

15. Drgania

15-1. Ruch harmoniczny

Ruch, który powtarza się w regularnych odstępach czasu, nazywamy *ruchem okresowym* (*periodycznym*). Jak zobaczymy później, przemieszczenie cząstki w ruchu periodycznym można zawsze wyrazić przy pomocy funkcji sinus i cosinus. Ponieważ funkcje te nazywamy funkcjami *harmonicznymi*, ruch periodyczny często jest nazywany *ruchem harmonicznym* złożonym lub krótko ruchem harmonicznym.

Jeżeli punkt materialny porusza się ruchem okresowym tam i z powrotem po tej samej drodze, to ruch taki nazywamy *drgającym* (*wibracyjnym* albo *oscylacyjnym*). W otaczającym nas świecie często spotykamy ruchy oscylacyjne. Ruch wahadła zegara, drgania strun skrzypiec, ruch ciężarka na końcu sprężyny, ruch atomów w cząsteczkach albo w siatce krystalicznej, ruch cząsteczek powietrza podczas rozchodzenia się fali głosowej, oto przykłady ruchu okresowego.

Ze względu na tarcie rozpraszające energię ruchu większość z wymienionych ruchów nie ma ustalonej amplitudy. Ruch wahadła stopniowo zanika, a struna skrzypiec po jakimś czasie przestaje wykonywać drgania. Gdy uwzględnimy istnienie sił tłumiących, ruch okresowy nazywamy ruchem harmonicznym *tłumionym*. Chociaż nie możemy usunąć tarcia z ruchu periodycznego przedmiotów makroskopowych, często możemy usunąć jego efekt tłumiący. Czynimy to dostarczając energii układowi drgającemu, co kompensuje rozpraszanie energii z powodu tarcia. Sprężyna zegarka i wagi w zegarze wahadłowym dostarczają zewnętrznej energii, która pozwala drgającemu układowi w tych mechanizmach poruszać się tak, jakby nie były tłumione.

Ruchem drgającym mogą się poruszać nie tylko układy mechaniczne. Fale radiowe, mikrofały i światło widzialne są drgającymi wektorami pola elektrycznego i magnetycznego. Zatem w obwodzie strojonym w radioodbiorniku i zamkniętej wnęce metalowej, do której wprowadzono energię mikrofał, mamy do czynienia z drganiami elektromagnetycznymi. Analogia między drganiami mechanicznymi i elektromagnetycznymi jest bardzo bliska, ponieważ *drgania mechaniczne i elektromagnetyczne opisujemy przez te same podstawowe równania matematyczne*. Szczególnie dużo będziemy mówić o tej analogii w dalszych rozdziałach.

Okresem ruchu harmonicznego T jest czas trwania jednego pełnego drgnięcia albo cyklu (to jest najkrótszy czas, po upływie którego ruch zaczyna się powtarzać). *Częstością*

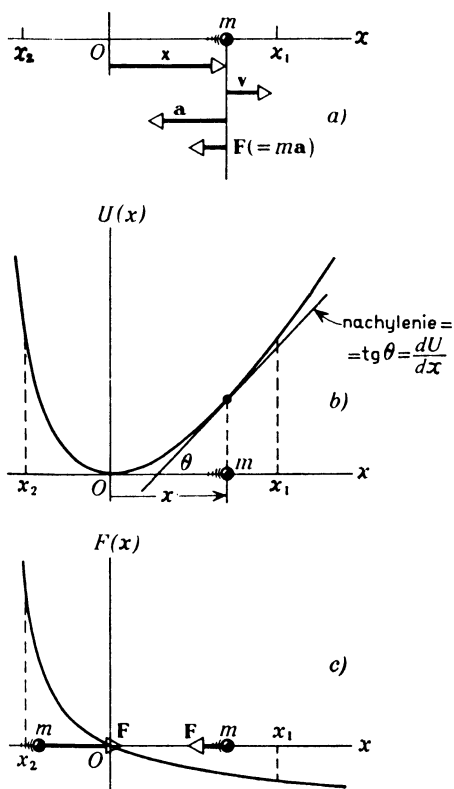
ruchu ν jest liczba drgań (albo cykli) na jednostkę czasu. Zatem częstość jest po prostu odwrotnością okresu, czyli

$$\nu = \frac{1}{T}. \quad (15.1)$$

Jednostką częstości w układzie SI, jest jeden cykl na sekundę albo jeden herc (Hz)*. Położeniem *równowagi* w ruchu drgającym nazywamy położenie, w którym na punkt materialny nie działa siła wypadkowa. *Przemieszczenie* (*wychylenie*) (liniowe albo kątowe) jest to odległość (liniowa albo kątowa) drgającego punktu materialnego od położenia równowagi w dowolnej chwili.

Skoncentrujmy naszą uwagę na punkcie materialnym oscylującym tam i z powrotem wzdłuż linii prostej pomiędzy ustalonymi punktami. Jego przemieszczenie x zmienia się okresowo, zarówno co do wartości, jak i kierunku. Jego prędkość v i przyspieszenie a także zmieniają się okresowo co do wartości i kierunku. Biorąc pod uwagę zależność $F = ma$, również siła F działająca na punkt materialny zmienia się okresowo.

Siły związane z ruchem harmonicznym są najbardziej ogólnym rodzajem sił, jakie dotychczas omawialiśmy. W poprzednich rozdziałach mieliśmy do czynienia tylko ze stałymi siłami (i przyspieszeniami). Później, kiedy rozważaliśmy siły zmienne w czasie, badaliśmy siłę (a także i przyspieszenie), która zmieniała



Rys. 15-1. (a) Punkt materialny o masie m porusza się ruchem harmonicznym pomiędzy punktami x_1 i x_2 . Punkt O jest położeniem równowagi. (b) Energia potencjalna punktu materialnego jako funkcja położenia. Na punkt materialny odległy o x od położenia równowagi działa siła $F = -dU/dx$. (c) Siła działająca na punkt materialny jako funkcja położenia x ; siła jest zwrócona do położenia równowagi

* Jednostka częstości pochodzi od nazwiska Heinricha Hertza (1857—1894), którego prace w dziedzinie elektromagnetyzmu dostarczyły eksperymentalnego potwierdzenia istnienia fal elektromagnetycznych przewidzianych przez Maxwella.

się co do kierunku, ale zachowywała stałą wartość bezwzględną (siła dośrodkowa z paragrafu 6-3), oraz siłę (a także przyspieszenie), która zmieniała się co do wartości bezwzględnej, ale była stała co do kierunku (siła zderzeniowa z paragrafu 10-1). Teraz w ruchu harmonicznym siła i przyspieszenie zmieniają się zarówno co do kierunku, jak i co do wartości bezwzględnej.

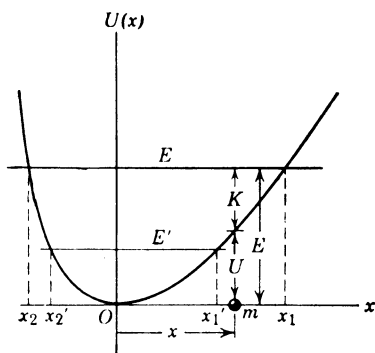
Biorąc pod uwagę energię możemy powiedzieć, że punkt materialny podlegający ruchowi harmonicznemu przechodzi tam i z powrotem przez punkt (położenie równowagi), w którym jego energia potencjalna osiąga wartość minimalną. Dobrym przykładem tego jest wahadło, które osiąga najmniejszą energię potencjalną, kiedy znajduje się w najniższym położeniu, tj. w położeniu równowagi. Na rysunku 15-1a widzimy ogólny przypadek punktu materialnego oscylującego pomiędzy punktami granicznymi x_1 i x_2 , przy czym położeniem równowagi jest punkt O . Rysunek 15-1b przedstawia odpowiadającą temu ruchowi krzywą energii potencjalnej, która ma wartość minimalną w tym położeniu. Siła działająca na punkt materialny w dowolnym jego położeniu daje się określić z funkcji energii potencjalnej przy pomocy równania (8-7)

