

## WYKŁAD 10: TRANSFORMATY CAŁKOWE

### SZEREG FOURIERA

#### Definicja

Mówimy, że funkcja  $f(x)$  spełnia warunki Dirichleta, gdy

- a) dziedzinę funkcji  $f(x)$  można rozłożyć na skończoną sumę przedziałów, w których  $f(x)$  jest monotoniczna i ciągła,
- b) w każdym punkcie nieciągłości  $x_0$ , granice jednostronne  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  oraz  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  są skończone.

#### Definicja

Niech funkcja  $f(x)$  będzie funkcją całkowalną w przedziale  $[-L, L]$ . Szeregiem trygonometrycznym Fouriera funkcji  $f(x)$  nazywamy szereg w postaci

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) + b_n \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right),$$

gdzie

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx, \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx. \end{aligned}$$

**UWAGA.** Zauważmy, że:

- a) jeżeli  $f(x)$  jest funkcją parzystą, tzn.  $f(-x) = f(x)$ , to  $b_n = 0$  oraz  $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx$ ,
- b) jeżeli  $f(x)$  jest funkcją nieparzystą, tzn.  $f(-x) = -f(x)$ , to  $a_n = 0$  oraz  $b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx$ .

### Twierdzenie Dirichleta

Jeżeli funkcja  $f(x)$  spełnia warunki Dirichleta w przedziale  $[-L, L]$ , to szereg Fouriera funkcji  $f(x)$  jest zbieżny do tej funkcji, tzn.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) + b_n \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right).$$

Jeżeli ponadto funkcja  $f(x)$  jest okresowa i jej okres wynosi  $2L$  tzn.  $f(x) = f(x + 2L)$ , to powyższa równość jest spełniona dla całej dziedziny funkcji  $f(x)$ .

Dygresja:

1. Szereg Fouriera w głównej mierze służy do rozwijania funkcji okresowych.
2. Zauważmy ponadto, że ciąg funkcji

$$1, \cos \left( \frac{\pi x}{L} \right), \sin \left( \frac{\pi x}{L} \right), \cos \left( \frac{2\pi x}{L} \right), \sin \left( \frac{2\pi x}{L} \right), \cos \left( \frac{3\pi x}{L} \right), \sin \left( \frac{3\pi x}{L} \right), \dots,$$

spełnia następujące zależności dla  $k, m \in 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos \left( \frac{k\pi x}{L} \right) \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) dx &= 0, \\ \int_{-L}^L \sin \left( \frac{k\pi x}{L} \right) \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) dx &= 0, \\ \int_{-L}^L \sin \left( \frac{k\pi x}{L} \right) \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) dx &= 0, \end{aligned}$$

ale

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) dx &= L, \\ \int_{-L}^L \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) dx &= L. \end{aligned}$$

Funkcje takie nazywamy ortogonalnymi, a zatem zbiór ten tworzy bazę w nieskończonej wymiarowej przestrzeni funkcyjnej (podobnie do bazy wektorowej).

Przykład:

Rozwiń w szereg Fouriera funkcję okresową piłokształtną zadaną równaniem

$$f(x) = x \quad \text{dla} \quad x \in [-1, 1].$$

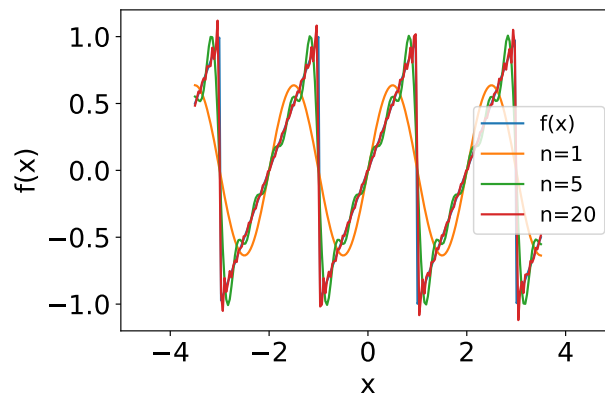
Powyższa funkcja spełnia warunki Dirichleta. Co więcej jest funkcją okresową o okresie równym 2, tzn.  $f(x) = f(x + 2)$ .

