi})}$$

$$p = \tilde{N}_v e^{\beta(E_v - E_{Fi} + E_{Fi} - E_F)} = p_i e^{\beta(E_{Fi} - E_F)}$$

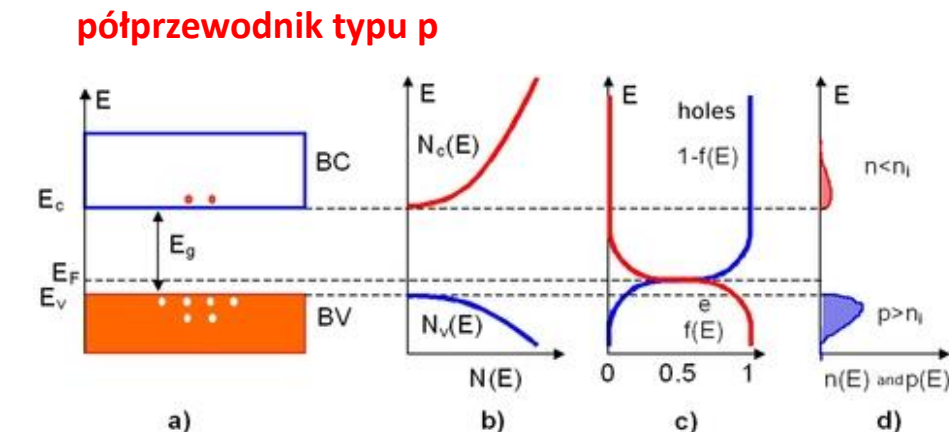
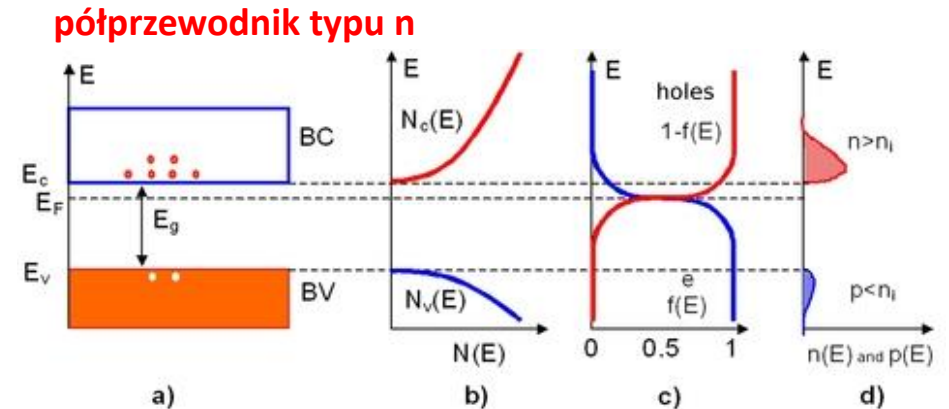
energia Fermiego dla  
półprzewodnika  
samoistnego