$$F = -dU/dx. \quad (8-7)$$

Wykres tej funkcji przedstawia rys. 15-1c. Siła działająca na punkt materialny przyjmuje wartość zero w położeniu równowagi O ; skierowana jest ona na prawo (tzn. ma wartość dodatnią), gdy punkt materialny znajduje się na lewo od punktu O , i skierowana jest w lewo (tzn. ma wartość ujemną), gdy punkt materialny leży na prawo od punktu O . Jest to siła *przywracająca równowagę* układu, ponieważ zawsze działa tak, aby nadać punktowi materialnemu przyspieszenie w kierunku położenia równowagi. Zatem w ruchu harmonicznym położenie równowagi jest zawsze położeniem równowagi *trwałej*. Całkowita energia mechaniczna E drgającego punktu materialnego jest sumą jego energii kinetycznej i potencjalnej, czyli

$$E = K + U, \quad (15-2)$$

gdzie E pozostaje stałe, jeżeli nie działają siły niezachowawcze, takie jak siła tarcia. Na rysunku 15-2 widzimy wykres wartości całkowitej energii dla ruchu z rys. 15-1. Zwróćcie uwagę, w jaki sposób pokazano, że równanie (15-2) jest spełnione dla pewnego typowego położenia punktu materialnego. Punkt materialny nie może wyjść poza granice x_1 , x_2 , ponieważ poza tymi granicami wartość U przewyższa energię całkowitą E . Wymagałoby to, zgodnie z równaniem (15-2), ujemnej energii kinetycznej, co jest fizyczną niemożliwością.



Rys. 15-2. Całkowita energia mechaniczna E dla ruchu z rys. 15-1. Przy zmniejszeniu całkowitej energii mechanicznej drgającego punktu do wartości E' , granice wychyleń zmniejszają się do x'_1 i x'_2

W danym obszarze, tj. dla danej funkcji $U(x)$, drgający punkt materialny może przyjmować różne wartości całkowitej energii. Zależy to od tego, w jaki sposób został on wprowadzony w ruch. Oznacza to, że całkowita energia może przyjmować na przykład wartość E' zamiast E ; w tym przypadku granicznymi położeniami cząstki byłyby punkty x'_1 i x'_2 , a nie x_1 i x_2 (patrz rys. 15-2).

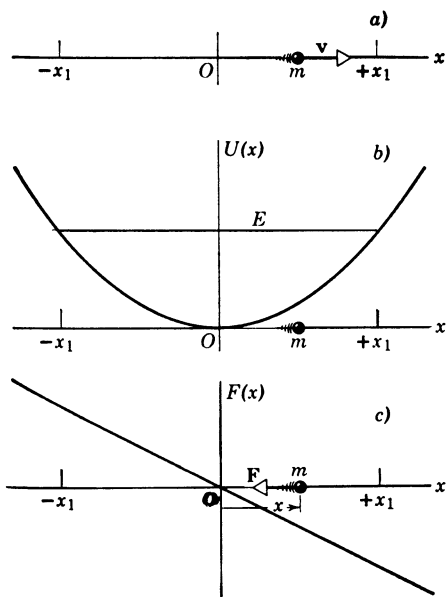
15-2. Oscylator harmoniczny prosty

Rozważmy oscylujący punkt materialny przedstawiony na rys. 15-3a. Punkt materialny porusza się tam i z powrotem wokół położenia równowagi. Funkcja energii potencjalnej zmienia się z kwadratem wychylenia x w następujący sposób

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2, \quad (15-3)$$

gdzie k jest wielkością stałą (rys. 15-3b). Siła działająca na punkt materialny, zgodnie z równaniem (8-7), wynosi

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d(\frac{1}{2} kx^2)}{dx} = -kx. \quad (15-4)$$

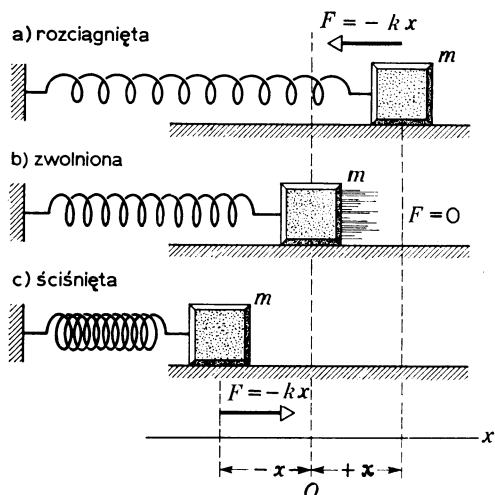


Rys. 15-3. (a) Punkt materialny o masie m porusza się ruchem harmonicznym prostym między punktami $+x_1$ i $-x_1$. Punkt O jest położeniem równowagi. (b) Energia potencjalna $U(x)$ i całkowita energia mechaniczna E . (c) Siła działająca na punkt materialny. Należy uważnie porównać ten rysunek z rysunkiem 15-1 przedstawiającym ogólny przypadek ruchu harmonicznego

Zmiany tej siły ilustruje rys. 15-3c. Oscylujący w ten sposób punkt materialny nosi nazwę *prostego oscylatora harmonicznego*, a jego ruch nazywamy *ruchem harmonicznym prostym*. W ruchu takim, jak widzimy z równania (15-3), energia potencjalna zmienia się jak kwadrat przemieszczenia, a siła działająca na punkt jest proporcjonalna do przemieszczenia, lecz ma kierunek przeciwny (rys. 15-4). W ruchu harmonicznym prostym granice wychyleń są jednakowe po obydwu stronach położenia równowagi. Dla bardziej ogólnego ruchu to stwierdzenie nie jest prawdziwe, jak to widzimy na podstawie rys. 15-1, na którym przedstawiony jest również ruch harmoniczny, ale nie prosty ruch harmoniczny. Wartość bez-

względnej maksymalnego przemieszczenia, tzn. wartość x_1 z rys. 15-3, nazywamy *amplitudą* ruchu harmonicznego prostego.

Łatwo zauważyć, że równanie (15-3) $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ jest to wyrażenie na energię potencjalną „idealnej sprężyny” ściśniętej albo rozciągniętej o długość x (patrz paragraf 8-4). W tym samym paragrafie zdefiniowaliśmy idealną sprężynę jako taką, dla której siła powodująca rozciąganie albo ściskanie wyraża się zależnością $F(x) = -kx$ (patrz równanie 15-4), gdzie k jest stałym współczynnikiem charakteryzującym sprężystość, nazywanym *współczynnikiem sprężystości* lub *stałą sprężystości*.



Rys. 15-4. Prosty oscylator harmoniczny. W każdym z trzech przypadków przedstawiona jest siła, z jaką sprężyna działa na masę m . Ciało ślizga się po doskonale gładkim, poziomym stole

Stąd ciało o masie m przyłączone do idealnej sprężyny o współczynniku sprężystości k i mogące się swobodnie poruszać po doskonale gładkiej poziomej powierzchni, jest przykładem prostego oscylatora harmonicznego (patrz rys. 15-4). Zwracamy uwagę, że istnieje położenie (tj. położenie równowagi; patrz rys. 15-4b), w którym sprężyna nie działa żadną siłą na ciało. Jeżeli ciało jest przesunięte na prawo (tak jak na rys. 15-4a), to sprężyna oddziałuje na ciało siłą skierowaną w lewo i wynoszącą $F = -kx$. Jeżeli ciało jest przesunięte na lewo (tak jak na rys. 15-4c), to siła działa na prawo i wynosi także $F = -kx$. W tym przypadku jest to siła *przywracająca równowagę układowi*. Ruch drgającej masy jest *ruchem harmonicznym prostym*.

Zastosujmy drugą zasadę Newtona, $F = ma$, do ruchu przedstawionego na rys. 15-4. Na miejsce siły podstawiamy $-kx$ z równania (15-4), a na miejsce przyspieszenia a — drugą pochodną przemieszczenia względem czasu, $d^2x/dt^2 (= dv/dt)$. W ten sposób otrzymujemy

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

albo inaczej

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (15-5)$$

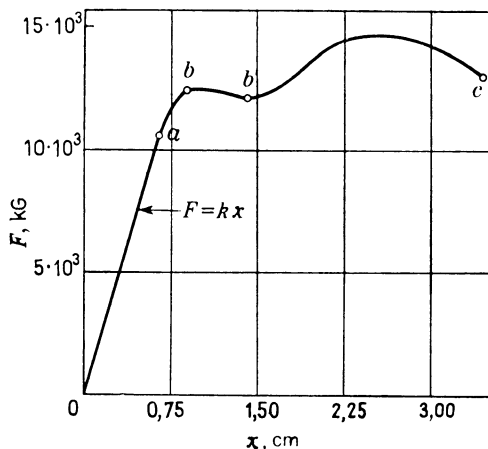
W skład tego równania wchodzi pochodna, nazywamy je więc *równaniem różniczkowym*. Aby je rozwiązać, należy znaleźć taką zależność przemieszczenia x od czasu t , aby równanie (15-5) było spełnione. Kiedy znamy zależność x od czasu, znamy ruch punktu material-

nego. Dlatego też równanie (15-5) nazywamy *równaniem ruchu* oscylatora harmonicznego prostego. Równania tego typu będziemy rozwiązywać szczegółowo w następnym paragrafie.