Zacznijmy od obliczenia współczynników Fouriera  $a_n$  i  $b_n$ . Ponieważ funkcja w rozpatrywanym przedziale jest nieparzysta, więc  $a_n = 0$ . Pozostają do obliczenia współczynniki  $b_n$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{1} \int_{-1}^1 x \sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right) dx = \int_{-1}^1 x \sin(n\pi x) dx = 2 \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx = \\ &\quad \left| \begin{array}{l} u' = \sin(n\pi x), \quad u = -\frac{1}{n\pi} \cos(n\pi x) \\ v = x, \quad v' = 1 \end{array} \right| = \\ &\quad 2 \left( -\frac{x}{n\pi} \cos(n\pi x) \Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \cos(n\pi x) dx \right) = \\ &\quad 2 \left( -\frac{1}{n\pi} \cos(n\pi) + \frac{1}{(n\pi)^2} \sin(n\pi x) \Big|_0^1 \right) = -\frac{2}{n\pi} \cos(n\pi) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \end{aligned}$$

A zatem szereg Fouriera funkcji  $f(x)$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin(n\pi x).$$



Rysunek 1: Wykres funkcji  $f(x)$  oraz rozwinięcia w szereg Fouriera dla  $n = 1, 5, 20$ .

Przykład:

Wyznaczyć szereg trygonometryczny Fouriera funkcji

$$f(x) = |x|, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Funkcja  $f(x)$  spełnia warunki Dirichleta, jest funkcją okresową o okresie  $2\pi$ ,

tzn.  $f(x) = f(x + 2\pi)$ . Ponieważ funkcja  $f(x)$  jest parzysta, to  $b_n = 0$ .

Współczynniki  $a_n$

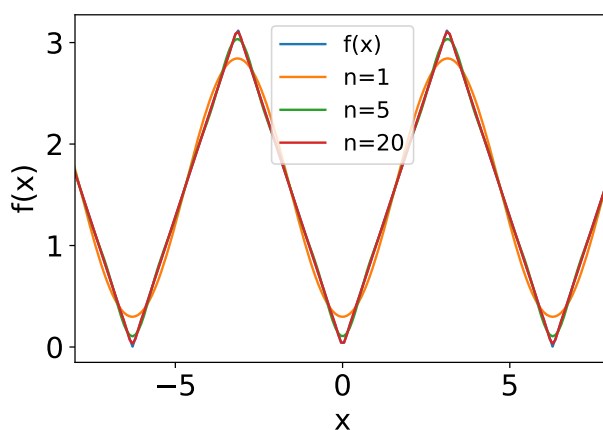
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 (-x) dx + \int_0^{\pi} x dx \right) = \frac{1}{\pi} \left( -\frac{1}{2} x^2 \Big|_{-\pi}^0 + \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^{\pi} \right) = \pi$$

oraz

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) dx = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 (-x) \cos(nx) dx + \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx = \left| \begin{array}{l} u' = \cos(nx), \quad u = \frac{1}{n} \sin(nx) \\ v = x, \quad v' = 1 \end{array} \right| = \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \left[ \frac{x}{n} \sin(nx) \right]_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx \right) = \frac{2}{n^2 \pi} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n^2 \pi} (\cos(n\pi) - 1) = \\ &= \frac{2}{n^2 \pi} ((-1)^n - 1). \end{aligned}$$

A zatem

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 \pi} ((-1)^n - 1) \cos(nx).$$



Rysunek 2: Wykres funkcji  $f(x)$  oraz rozwinięcia w szereg Fouriera dla  $n = 1, 5, 20$ .

## TRANSFORMATA FOURIERA

### Twierdzenie całkowe Fouriera

Jeżeli funkcja  $f(x)$  spełnia warunki Dirichleta oraz jest bezwzględnie całkowalna, tzn.  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| < \infty$ , to

$$f(x) = \int_0^{\infty} (a(\xi) \cos(\xi x) + b(\xi) \sin(\xi x)) d\xi,$$

gdzie

$$\begin{aligned} a(\xi) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\xi x) dx, \\ b(\xi) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\xi x) dx. \end{aligned}$$

### UWAGA

- jeżeli  $f(x)$  jest funkcją parzystą, to  $b(\xi) = 0$  oraz  $a(\xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos(xt) dx$ ,
- jeżeli  $f(x)$  jest funkcją nieparzystą, to  $a(\xi) = 0$  oraz  $b(\xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \sin(xt) dx$ .