energia Fermiego

koncentracja nośników  
w półprzewodniku  
samoistnym

Prawo działania mas nie zależy od domieszkowania  
**i nadal obowiązuje**

$$np = \tilde{N}_c \tilde{N}_v e^{-\beta E_g} = n_i^2$$

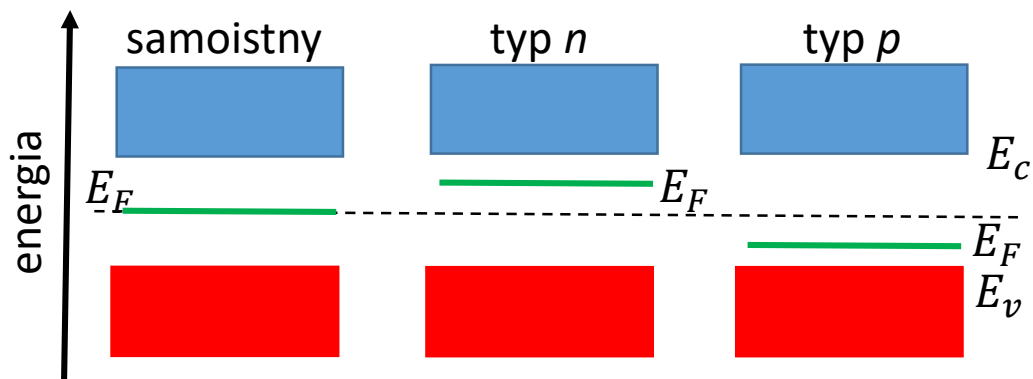


# Koncentracja elektronów i dziur w półprzewodniku domieszkowanym

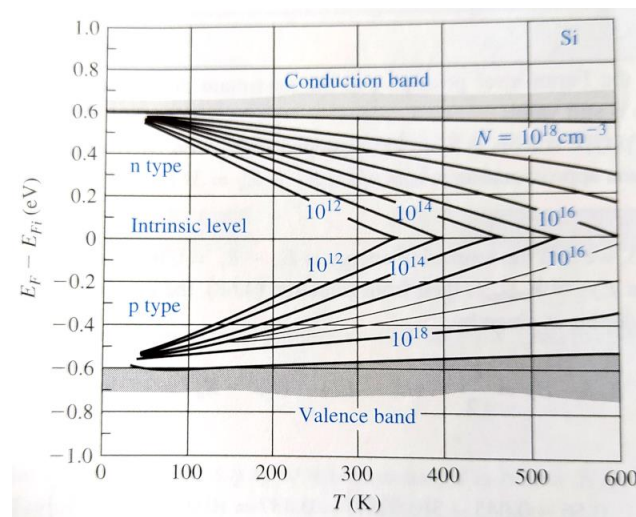
Z poprzednich równań możemy wyznaczyć wzory na energię Fermiego

$$E_F = E_{Fi} + k_B T \ln \left( \frac{n}{n_i} \right) \qquad E_F = E_{Fi} - k_B T \ln \left( \frac{p}{n_i} \right)$$

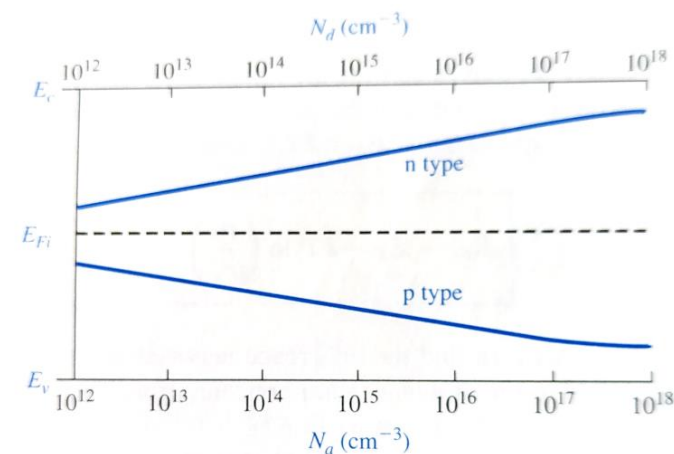
Położenie poziomu Fermiego w półprzewodniku domieszkowanym zależy od koncentracji domieszek, temperatury. Zauważmy jednak, że zależności nie są takie proste ponieważ  $n(N_d, N_a, T)$ ,  $p(N_d, N_a, T)$  oraz  $n_i(T)$



półprzewodnik typ  $n$ ,  $E_F > E_{Fi}$   
 półprzewodnik typ  $p$ ,  $E_F < E_{Fi}$



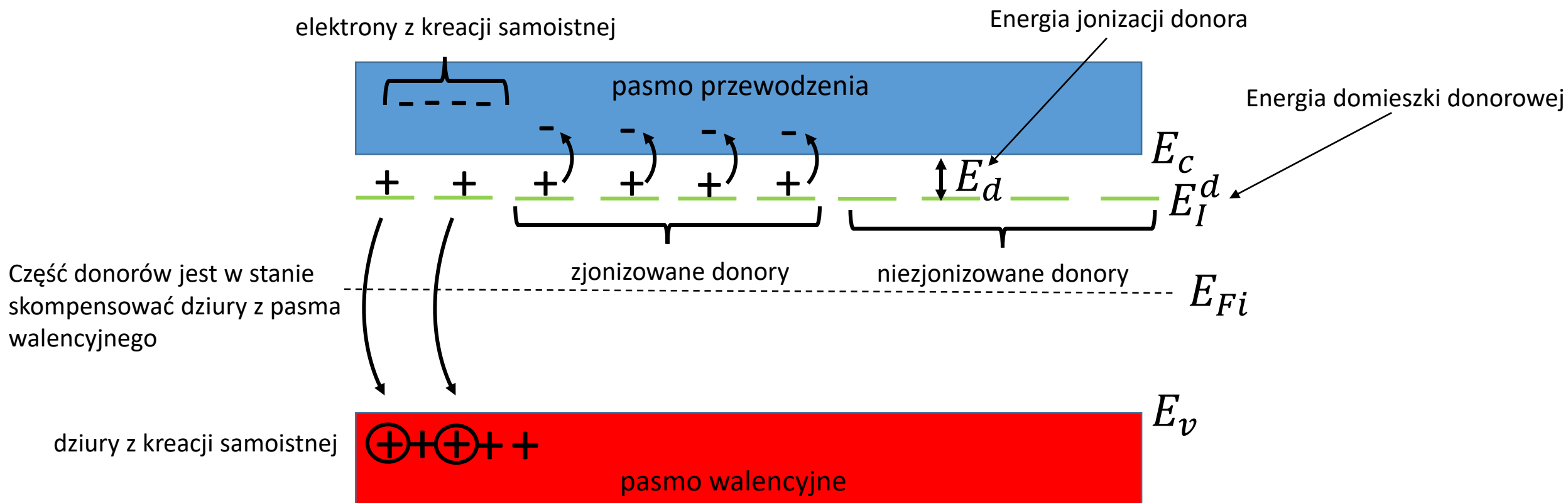
Poziom Fermiego w funkcji  $T$  dla różnych domieszkowań