Zagadnienie prostego oscylatora harmonicznego jest ważne z dwóch powodów. Po pierwsze, drgania mechaniczne o małej amplitudzie można sprowadzić do drgań harmoniczných prostych albo do kombinacji tych drgań. Innymi słowy, jeżeli rozważamy dostatecznie mały odcinek krzywej przedstawiającej siłę przywracającą równowagę (rys. 15-1c) (w pobliżu punktu O), to staje się on dowolnie bliski odcinkowi linii prostej, a to, zgodnie z rys. 15-3c, jest charakterystyczne dla ruchu harmonicznego prostego. Z drugiej strony krzywa energii potencjalnej z rys. 15-1b dla ogólnego ruchu drgającego sprowadza się do krzywej z rys. 15-3b dla oscylatora harmonicznego prostego. Dzieje się tak wtedy, gdy amplituda drgań względem położenia równowagi O jest dostatecznie mała.

Po drugie, z równaniami typu (15-5) spotykamy się przy rozpatrywaniu najróżnorodniejszych zagadnień fizycznych, w akustyce, w optyce, w mechanice, w obwodach elektrycznych, a nawet w fizyce atomowej. Prosty oscylator harmoniczny ilustruje właściwości charakterystyczne dla wielu rodzajów układów fizycznych.

Równanie (15-4) ($F = -kx$) jest zależnością empiryczną znaną jako *prawo Hooke'a*. Jest to specjalny przypadek bardziej ogólnej zależności dotyczącej deformacji ciał sprężystych, odkrytej przez Roberta Hooke'a (1635-1703)*. Prawo to dotyczy sprężyn i innych ciał sprężystych pod warunkiem, że deformacja nie jest za duża. Jeżeli deformacja ciała stałego przekracza pewną granicę, zwaną *granicą sprężystości*, nie wróci ono do swego



Rys. 15-5. Typowa zależność między siłą F rozciągającą pręt aluminiowy i wydłużeniem pręta pod wpływem naprężenia. Próbkę miała długość 30 cm i przekrój 6 cm^2 . Znaną zależność $F = kx$ możemy stosować tylko dla odcinka Oa , bowiem dla dalszej części krzywej nachylenie linii nie jest stałe, lecz zmienia się i zależy nieliniowo od x . Po przekroczeniu punktu b (*granica sprężystości*) próbka nie wraca do swej początkowej długości po usunięciu siły rozciągającej. Na odcinku bb' wydłużenie rośnie nawet wówczas, gdy siła rozciągająca jest stała; materiał zaczyna płynąć jak ciecz. Nie można osiągnąć większego wydłużenia niż to, które odpowiada punktowi c . Dalsze wydłużenie powoduje rozerwanie próbki. Siła rozciągająca jest równa co do wartości sile przywracającej równowagę. Dlatego pominięto znak $(-)$ w równaniu $F = kx$

* Hooke podał po raz pierwszy swoje prawo w 1676 r. w postaci łacińskiego kryptogramu *ceiiinosssttuv*, który rozszyfrował w dwa lata później jako *ut tensio sic vis*, a który możemy przetłumaczyć jako: *naprężenie jest proporcjonalne do siły*.

poprzedniego kształtu po ustaniu działania siły odkształcającej (rys. 15-5). Prawo Hooke'a obowiązuje prawie do granicy sprężystości, dla wielu powszechnie używanych materiałów. Zakres stosowanych sił, w którym obowiązuje prawo Hooke'a, nazywamy obszarem proporcjonalności. Przy odkształceniach przekraczających granicę sprężystości, działających sił nie możemy określić za pomocą funkcji energii potencjalnej. W tych przypadkach siła zależy od wielu czynników, takich jak czas deformacji i rodzaj obróbki materiału.

Zauważmy, że funkcje opisujące siłę przywracającą równowagę i energię potencjalną prostego oscylatora harmonicznego są takie same, jak odpowiednie funkcje dla ciała sprężystego zdeformowanego jednowymiarowo, w obszarze proporcjonalności. Odkształcone i puszczone swobodnie ciało sprężyste będzie drgać podobnie jak oscylator harmoniczny. Innymi słowy, dopóki amplituda jest tak mała, że nie przekracza granicy sprężystości, drgania mechaniczne mają ten sam charakter co drgania oscylatora harmonicznego. Można łatwo uogólnić te rozważania i pokazać, że dowolne zagadnienie drgań mechanicznych o małych amplitudach w przestrzeni trójwymiarowej sprowadza się do odpowiedniej kombinacji prostych oscylatorów harmonicznych.

Drgające struny albo membrany, drgania akustyczne lub elektryczne we wnękach rezonansowych czy też drgania atomów w sieciach krystalicznych, można opisać za pomocą tego samego aparatu matematycznego co układ oscylatorów harmonicznych. Ta analogia pozwala z powodzeniem stosować metody rozwiązywania zadań opracowane dla jednego działu w innych działach.

15-3. Ruch harmoniczny prosty

Rozwiążmy równanie ruchu prostego oscylatora harmonicznego

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (15-6)$$

Przypominamy, że każdy układ o masie m , na który działa siła $F = -kx$, podlega temu równaniu. W przypadku sprężyny współczynnik proporcjonalności k jest jej współczynnikiem sprężystości. Określa on sztywność sprężyny. W innych układach drgających może on określać inne cechy fizyczne układu, jak zobaczymy później. Układ masa-sprężyna będzie naszym prototypem oscylatora.

Równanie (15-6) jest równaniem różniczkowym. Jest to związek między funkcją czasu $x(t)$ i jej drugą pochodną względem czasu d^2x/dt^2 . Aby znaleźć położenie cząstki jako funkcję czasu, musimy znaleźć funkcję $x(t)$, która ten związek spełnia.

Równanie (15-6) przepisujemy w postaci

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x. \quad (15-7)$$

Rozwiązaniem tego równania musi być pewna funkcja $x(t)$, której druga pochodna równa się jej samej ze znakiem przeciwnym i ze stałym współczynnikiem k/m . Z rachunku różniczkowego wiemy, że taką własność ma funkcja sinus i cosinus*. Na przykład

$$\frac{d}{dt} \cos t = -\sin t, \quad \frac{d^2}{dt^2} \cos t = -\frac{d}{dt} \sin t = -\cos t.$$

* Ruch harmoniczny jest nie tylko okresowy, lecz także ograniczony. Tylko funkcje sinus i cosinus albo ich kombinacje mają obydwie te właściwości.

Właściwość ta zostaje zachowana, jeżeli funkcję tę pomnożymy przez stały czynnik A . Biorąc pod uwagę, że funkcja sinus ma wymagane właściwości i że równanie (15-7) zawiera stały czynnik, napiszmy rozwiązanie próbne w postaci

$$x = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (15-8)$$

Ponieważ

$$\cos(\omega t + \varphi) = \cos \varphi \cos \omega t - \sin \varphi \sin \omega t = a \cos \omega t + b \sin \omega t,$$

stała φ pozwala nam otrzymać rozwiązania zawierające dowolne kombinacje funkcji sinus i cosinus. W wyniku tego równanie (15-8), z nieznanymi (jeszcze) stałymi A , ω i φ , jest najbardziej ogólnym rozwiązaniem równania (15-7). Aby określić stałe w rozwiązaniu ogólnym (15-8) i uzyskać pełne rozwiązanie równania (15-7), różniczkujemy dwukrotnie względem czasu równanie (15-8). Otrzymujemy

$$\frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$$

oraz

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi).$$

Po podstawieniu tego do równania (15-7) otrzymujemy

$$-\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = -\frac{k}{m} A \cos(\omega t + \varphi).$$

Jeżeli zatem przyjmiemy, że

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \quad (15-9)$$

to

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

jest rozwiązaniem równania oscylatora harmonicznego prostego.