Wykorzystując wzór Eulera  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ , oraz fakt, że  $\int_A^B (h(x) + ip(x)) dx = \int_A^B h(x) dx + i \int_A^B p(x) dx$ , powyższe twierdzenie można zapisać w postaci tzn. zespolonego wzoru całkowego Fouriera

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi,$$

gdzie

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx.$$

### Definicja

Niech funkcja  $f(x)$  spełnia warunki Dirichleta oraz jest bezwzględnie całkowalna, tzn.  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| < \infty$ . Funkcję

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx.$$

nazywamy transformatą Fouriera funkcji  $f(x)$ .

**Definicja**

Odwrotną transformatą Fouriera nazywamy przekształcenie

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

**Oznaczenie:**

Transformatę Fouriera funkcji  $f(x)$  oraz transformatę do niej odwrotną będziemy oznaczali

$$\hat{f}(\xi) = F(f(t)), \quad \text{oraz} \quad f(x) = F^{-1}(\hat{f}(\xi))$$

Przykład:

Zapisać wzór całkowy Fouriera dla funkcji

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x), & \text{gdy } |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{gdy } |x| \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Funkcja  $f(x)$  jest funkcją parzystą, a zatem  $b(\xi) = 0$ . Współczynnik  $a(\xi)$ , ma postać

$$\begin{aligned} a(\xi) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\xi x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cos(\xi x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cos(\xi x) dx = \\ &\left| \begin{array}{l} \text{Korzystamy z własności:} \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{2} + \frac{\cos(\alpha+\beta)}{2} \end{array} \right| = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x - \xi x) + \cos(x + \xi x)) dx = \\ &\frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{1-\xi} \sin((1-\xi)x) + \frac{1}{1+\xi} \sin((1+\xi)x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &\frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{1-\xi} \sin\left((1-\xi)\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{1+\xi} \sin\left((1+\xi)\frac{\pi}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

A zatem wzór całkowy Fouriera dla funkcji  $f(x)$  ma postać

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{1-\xi} \sin\left((1-\xi)\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{1+\xi} \sin\left((1+\xi)\frac{\pi}{2}\right) \right] \cos(\xi x) d\xi$$

Przykład:

Znajdź transformatę Fouriera funkcji

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{gdy } x > 0, \\ 0, & \text{gdy } x \leq 0. \end{cases}$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} e^{-i\xi x} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} e^{-i\xi x} dx = \int_0^{\infty} e^{-(1+i\xi)x} dx = \\ &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_0^{\beta} e^{-(1+i\xi)x} dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{-1}{1+i\xi} [e^{-(1+i\xi)x}]_0^{\beta} = \\ &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{-1}{1+i\xi} [e^{-(1+i\xi)\beta} - e^{-(1+i\xi)0}] = \frac{-1}{1+i\xi} [0 - 1] = \frac{1}{1+i\xi} \end{aligned}$$

## WŁASNOŚCI TRANSFORMATY FOURIERA

- 1) Jeżeli  $f_1(x)$  i  $f_2(x)$  spełniają założenia twierdzenia Fouriera, zaś  $\alpha, \beta$  są dowolnymi liczbami

$$F[\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)] = \alpha F[f_1(x)] + \beta F[f_2(x)].$$

- 2) Jeżeli  $f(x)$  spełnia założenia twierdzenia Fouriera oraz  $x_0, a \in \mathbb{R}$ , to

$$F[f(x - x_0)] = e^{-i\xi x_0} F[f(x)].$$

oraz

$$F[f(ax)] = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right).$$

- 3) Jeżeli  $x^n f(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  spełnia założenia twierdzenia Fouriera oraz  $F[f(x)] = \hat{f}(\xi)$ , to

$$\frac{d^k}{d\xi^k} \hat{f}(\xi) = (-i)^k F[x^k f(x)], \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, n.$$