Poziom Fermiego w funkcji domieszkowania

## Koncentracja nośników w półprzewodniku niezdegenerowanym typu $n$

Dla uproszczenia zakładamy, że w półprzewodniku istnieją tylko domieszki donorowe o koncentracji  $N_d$ , przy czym zakładamy, że tworzą one jeden stan donorowy (półprzewodnik niezdegenerowany). Domieszki te zawierają jeden elektron walencyjny o małej energii jonizacji, który może zostać przeniesiony do pasma przewodnictwa. Oczywiście koncentracja elektronów w pasmie przewodnictwa zależy od koncentracji zjonizowanych domieszek donorowych oraz samoistnej kreacji par elektron-dziura w niezerowej temperaturze.

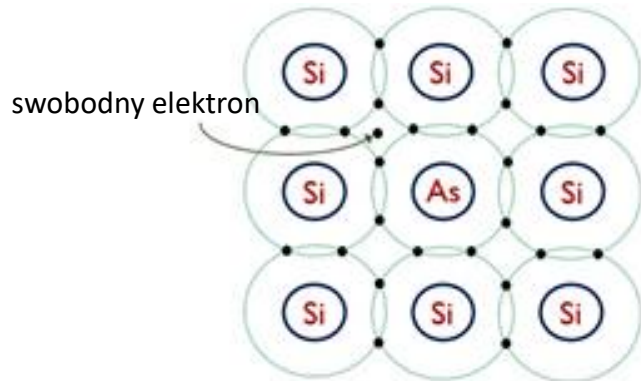


# Prawdopodobieństwo jonizacji domieszki donorowej

Prawdopodobieństwo obsadzenia stanu donorowego możemy obliczyć używając dużego rozkładu kanonicznego. Prawdopodobieństwo, że stan donorowy jest obsadzony  $n_{\uparrow}$  elektronami o spinie up i  $n_{\downarrow}$  elektronami o spinie down, gdzie  $n_{\uparrow}, n_{\downarrow} = 0$  lub 1 (zakaz Pauliego) dane jest

$$P(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}) = C e^{\beta[(n_{\uparrow} + n_{\downarrow})E_F - E_I(n_{\uparrow}, n_{\downarrow})]}$$

Energia domieszki donorowej lub akceptorowej, która zależy od obsadzenia



Prawdopodobieństwo obsadzenia stanu donorowego przez jeden elektron

$$P_1 = \frac{P(0, 1) + P(1, 0)}{P(0, 0) + P(1, 0) + P(0, 1)}$$

Prawdopodobieństwo obsadzenia stanu donorowego przez jeden elektron (zakładamy energie odniesienia  $E_I^d(0,0) = 0$ )

$$P_1 = \frac{2e^{\beta(E_F - E_I^d)}}{1 + 2e^{\beta(E_F - E_I^d)}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}e^{\beta(E_I^d - E_F)}}$$

Czyli prawdopodobieństwo jonizacji domieszki donorowej

$$1 - P_1 = \frac{\frac{1}{2}e^{\beta(E_I^d - E_F)}}{1 + \frac{1}{2}e^{\beta(E_I^d - E_F)}} = \frac{1}{1 + 2e^{\beta(E_F - E_I^d)}}$$