Stałe A i φ pozostają w dalszym ciągu nieokreślone i mogą przyjmować zupełnie dowolne wartości. Znaczący to, że funkcja x z dowolnie wybranymi A i φ spełnia równanie (15-7), co fizycznie odpowiada wielkiej różnorodności możliwych ruchów oscylatora. Jest to charakterystyczna właściwość różniczkowego równania ruchu, które nie opisuje jednego szczególnego ruchu, lecz całą klasę albo rodzinę ruchów mających pewne cechy wspólne, a różniących się tylko pod pewnymi względami. W tym przypadku ω jest wspólne dla danej grupy ruchów drgających, a φ i A mogą różnić się między sobą. Zobaczmy później, że A i φ określamy dla danego szczególnego ruchu z warunków, w jakich ten ruch się rozpoczął.

Przejdźmy do omówienia fizycznego znaczenia stałej ω . Jeżeli w równaniu (15-8) zwiększyć czas t o $2\pi/\omega$, to funkcja x przyjmie postać:

$$x = A \cos[\omega(t + 2\pi/\omega) + \varphi] = A \cos(\omega t + 2\pi + \varphi) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

Widzimy, że funkcja ta po czasie $2\pi/\omega$ przyjmuje swoją poprzednią wartość. Zatem $2\pi/\omega$ jest okresem ruchu T . Ponieważ $\omega^2 = k/m$, mamy

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (15-10)$$

Wszystkie ruchy opisane równaniem (15-7) mają ten sam okres drgań, zależny tylko od masy m drgającego punktu materialnego i współczynnika sprężystości k . Częstością ν oscylatora nazywamy liczbę pełnych drgań na jednostkę czasu:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (15-11)$$

Zatem

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}. \quad (15-12)$$

Wielkość ω nazywamy *częstością kołową* (lub *częstością kątową*); różni się ona od częstości ν o czynnik 2π . Wymiarem częstości kołowej jest odwrotność czasu (tak samo jak dla prędkości kątowej), a jej jednostką jest radian na sekundę. Geometryczne znaczenie częstości kołowej podamy w paragrafie 15-6.

Stała A ma proste znaczenie fizyczne. Funkcja cosinus przyjmuje wartości od -1 do $+1$. Wychylenie x z położenia równowagi $x = 0$ osiąga wartość maksymalną równą właśnie stałej A . Zatem A ($= x_{\max}$) jest *amplitudą* ruchu. Nasze równanie różniczkowe nie ustala wartości A , stąd ruchy opisane przez dane równanie mają różne amplitudy, a ten sam okres i częstość. Okres prostego ruchu harmonicznego nie zależy od amplitudy ruchu.

Wielkość $(\omega t + \varphi)$ nazywamy *fazą* ruchu, przy czym φ jest *fazą początkową* (stałą fazową). Dwa ruchy mogą mieć te same amplitudy i częstości, lecz różne fazy. Jeżeli np. $\varphi = -\pi/2$, to

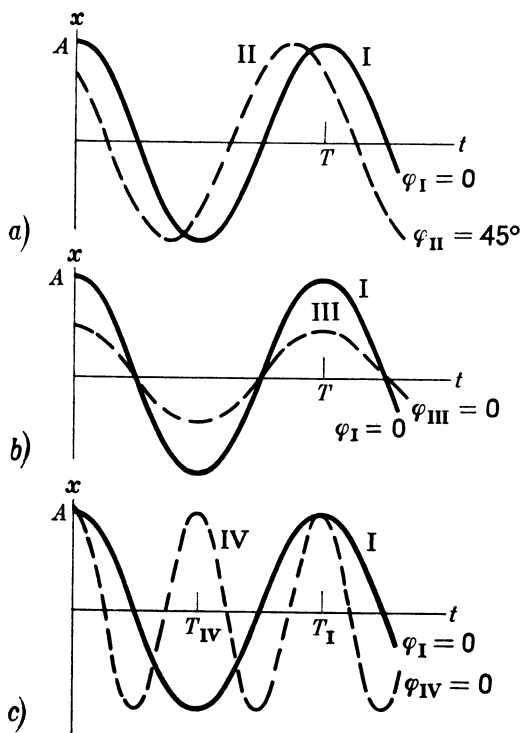
$$x = A \cos(\omega t + \varphi) = A \cos(\omega t - 90^\circ) = A \sin \omega t,$$

czyli przemieszczenie jest zerowe w chwili $t = 0$. Jeżeli $\varphi = 0$, przemieszczenie $x = A \cos \omega t$ osiąga maksimum w chwili $t = 0$. Inne stałe fazowe dają pośrednie wartości przemieszczenia początkowego. Amplituda A i faza początkowa φ drgań zależą od początkowego położenia i prędkości punktu materialnego. Te dwa warunki początkowe pozwalają określić dokładnie A i φ^* . Częstka raz wprowadzona w ruch będzie drgać ze stałą amplitudą, częstością i stałą fazową tak długo, jak długo inne siły nie podziałają na układ.

Na rysunku 15-6 przedstawiliśmy wychylenie x jako funkcję czasu t dla różnych prostych ruchów harmoniczných (podane są trzy przypadki). Na rysunku 15-6a przypadki I i II mają te same amplitudy i częstości, ale ich fazy różnią się o $\varphi = \pi/4$ czyli 45° . Na rysunku 15-6b przypadki I i III mają tę samą częstość i fazę, lecz ich amplitudy różnią się o czynnik 2. Na rysunku 15-6c przypadki I i IV mają te same amplitudy i fazy, a ich częstości różnią się o czynnik $\frac{1}{2}$ albo okresy o czynnik 2. Czytelnik powinien starannie przyglądać się tym przykładom, aby przyswoić sobie terminologię ruchu harmonicznego prostego.

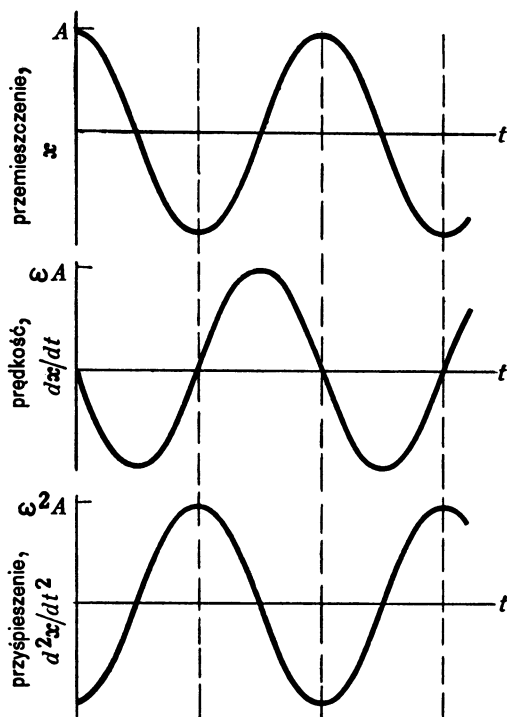
Drugą charakterystyczną cechą prostego ruchu harmonicznego jest zależność między przemieszczeniem, prędkością i przyspieszeniem drgającego punktu materialnego. Porównajmy te wartości dla typowego ruchu, którym jest przypadek I z rys. 15-6. Na rysunku 15-7 przedstawiamy oddzielnie przemieszczenie x w zależności od czasu t , prędkość

* Do stałej fazowej możemy dodać dowolną wielokrotność kąta 2π , czyli 360° i równanie zawierające ją będzie w dalszym ciągu opisywało ten sam ruch.