- 4) Jeżeli  $f(x)$  oraz jej pochodne  $f^{(n)}(x)$  spełniają założenia twierdzenia Fouriera, to

$$F[f^{(n)}(x)] = (i\xi)^n F[f(x)].$$

**Tabela transformat wybranych funkcji:**

| $f(x)$                                                                                            | $\hat{f}(\xi)$                                              |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{gd}y \  x  < a, \\ 0, & \text{gd}y \  x  > a. \end{cases}$       | $\hat{f}(\xi) = \frac{2 \sin(a\xi)}{\xi}$                   |
| $f(x) = \begin{cases} 1 -  x , & \text{gd}y \  x  < 1, \\ 0, & \text{gd}y \  x  > 1. \end{cases}$ | $\hat{f}(\xi) = \frac{2}{\xi^2}(1 - \cos(\xi))$             |
| $f(x) = e^{-cx}, \ x > 0, \ c > 0$                                                                | $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{i\xi + c}$                         |
| $f(x) = e^{-c x }$                                                                                | $\hat{f}(\xi) = \frac{2c}{\xi^2 + c^2}$                     |
| $f(x) = e^{-x^2}$                                                                                 | $\hat{f}(\xi) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\xi^2}{4}}$            |
| $f(x) = \cos(x), \  x  < \frac{\pi}{2}$                                                           | $\hat{f}(\xi) = \frac{2 \cos(\frac{\pi}{2}\xi)}{1 - \xi^2}$ |

Przykład:

Wyznacz transformatę Fouriera funkcji  $f(x) = e^{-(x-3)^2}$ .

Korzystając z własności 2) oraz powyższej tabelki

$$\hat{f}(\xi) = F[f(x)] = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\xi^2}{4}} e^{-i3\xi}$$

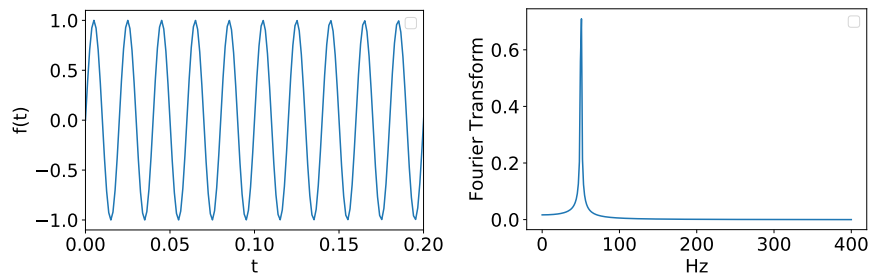
## ZASTOSOWANIA TRANSFORMATY FOURIERA

- Transformacja Fouriera rozkłada funkcję na szereg funkcji okresowych tak, że uzyskana transformata daje informację w jaki sposób poszczególne częstotliwości składają się na pierwotną funkcję.
- Zazwyczaj analizowana funkcja ma jakiś przebieg czasowy  $f(t)$ , wówczas jest transformata jest funkcją w dziedzinie częstości  $\hat{f}(\omega)$  (jest to analog wprowadzonych na wykładzie funkcji  $f(x)$  i jej transformaty  $\hat{f}(\xi)$ ).

- Transformata Fouriera ma szczególne zastosowanie w procesie przetwarzania sygnałów różnego rodzaju zaczynając od medycyny, poprzez elektronikę a na fizyce skończywszy.

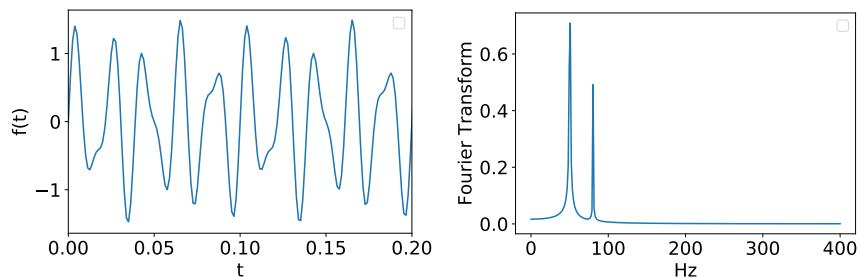
Rozważmy proste sygnały w czasie składające się z sumy sinusów z różnymi wagami.