## Koncentracja nośników w półprzewodniku niezdegenerowanym typu $n$

Koncentracja zjonizowanych donorów

$$N_d^+ = N_d(1 - P_1) = \frac{N_d}{1 + 2e^{\beta(E_F - E_I^d)}}$$

Koncentracje elektronów w półprzewodniku z  $N_d$  domieszkami donorowymi możemy wyznaczyć z warunku neutralności ładunkowej

$$n = p + N_d^+$$

$$n = \frac{n_i^2}{n} + N_d^+$$

Rozważmy przypadek graniczny

$$E_I^d - E_F \gg k_B T \quad \text{wówczas wszystkie domieszki są zjonizowane} \quad \underline{N_d^+ \approx N_d}$$

$$n = \frac{n_i^2}{n} + N_d$$

$$n = \frac{1}{2} [N_d + (N_d^2 + 4n_i^2)^{1/2}]$$

## Koncentracja nośników w półprzewodniku niezdegenerowanym typu $n$

Koncentracja zjonizowanych donorów

$$N_d^+ = N_d(1 - P_1) = \frac{N_d}{1 + 2e^{\beta(E_F - E_I^d)}}$$

Koncentracje elektronów w półprzewodniku z  $N_d$  domieszkami donorowymi możemy wyznaczyć z warunku neutralności ładunkowej

$$n = p + N_d^+$$

$$n = \frac{n_i^2}{n} + N_d^+$$

W ogólnym przypadku

$$E_I^d = E_c - E_d$$

energia jonizacji donora

$$n = \frac{n_i^2}{n} + \frac{N_d}{1 + 2e^{\beta(E_F - E_c + E_d)}}$$

wykorzystując

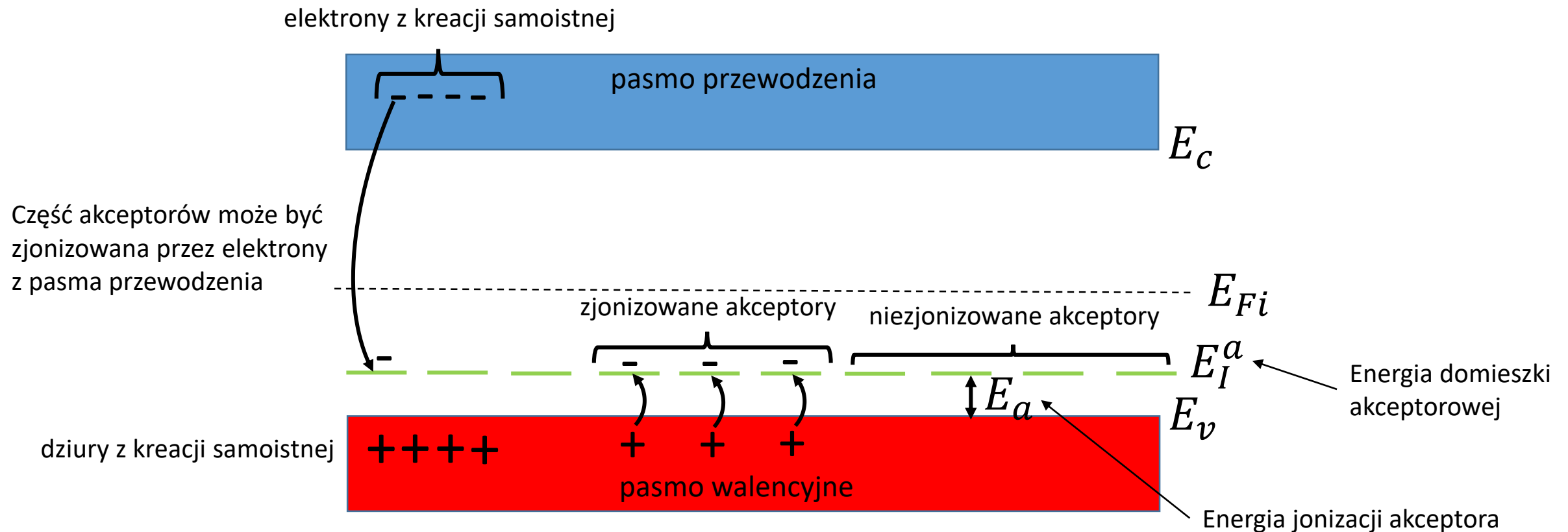
$$n = \tilde{N}_c e^{\beta(E_F - E_c)}$$