Rys. 15-6. Różne rozwiązania równania oscylatora harmonicznego. (a) Obydwa rozwiązania mają taką samą amplitudę i okres, lecz różnią się fazami o 45° . (b) Taki sam okres i faza, lecz amplitudy różnią się o czynnik 2. (c) Taka sama faza i amplituda, lecz okresy różnią się o czynnik 2

Rys. 15-7. Zależność między przyspieszeniem, prędkością i przemieszczeniem w prostym ruchu harmonicznym. Stała fazowa φ równa się zero, ponieważ przemieszczenie jest maksymalne w chwili $t = 0$; patrz równanie (15-8)



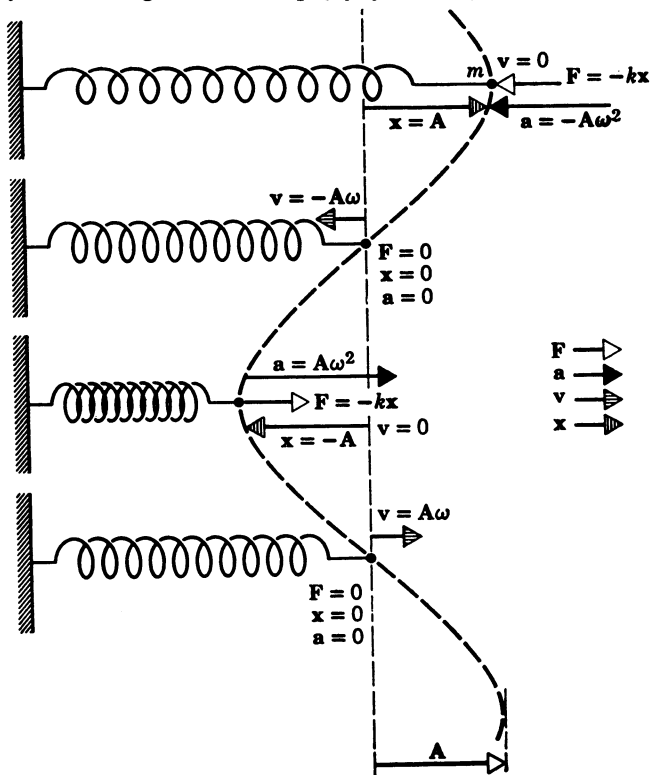
$v = dx/dt$ oraz przyspieszenie $a = dv/dt = d^2x/dt^2$, również jako funkcje czasu t . Krzywe te określone są równaniami

$$\begin{aligned}x &= A \cos(\omega t + \varphi), \\v &= \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi), \\a &= \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi).\end{aligned}\tag{15-13}$$

Sporządzając wykresy tych równań przyjęliśmy, że $\varphi = 0$. Aby ułatwić porównanie tych trzech krzywych, nie zaznaczono na rysunku jednostek i skal. Zauważmy że [patrz równ. (15-13)] maksymalne przemieszczenie równa się A , maksymalna prędkość ωA , a maksymalne przyspieszenie $\omega^2 A$.

Przy maksymalnym wychyleniu w obydwu kierunkach prędkość równa się zero, ponieważ musi wtedy zmienić kierunek. Przyspieszenie w takiej chwili, podobnie jak siła przywracająca równowagę, osiąga wartość maksymalną, lecz jest skierowane przeciwnie do przemieszczenia. Kiedy wychylenie jest zerowe, prędkość punktu materialnego osiąga maksimum, a przyspieszenie znika, tak jak to się dzieje z siłą przywracającą równowagę. Prędkość wzrasta w miarę zbliżania się punktu materialnego do położenia równowagi i maleje w miarę zbliżania się do maksymalnego wychylenia, podobnie jak dla ciężarka wahadła.

Na rysunku 15-8 przedstawione są chwilowe wartości x , v i a dla drgającego punktu materialnego przytwierdzonego do końca sprężyny, w kolejnych czterech chwilach czasu.



Rys. 15-8. Siła działająca na masę m , przyspieszenie, prędkość i przemieszczenie masy m poruszającej się ruchem harmonicznym prostym. Porównać z rys. 15-7

15-4. Energia w prostym ruchu harmonicznym

Z równania (15-2) wynika, że dla ruchu harmonicznego, włączając w to ruch harmoniczny prosty, w którym nie występują żadne siły rozpraszające, całkowita energia mechaniczna $E (= K + U)$ jest zachowana (pozostaje stała). Zajmiemy się teraz dokładniej energią całkowitą w ruchu harmonicznym prostym. Przemieszczenie w tym ruchu dane jest zależnością

$$x = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (15-8)$$

Energia potencjalna U w każdej chwili wyraża się zależnością

$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi). \quad (15-14)$$

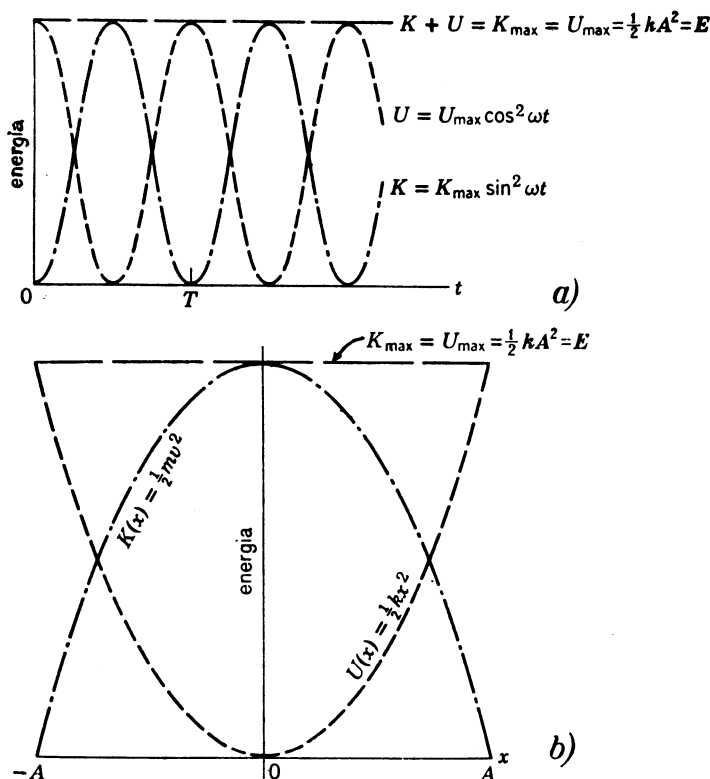
Maksymalna wartość energii potencjalnej wynosi $\frac{1}{2} k A^2$. Podczas ruchu energia potencjalna zmienia się od zera do wartości maksymalnej, jak to widzimy na rys. 15-9a i 15-9b.

Energia kinetyczna K w każdej chwili równa się $\frac{1}{2} m v^2$. Stosując zależności

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi), \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

otrzymujemy

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi). \quad (15-15)$$



Rys. 15-9. Energia prostego oscylatora harmonicznego. (a) Energia potencjalna (---), energia kinetyczna (— · —) i energia całkowita (—) jako funkcje czasu. (b) Energia potencjalna, kinetyczna i całkowita jako funkcje wychyleń względem położenia równowagi. Porównać z rys. 8-4

Maksymalna wartość energii kinetycznej wynosi zatem $\frac{1}{2}kA^2$ albo $\frac{1}{2}m(\omega A)^2$, co zgadza się z podaną poprzednio maksymalną wartością prędkości ωA . Podczas ruchu energia kinetyczna przyjmuje wartości od zera do wartości maksymalnej, co przedstawiają krzywe na rys. 15-9a i 15-9b.

Całkowita energia mechaniczna jest sumą energii kinetycznej i potencjalnej. Korzystając z równań (15-14) i (15-15) otrzymujemy

$$E = K + U = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}kA^2. \quad (15-16)$$

Widzimy, że całkowita energia mechaniczna jest stała, jak tego oczekiwaliśmy, a jej wartość wynosi $\frac{1}{2}kA^2$. Przy maksymalnym wychyleniu energia kinetyczna równa się zero, a energia potencjalna osiąga maksimum, czyli $\frac{1}{2}kA^2$. Natomiast w położeniu równowagi energia potencjalna równa się zero, a pozostaje tylko energia kinetyczna o wartości $\frac{1}{2}kA^2$. Przy pośrednich położeniach energia kinetyczna i potencjalna zmieniają się tak, że ich suma jest zawsze równa $\frac{1}{2}kA^2$. Ta stała wartość energii całkowitej jest przedstawiona na rys. 15-9a i 15-9b. *Całkowita energia punktu materialnego poruszającego się ruchem harmonicznym prostym jest proporcjonalna do kwadratu amplitudy tego ruchu.* Z rysunku 15-9a widać wyraźnie, że *średnia energia kinetyczna ruchu w czasie jednego okresu jest dokładnie równa średniej energii potencjalnej w tym samym czasie i każda z tych średnich energii równa się $\frac{1}{4}kA^2$.*

Równanie (15-16) możemy napisać w zupełnie ogólnej postaci:

$$K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2. \quad (15-17)$$

Z zależności tej otrzymujemy: $v^2 = (k/m)(A^2 - x^2)$ albo

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)}, \quad (15-18)$$

skąd widać wyraźnie, że maksimum prędkości przypada w położeniu równowagi $x = 0$, a wartość zerowa przy wychyleniu maksymalnym $x = A$. Rzeczywiście, na podstawie zasady zachowania energii, czyli równania (15-17) (w którym $\frac{1}{2}kA^2 = E$), i po scałkowaniu równania (15-18) otrzymujemy przemieszczenie jako funkcję czasu. Uzyskane wyniki są identyczne z równaniem (15-8), które wyprowadziliśmy z różniczkowego równania ruchu (15-6) (patrz zadanie 29).