- $f(t) = \sin(50t)$



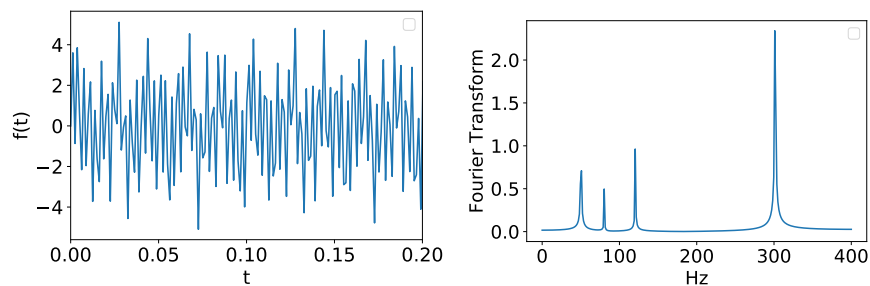
Rysunek 3: Wykres funkcji  $f(t)$  (lewy panel) oraz jej transformaty Fouriera  $\hat{f}(\omega)$  (prawy panel).

- $f(t) = \sin(50t) + 0.5 \sin(80t)$



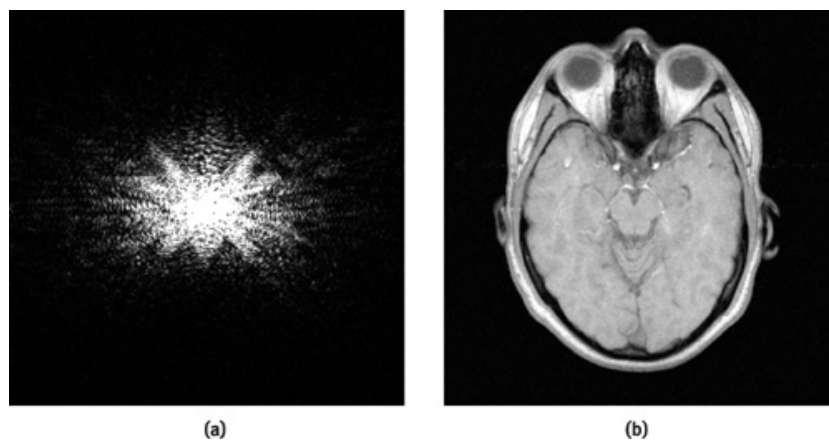
Rysunek 4: Wykres funkcji  $f(t)$  (lewy panel) oraz jej transformaty Fouriera  $\hat{f}(\omega)$  (prawy panel).

- $f(t) = \sin(50t) + 0.5 \sin(80t) + \sin(120t) + 3 \sin(300t)$



Rysunek 5: Wykres funkcji  $f(t)$  (lewy panel) oraz jej transformaty Fouriera  $\hat{f}(\omega)$  (prawy panel).

- Zastosowanie w medycynie - NMR, EEG, EKG, itd.



Rysunek 6: Przykład obrazu z magnetycznego rezonansu jądrowego (NMR, MRI) i jego transformatą Fouriera.

## TRANSFORMATA LAPLACE'A

### Definicja

Niech funkcja  $f(x)$  spełnia warunki Dirichleta oraz  $\int_0^\infty |f(x)| < \infty$ . Wówczas

$$\mathcal{L}(f(x)) = f(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx,$$

gdzie  $s = a + ib \in \mathbb{C}$ .

Wykresy funkcji poddanych przekształceniu Laplace'a przedstawia się na płaszczyźnie zespolonej (tzw. płaszczyźnie S). Jeden ze sposobów na zrozumienie czym jest transformata Laplace'a, polega na zwróceniu się ku analizie Fouriera. W analizie Fouriera krzywe harmoniczne sinus i cosinus mnożone są przez sygnał i wynikowe całkowanie dostarcza wskazówki na temat tego jakie składowe, o jakich częstościach, składają się na pierwotny sygnał. Transformacja S (powszechnie określana mianem transformacji Laplace'a) wykonuje podobne działanie, ale o bardziej ogólnym charakterze. Wyrażenie  $e^{-st} = e^{-(\sigma+i\omega)t} = e^{-\sigma t} e^{-i\omega t}$  ujmuje nie tylko częstotliwości, ale również rzeczywiste efekty. Transformacja S uwzględnia więc nie tylko przebiegi częstotliwościowe, ale także efekty o charakterze zaniku. Na przykład krzywa sinusoidalna tłumiona może być odpowiednio zamodelowana za pomocą transformacji S. Transformacja Laplace'a stanowi więc uogólnienie transformacji Fouriera.