mamy

$$n = \frac{n_i^2}{n} + \frac{N_d}{1 + 2 \frac{n}{\tilde{N}_c} e^{\beta E_d}}$$

## Koncentracja nośników w półprzewodniku niezdegenerowanym typu $p$

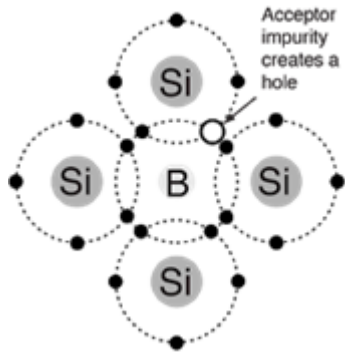
Dla uproszczenia zakładamy, że w półprzewodniku istnieją tylko domieszki akceptorowe o koncentracji  $N_a$ , przy czym zakładamy, że tworzą one jeden stan akceptorowy (półprzewodnik niezdegenerowany). Domieszki te posiadają jeden nieobsadzony stan elektronowy. Oczywiście koncentracja dziur w pasmie walencyjnym zależy od koncentracji zjonizowanych domieszek akceptorowych oraz samoistnej kreacji par elektron-dziura w niezerowej temperaturze.



## Prawdopodobieństwo jonizacji domieszki akceptorowej

Prawdopodobieństwo obsadzenia stanu akceptorowego możemy obliczyć używając dużego rozkładu kanonicznego. Zauważmy jednak, że stan akceptorowy jest  $g = 2$  razy zdegenerowany (pasmo dziur lekkich i ciężkich).

Prawdopodobieństwo, że stan akceptorowy jest obsadzony  $n_{l,\uparrow}$  elektronami o spinie up w pasmie dziur lekkich,  $n_{l,\downarrow}$  elektronami o spinie down w pasmie dziur lekkich oraz  $n_{h,\uparrow}$  elektronami o spinie up w pasmie dziur ciężkich,  $n_{h,\downarrow}$  elektronami o spinie down w pasmie dziur ciężkich, gdzie  $n_{\uparrow}, n_{\downarrow} = 0$  lub 1 (zakaz Pauliego) dane jest



$$P(n_{l,\uparrow}, n_{l,\downarrow}, n_{h,\uparrow}, n_{h,\downarrow}) = C e^{\beta[(n_{l,\uparrow} + n_{l,\downarrow} + n_{h,\uparrow} + n_{h,\downarrow})E_F - E_I^a]}$$

Prawdopodobieństwo obsadzenia stanu donorowego przez jeden elektron (zakładamy energie odniesienia  $E_I^a(0,0,0,0) = 0$ )

$$P_1 = \frac{P(0, 0, 0, 1) + P(0, 0, 1, 0) + P(0, 1, 0, 0) + P(1, 0, 0, 0)}{P(0, 0, 0, 0) + P(0, 0, 0, 1) + P(0, 0, 1, 0) + P(0, 1, 0, 0) + P(1, 0, 0, 0)}$$

Prawdopodobieństwo obsadzenia stanu akceptorowego przez jeden elektron

$$P_1 = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}e^{\beta(E_F - E_I^a)}}$$

Czyli prawdopodobieństwo jonizacji domieszki akceptorowej

$$1 - P_1 = \frac{1}{1 + 4e^{\beta(E_I^a - E_F)}}$$



## Koncentracja nośników w półprzewodniku niezdegenerowanym typu $p$

Koncentracja zjonizowanych akceptorów

$$N_a^- = N_a(1 - P_1) = \frac{N_a}{1 + 4e^{\beta(E_I^a - E_F)}}$$

Koncentracje elektronów w półprzewodniku z  $N_a$  domieszkami akceptorowymi możemy wyznaczyć z warunku neutralności ładunkowej

$$n + N_a^- = p$$

$$\frac{n_i^2}{p} + N_a^- = p$$

Rozważmy przypadek graniczny

$$E_F - E_I^a \gg k_B T \quad \text{wówczas wszystkie domieszki są zjonizowane} \quad \underline{N_a^- \approx N_a}$$