Wpływ sił hamujących ruch omówimy w paragrafie 15-9.

Przykład 1. Pozioma sprężyna, przedstawiona na rys. 15-4, pod wpływem siły 0,75 kG rozciągnęła się o 3,0 cm w porównaniu z jej stanem swobodnym (równowagowym). Następnie do jej końca przyczepiono ciało o ciężarze 1,5 kG i rozciągnięto ją o 4,0 cm powyżej długości równowagowej. Ciało to leży na doskonale gładkiej poziomej powierzchni, po jego puszczeniu obserwujemy więc ruch harmoniczny prosty.

(a) Jaki jest współczynnik sprężystości sprężyny?

Siła 0,75 kG działająca na sprężynę powoduje przemieszczenie końca sprężyny o 0,03 m, stąd

$$k = \frac{F}{x} = \frac{0,75 \text{ kG}}{0,03 \text{ m}} = 25 \text{ kG/m}.$$

Dlaczego nie używamy tu zależności ze znakiem minus, czyli $k = -F/x$?

(b) Jaką siłą działa sprężyna na ciało zaraz po jego puszczeniu?

Sprężyna została rozciągnięta o 4 cm, czyli o 0,04 m, stąd

$$F = -kx = -(25 \text{ kG/m}) \cdot (0,04 \text{ m}) = -1 \text{ kG}.$$

Znak minus wskazuje, że siła działająca ma kierunek przeciwny do przemieszczenia.

(c) Podać okres drgań ruchu.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{1,5/9,81}{25}} \text{ s} = 0,49 \text{ s}.$$

Odpowiada to częstości $\nu (= 1/T) = 2,0 \text{ Hz}$ i częstości kołowej $\omega (= 2\pi\nu) = 13 \text{ rad/s}$.

(d) Obliczyć amplitudę ruchu.

Maksymalne przemieszczenie odpowiada zerowej energii kinetycznej i maksymalnej energii potencjalnej. Wielkość tę wyznaczamy więc z warunku początkowego, z którego wynika, że przed puszczeniem ciała sprężyna była wydłużona o 4 cm i właśnie taka będzie amplituda A .

(e) Obliczyć maksymalną prędkość drgającego ciała.

Z równania (15-13), $v_{\max} = \omega A = (2\pi/T)A$,

$$v_{\max} = 0,04 \text{ m} \frac{2\pi}{0,49 \text{ s}} = 0,51 \text{ m/s}.$$

Drgające ciało osiąga maksymalną prędkość przechodząc przez położenie równowagi, gdzie $x = 0$. Prędkość osiąga wartość 0,51 m/s dwa razy w ciągu jednego okresu; raz $-0,51 \text{ m/s}$, kiedy ciało przechodzi przez punkt $x = 0$, zaraz po jego puszczeniu, i następnie $+0,51 \text{ m/s}$ w drodze powrotnej.

(f) Jakie jest maksymalne przyspieszenie ciała?

Z równania (15-13) $a_{\max} = \omega^2 A = (k/m)A$,

$$a_{\max} = \frac{0,04 \text{ m} \cdot 25 \text{ kG/m}}{1,5 \text{ kG/9,81 m/s}^2} = 6,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Maksymalne przyspieszenie występuje przy skrajnych wychyleniach, gdzie $x = \pm A$ i $v = 0$. Stąd $a = -6,4 \text{ m/s}^2$ dla $x = +A$ i $a = 6,4 \text{ m/s}^2$ dla $x = -A$. Przyspieszenie i przemieszczenie są względem siebie przeciwnie skierowane.

(g) Obliczyć prędkość, przyspieszenie, energię kinetyczną i potencjalną ciała, kiedy znajduje się ono w połowie drogi między położeniem początkowym a położeniem równowagi.

W punkcie tym

$$x = \frac{1}{2}A = 0,02 \text{ m},$$

tak że z równania (15-18) mamy

$$v = -\frac{2\pi}{T} \sqrt{A^2 - x^2} = -\frac{2\pi}{0,49} \sqrt{0,04^2 - 0,02^2} \text{ m/s} = -0,44 \text{ m/s}.$$

$$a = -\frac{k}{m}x = \frac{-25}{1,5/9,81} \cdot 0,02 \text{ m/s}^2 = -3,3 \text{ m/s}^2,$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1,5}{9,81} \cdot 0,44^2 \text{ kGm} = 0,015 \text{ kGm},$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 0,02^2 \text{ kGm} = 0,005 \text{ kGm}.$$

(h) Obliczyć całkowitą energię układu drgającego.

Dzięki temu, że energia całkowita jest stała podczas ruchu, możemy znaleźć jej wartość obliczając ją w jakimś wybranym punkcie. Korzystając z poprzednich wyników otrzymujemy $E = K + U = 0,015 + 0,005 \text{ kG} \cdot \text{m} = 0,020 \text{ kG} \cdot \text{m}$ (ciało w punkcie $x = \frac{1}{2}A$),

$$E = U_{\max} = \frac{1}{2}kx_{\max}^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,04^2 \text{ kGm} = 0,005 \text{ kGm}$$

(ciało w punkcie $x = A$),

$$E = K_{\max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1,5}{9,81} \cdot 0,51^2 \text{ kGm} = 0,020 \text{ kGm}$$

(ciało w punkcie $x = 0$).

(i) Napisać równanie ruchu ciała.

Ogólne równanie ma postać

$$x = A \cos(\omega t + \varphi).$$

Wiemy już, że $A = 0,04 \text{ m}$. Należy jeszcze określić ω i φ . Otrzymujemy

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,49} = 13 \text{ rad/s}.$$

Po wstawieniu do ogólnego równania:

$$x = 0,04 \cos(13t + \varphi).$$

W chwili $t = 0$, $x = 0,04$ m, zatem

$$x = 0,04 \cos \varphi = 0,034,$$

a stąd

$$\varphi = 0 \text{ rad.}$$

Ostateczne równanie ruchu ma postać

$$x = 0,04 \cos 13t.$$

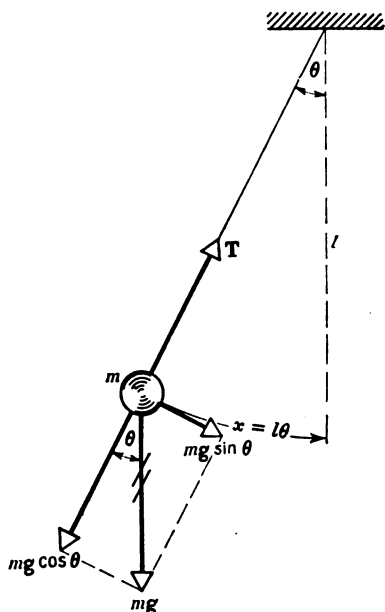
Jest to równanie ruchu naszego ciała przy założeniu, że x jest mierzone w metrach, t — w sekundach, a kąt $13t$ — w radianach.

15-5. Zastosowania ruchu harmonicznego prostego

Rozważymy tu kilka przykładów układów fizycznych, których ruch jest ruchem harmonicznym prostym. Z innymi układami będziemy się spotykali od czasu do czasu w dalszych partiach podręcznika.