$$\frac{n_i^2}{p} + N_a = p$$

$$p = \frac{1}{2} [N_a + (N_a^2 + 4n_i^2)^{1/2}]$$

## Koncentracja nośników w półprzewodniku niezdegenerowanym typu $p$

Koncentracja zjonizowanych akceptorów

$$N_a^- = N_a(1 - P_1) = \frac{N_a}{1 + 4e^{\beta(E_I^a - E_F)}}$$

Koncentracje elektronów w półprzewodniku z  $N_a$  domieszkami akceptorowymi możemy wyznaczyć z warunku neutralności ładunkowej

$$n + N_a^- = p$$

$$\frac{n_i^2}{p} + N_a^- = p$$

W ogólnym przypadku

$$E_I^a = E_v + E_a \longrightarrow \text{energia jonizacji akceptora}$$

Korzystając z

$$p = \tilde{N}_v e^{\beta(E_v - E_F)} \rightarrow$$

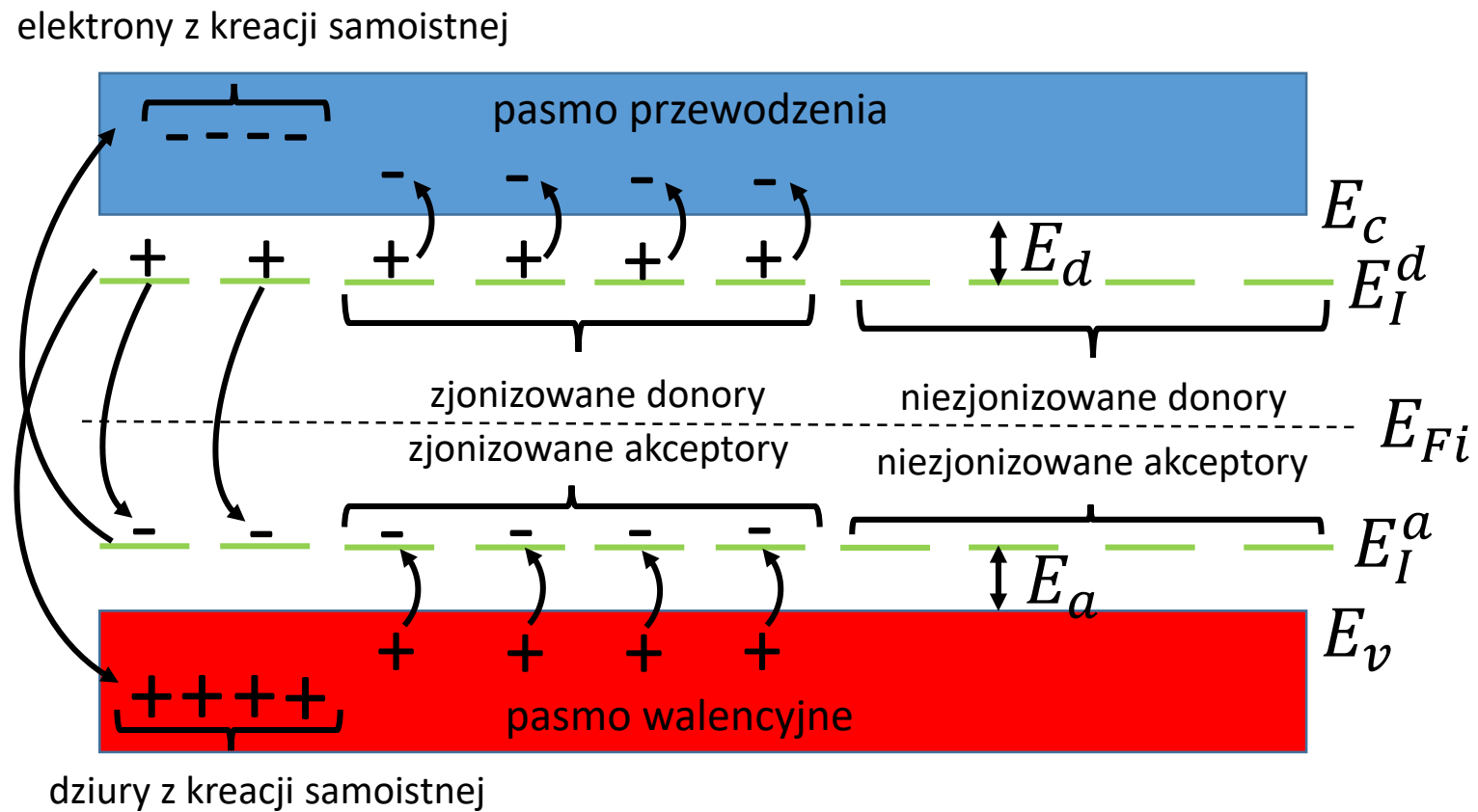
$$p = \frac{n_i^2}{p} + \frac{N_a}{1 + 4 \frac{p}{\tilde{N}_v} e^{\beta E_a}}$$