Wahadło proste. Wahadło proste jest to wyidealizowane ciało o masie punktowej, zawieszone na cienkiej, nierozciągliwej nici. Kiedy ciało wytrącimy z równowagi, zaczyna się ono wahać w płaszczyźnie pionowej pod wpływem siły ciężkości. Jest to ruch okresowy. Znajdziemy okres tego ruchu.

Rysunek 15-10 przedstawia wahadło o długości l i masie m , odchylone od pionu o kąt θ . Na masę m działa siła przyciągania grawitacyjnego mg i naprężenie nici T . Jako osie współrzędnych przyjmujemy styczną do łuku i przedłużenie promienia. Siłę ciężkości mg rozkładamy na składową radialną $mg \cos \theta$ i składową styczną $mg \sin \theta$. Składowa radialna dostarcza niezbędnego przyspieszenia dośrodkowego do utrzymania ruchu po łuku



Rys. 15-10. Siły działające na wahadło proste: naprężenie nici T i ciężar mg masy m . Zaznaczone są wartości składowej stycznej i radialnej siły mg

okręgu. Składowa styczna jest siłą przywracającą równowagę układu i sprowadza masę m do położenia równowagi. Siła ta wynosi

$$F = -mg\sin\theta.$$

Podkreślamy, że siła F nie jest proporcjonalna do przemieszczenia kąowego θ , lecz do $\sin\theta$. Zatem ruch nie jest prostym ruchem harmonicznym. Jeżeli kąt θ jest mały, to $\sin\theta$ jest bardzo bliskie θ mierzonemu w radianach*. Przemieszczenie wzdłuż łuku wynosi $x = l\theta$ i dla małych kątów ruch jest w przybliżeniu prostoliniowy. Przyjmując przeto, że

$$\sin\theta \cong \theta,$$

otrzymujemy

$$F = -mg\theta = -mg\frac{x}{l} = -\frac{mg}{l}x.$$

Zatem dla *małych przemieszczeń* siła F jest proporcjonalna do przemieszczenia ze znakiem przeciwnym. Jest to właśnie wymagane kryterium dla prostego ruchu harmonicznego. Stała mg/l określa stałą k w równaniu $F = -kx$. (Należy porównać wymiar k i mg/l .) Przy małej amplitudzie okres wahadła prostego wynosi więc

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/l}} \quad \text{lub} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (15-19)$$

Zauważmy, że okres nie zależy od masy wahadła.

Dla wahań o większej amplitudzie wzór na okres ma postać

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{2}{2^2}\sin^2\frac{\theta_m}{2} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2}\sin^4\frac{\theta_m}{2} + \dots\right). \quad (15-20)$$

θ_m jest tu maksymalnym kątowym przemieszczeniem, a kolejne wyrazy w nawiasie są coraz mniejsze. Okres można wyliczyć z dowolną dokładnością urywając sumowanie nieskończonego szeregu na odpowiednim wyrazie. Dla kąta $\theta_m = 15^\circ$ okres rzeczywisty różni się od okresu otrzymanego z wzoru (15-19) o niecałe 0,5%.

Ponieważ okres wahadła prostego praktycznie nie zależy od amplitudy, więc takie wahadło stosujemy do mierzenia czasu. Gdy siły hamujące zmniejszą amplitudę wahań, okres pozostanie prawie zupełnie niezmieniony. Dla wyrównania strat spowodowanych tarcieniem do wahadła zegarowego energia dostarczana jest automatycznie przy pomocy odpowiedniego mechanizmu. Wahadło zegarowe z takim mechanizmem wynalazł Christian Huygens (1629—1695).

Wahadło proste jest również wygodnym narzędziem pomiaru przyspieszenia ziemskiego g . Zamiast wykonywać doświadczenie ze spadkiem swobodnym ciał, wystarczy po prostu zmierzyć l i T .

Wahadło torsyjne. Na rysunku 15-11 przedstawiony jest krążek zawieszony w środku masy. Drut, na którym wisi krążek, jest sztywno zamocowany z obydwu stron. W położeniu równowagi zaznaczono linię radialną przechodzącą przez punkt P . Jeśli krążek obró-

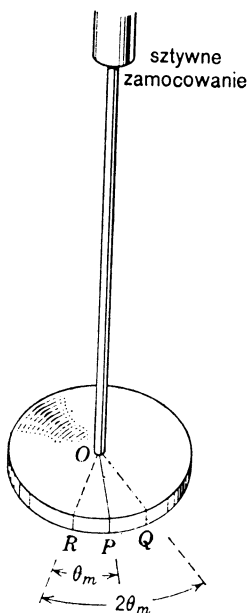
* Na przykład:

θ	$\sin\theta$	Różnica w %
$0^\circ = 0,00000$ rad	0,00000	0,00
$2^\circ = 0,03491$ rad	0,03490	0,03
$5^\circ = 0,08727$ rad	0,08716	0,24
$10^\circ = 0,17453$ rad	0,17365	0,50
$15^\circ = 0,26180$ rad	0,25882	1,14

cimy w płaszczyźnie poziomej do położenia Q , to drut zostanie skręcony. Wtedy na krążek działa moment siły skręconego drutu i stara się przywrócić krążek do położenia P . Moment ten jest momentem siły przywracającej równowagę. Jest on proporcjonalny do wielkości skręcenia, czyli do kąтового przemieszczenia (prawo Hooke'a), zatem

$$\tau = -\kappa\theta. \quad (15-21)$$

Stała κ zależy od właściwości drutu, nazywamy ją *stałą skręcenia* albo *momentem kierującym*. Znak minus wskazuje, że moment siły ma zwrot przeciwny niż przemieszczenie kątowe θ . Równanie (15-21) określa warunki, przy których może zachodzić *kątowy ruch harmoniczny prosty*.



Rys. 15-11. Wahadło torsyjne. Linia łącząca środek z punktem P oscyluje pomiędzy Q i R , zakreślając kąt $2\theta_m$, gdzie θ_m jest (kątową) amplitudą wahań

Równanie ruchu dla takiego układu ma postać

$$\tau = I\alpha = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

a po podstawieniu do równania (15-21) otrzymujemy

$$-\kappa\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

albo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{\kappa}{I}\right). \quad (15-22)$$

Widzimy, że równanie (15-22) dla kątowego ruchu harmonicznego prostego jest podobne do równania (15-7) dla liniowego ruchu harmonicznego prostego. Po prostu podstawiliśmy wielkości kątowe: przemieszczenie kątowe θ i moment bezwładności I na miejsce przemieszczenia liniowego x i masy m . Miejsce stałej k zajął moment kierujący κ . Korzystając z tej odpowiedniości możemy napisać, że rozwiązaniem równania (15-22) jest proste drganie harmoniczne we współrzędnej kątowej θ , a mianowicie

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \varphi). \quad (15-23)$$

θ_m jest tutaj maksymalnym przemieszczeniem kątowym, czyli amplitudą drgań. Na rysunku 15-11 przedstawiony jest krążek drgający wokół położenia równowagi $\theta = 0$ (linia OP). Całkowity kąt obrotu wynosi $2\theta_m$ (od OQ do OR). Okres drgań, przez analogię z równaniem (15-10), wynosi

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\kappa}}. \quad (15-24)$$

Znając κ i mierząc T możemy wyznaczyć moment bezwładności drgającego ciała sztywnego. Natomiast znając I i mierząc T mamy możliwość wyznaczenia stałej κ dla dowolnego drutu. Wiele przyrządów laboratoryjnych zawiera w sobie wahadło torsyjne, np. galwanometry. Wahadłem torsyjnym jest waga Cavendisha (rozdział 16). Innym przykładem kąтового ruchu harmonicznego jest ruch balansu w zegarkach; przywracający równowagę moment siły pochodzi tam od spiralnego włosa-sprężyny.

Przykład 2. Cienki pręt o masie 0,10 kg i długości 0,10 m zawieszony jest na drucie, który przechodzi przez jego środek ciężkości i jest prostopadły do pręta. Po skróceniu drutu pręt zaczyna drgać. Okres wahań wynosi 2,0 s. Kiedy w podobny sposób zawieszono ciało płaskie o kształcie trójkąta równobocznego, okazało się, że okres wahań wyniósł 6,0 s. Znaleźć moment bezwładności tego trójkąta względem osi obrotu.

Moment bezwładności pręta wynosi $\frac{1}{12} Ml^2$ (patrz tablica 12-1).