# Koncentracja nośników w półprzewodniku domieszkowanym

Zakładamy, że w półprzewodniku istnieją domieszki donorowe o koncentracji  $N_d$  i domieszki akceptorowe o koncentracji  $N_a$ . Półprzewodnikiem skompensowanym nazywamy półprzewodnik, który w jednym obszarze zawiera domieszki

zarówno typu  $n$  jak i typu  $p$ . Wówczas można zdefiniować parametr, który nazywamy stopniem kompensacji  $\kappa = \frac{N_a}{N_d}$

Jeżeli  $\kappa = 1$ , to mówimy, że półprzewodnik jest **skompensowany**



# Koncentracja nośników w półprzewodniku domieszkowanym

Koncentracje elektronów w półprzewodniku możemy wyznaczyć z warunku neutralności ładunkowej

$$n + N_a^- = p + N_d^+$$

$$n + \frac{N_a}{1 + 4e^{\beta(E_I^a - E_F)}} = p + \frac{N_d}{1 + 2e^{\beta(E_F - E_I^d)}}$$

Jeżeli założymy, że wszystkie domieszki są zjonizowane  $N_d^+ \approx N_d$  oraz  $N_a^- \approx N_a$

$$n + N_a = p + N_d$$

$$n + N_a = \frac{n_i^2}{n} + N_d$$

$$\frac{n_i^2}{p} + N_a = p + N_d$$

$$n^2 - (N_d - N_a)n - n_i^2 = 0$$

$$p^2 - (N_a - N_d)p - n_i^2 = 0$$

$$n = \frac{N_d - N_a}{2} + \sqrt{\left(\frac{N_d - N_a}{2}\right)^2 + n_i^2}$$

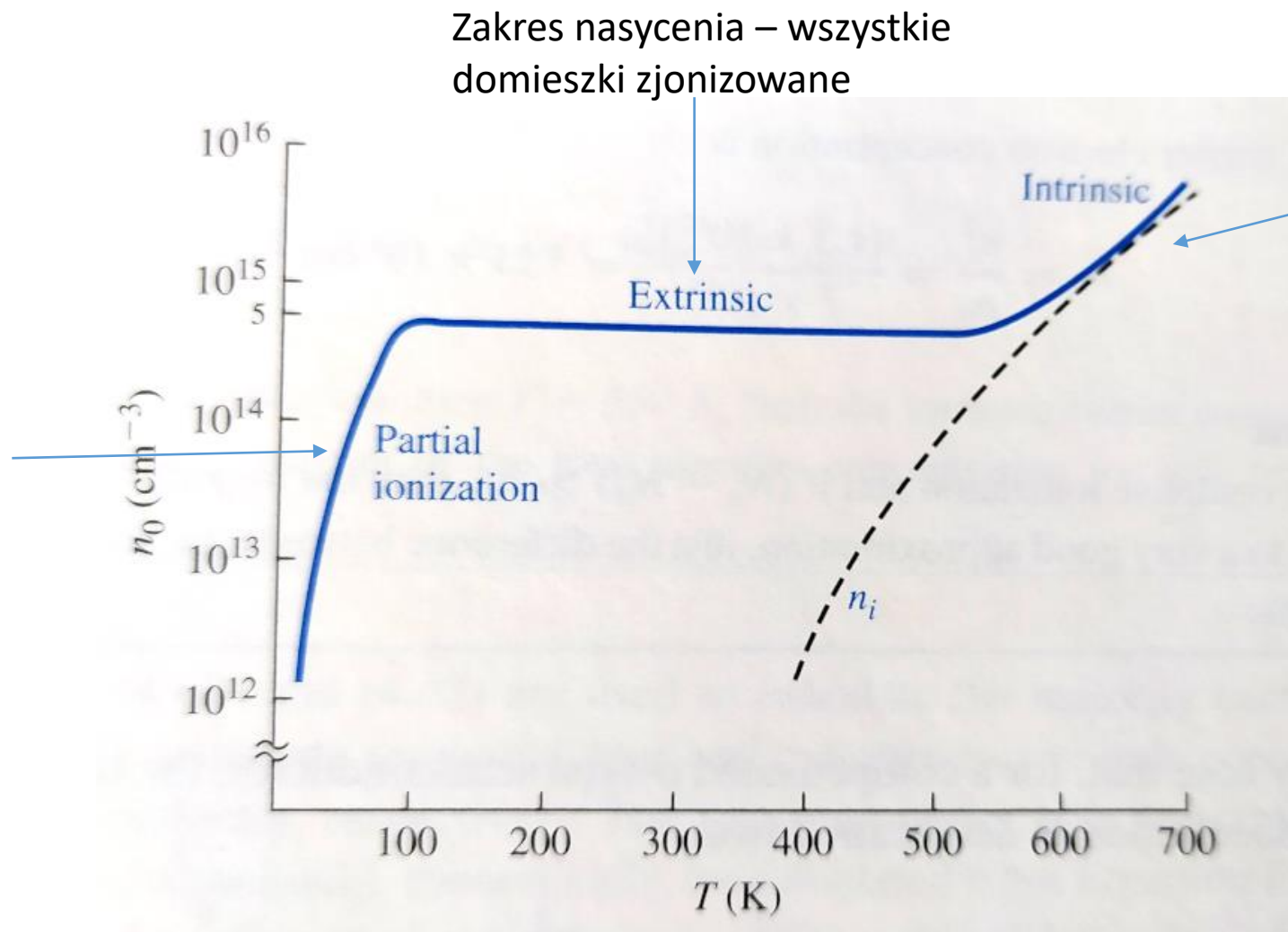
$$p = \frac{N_a - N_d}{2} + \sqrt{\left(\frac{N_a - N_d}{2}\right)^2 + n_i^2}$$

typ n,  $N_d > N_a$

typ p,  $N_a > N_d$

# Koncentracja nośników w półprzewodniku domieszkowanym

Zakres jonizacji domieszek



Zakres nasycenia – wszystkie domieszki zjonizowane

Zakres termicznej samoistnej kreacji par elektron-dziura

## Najważniejsze informacje z wykładu - podsumowanie

- Własności elektryczne materiałów półprzewodnikowych silnie zależą od rodzaju i stopnia domieszkowania. Wyróżniamy dwa rodzaje domieszek: donory, o większej walencyjności oraz akceptory o mniejszej walencyjności, w stosunku do atomów materiału macierzystego.
- Poziomy domieszek dla półprzewodnika niezdegenerowanego można obliczyć w przybliżeniu masy efektywnej oraz modelu wodoropodobnego. Wówczas energie stanów domieszkowych wyrażone są wzorem analogicznym do wzoru na poziomy energetyczne atomu wodoru, w którym masę zastępujemy masą efektywną oraz uwzględniamy stałą dielektryczną półprzewodnika.
- Rozkład Fermiego-Diraca opisuje prawdopodobieństwo obsadzenia stanu o energii  $E$  dla cząstek o spinie połówkowych, które obowiązuje zakaz Pauliego .
- Gęstość stanów w materiałach półprzewodnikowych w przybliżeniu masy efektywnej:  
 $g^{3D}(E) \sim \sqrt{E}$ ,  $g^{2D}(E) \sim \text{const}$ ,  $g^{1D}(E) \sim 1/\sqrt{E}$
- Koncentracja elektronów i dziur w półprzewodniku

$$n = \frac{(2m_e)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3} \int_{E_c}^{\infty} dE \frac{(E - E_c)^{1/2}}{e^{\beta(E - E_F)} + 1}$$

$$p = \frac{(2m_h)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3} \int_{-\infty}^{E_v} (E_v - E)^{1/2} \frac{dE}{\exp[\beta(E_F - E)] + 1}$$

## Najważniejsze informacje z wykładu - podsumowanie

- Prawo działania mas.

$$np = \tilde{N}_c \tilde{N}_v e^{-\beta E_g} = n_i^2$$

- Prawdopodobieństwo jonizacji domieszki, której stopień degeneracji wynosi  $g$  dane jest wzorem

$$N_d^+ = \frac{N_d}{1 + g e^{\beta(E_F - E_I^d)}} \quad N_a^+ = \frac{N_a}{1 + g e^{\beta(E_I^a - E_F)}}$$

- Koncentracje nośników oraz poziom energii Fermiego w półprzewodnikach domieszkowanych obliczamy z warunku neutralności ładunkowej uwzględniając jonizację domieszek oraz samoistną kreację par elektron-dziura.