Zatem

$$I_{\text{pręta}} = \frac{0,1 \text{ kg} \cdot (0,1 \text{ m})^2}{12} = 8,3 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Z równania (15.24) mamy

$$\frac{T_{\text{pręta}}}{T_{\text{trójkąta}}} = \left(\frac{I_{\text{pręta}}}{I_{\text{trójkąta}}} \right)^{1/2} \quad \text{lub} \quad I_{\text{trójkąta}} = I_{\text{pręta}} \left(\frac{T_{\text{trójkąta}}}{T_{\text{pręta}}} \right)^2,$$

tak że

$$I_{\text{trójkąta}} = 8,3 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \left(\frac{6,0 \text{ s}}{2,0 \text{ s}} \right)^2 = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Czy w tym przypadku amplituda wpływa na okres?

Wahadło fizyczne. Dowolne ciało sztywne zawieszone tak, że może się wahać dookoła pewnej osi przechodzącej przez to ciało, nazywamy wahadłem fizycznym. Wahadło proste, czyli pojedynczy punkt materialny zawieszony na nieważkiej nici, jest szczególnym przypadkiem wahadła fizycznego. W rzeczywistości wszystkie realne wahadła są wahadłami fizycznymi.

Dla wygody przyjmijmy, że nasze wahadło jest ciałem płaskim, wyciętym na przykład ze sklejk przy pomocy piły włosowej, i założmy, że oś oscylacji jest prostopadła do powierzchni tego ciała. Robiąc takie ograniczenia nie tracimy niczego istotnego.

Na rysunku 15-12 przedstawione jest ciało o nieregularnym kształcie, które może się obracać bez tarcia dookoła poziomej osi przechodzącej przez punkt P . Zostało ono odchylone od położenia równowagi o kąt θ . Położeniem równowagi jest takie położenie, w którym środek masy ciała C leży na linii pionowej przechodzącej przez P . Odległość między osią obrotu przechodzącą przez punkt P a środkiem masy C oznaczamy przez d , a moment bezwładności względem osi obrotu przez I . Masa ciała wynosi M . Przywracający równowagę moment siły przy kątowym przemieszczeniu θ równa się

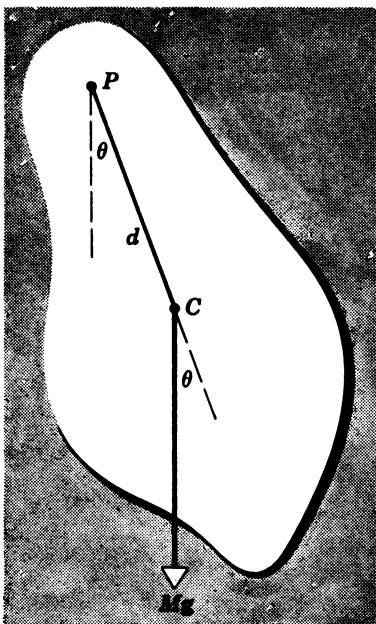
$$\tau = -Mgd \sin \theta;$$

pochodzi on od składowej stycznej siły ciężkości. Ponieważ τ jest proporcjonalne do $\sin\theta$, a nie do θ więc, w ogólności, nie jest tu spełniony warunek konieczny do tego, żeby ruch był ruchem harmonicznym prostym. Jednakże dla małych wychyleń zależność $\sin\theta \cong \theta$, jak poprzednio, jest dobrym przybliżeniem. Zatem dla małych amplitud

$$\tau = -Mgd\theta \quad \text{albo} \quad \tau = -\kappa\theta,$$

gdzie

$$\kappa = Mgd.$$



Rys. 15-12. Płaskie wahadło fizyczne o środku masy C zawieszone w punkcie P . Odchylenie jest określone przez kąt θ zawarty między pionem a odcinkiem d (kiedy C leży dokładnie pod P , wahadło jest w stanie równowagi). Ciężar wahadła Mg dostarcza momentu siły przywracającego równowagę

Lecz

$$\tau = I \frac{d^2\theta}{dt^2} = I\alpha,$$

tak że

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{\tau}{I} = -\frac{\kappa}{I}\theta.$$

Stąd, okres drgań wahadła fizycznego przy małych amplitudach wychylenia wynosi

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\kappa}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgd}}. \quad (15-25)$$

Przy wyższych amplitudach wahadło fizyczne zachowuje ruch okresowy, lecz nie jest to już prosty ruch harmoniczny.

Podkreślamy, że rozważanie nasze dotyczy obiektu o dowolnym kształcie, zawieszonego na dowolnej osi. Jako przypadek szczególny rozważmy punktową masę m zawieszoną na nieważkiej nici o długości l . Wówczas

$$I = ml^2, \quad M = m, \quad d = l,$$

tak że

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{g}},$$

a zatem jest to okres wahadła prostego przy małych amplitudach. Wahadło fizyczne często stosuje się przy dokładnych pomiarach g .

Z równania (15-25) możemy otrzymać moment bezwładności w postaci

$$I = \frac{T^2 Mgd}{4\pi^2}. \quad (15-26)$$

Wszystkie wielkości po prawej stronie równania dają się bezpośrednio zmierzyć. Środek masy znajdujemy sposobem przedstawionym na rys. 14-4. Moment bezwładności względem osi obrotu (inne niż oś przechodząca przez środek masy) dla ciała o dowolnym kształcie można więc określić zawieszając je jako wahadło fizyczne na tej osi.

Przykład 3. Znaleźć długość wahadła prostego, którego okres jest równy okresowi danego wahadła fizycznego.

Porównując ze sobą okresy wahań fizycznego i prostego otrzymujemy

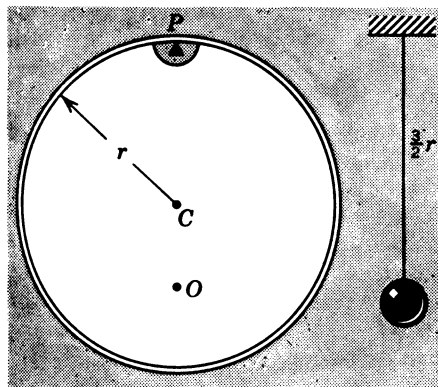
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgl}}$$

albo

$$l = \frac{I}{Md}. \quad (15-27)$$

Jeśli interesuje nas tylko okres wahań, to masę wahadła fizycznego można uważać za skoncentrowaną w punkcie odległym od osi obrotu o $l = I/Md$. Punkt ten nazywamy *środkiem wahań* wahadła fizycznego. Podkreślamy, że położenie tego środka zależy od wyboru osi obrotu dla danego ciała.

Przykład 4. Krążek jest zawieszony w punkcie leżącym na jego obwodzie (rys. 15-13). Znaleźć okres małych drgań i podać długość równoważnego wahadła prostego.



Rys. 15-13. Przykład 4. Wahadło fizyczne w kształcie krążka zawieszonego w punkcie P , na obwodzie. Obok wahadło proste mające ten sam okres drgań. Punkt O jest środkiem wahań

Moment bezwładności krążka względem osi przechodzącej przez jego środek wynosi $\frac{1}{2} Mr^2$, gdzie r jest promieniem, a M masą krążka. Natomiast moment bezwładności względem osi przechodzącej przez punkt leżący na obwodzie wynosi

$$I = \frac{1}{2} Mr^2 + Mr^2 = \frac{3}{2} Mr^2.$$

Zatem okres dla $d = r$ wynosi

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgr}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{3}{2} Mr^2}{\frac{3}{2} Mgr}} = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g}}$$

i jest niezależny od masy krążka.

Wahadło proste o tym samym okresie ma długość

$$l = \frac{I}{Mr} = \frac{3}{2}r$$

albo $\frac{3}{2}$ średnicy krążka. Krążek zawieszony w punkcie P ma środek wahań w O , czyli $\frac{3}{2}r$ poniżej punktu zawieszenia. Czy równoważne wahadło proste powinno mieć określoną masę?

Jeśli zawiesimy krążek w dowolnym punkcie leżącym w połowie odległości między obwodem a środkiem, np. w punkcie O , to okaże się, że $I = \frac{3}{2}Mr^2$, $d = \frac{1}{2}r$, a okres

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3}{2} \frac{r}{g}},$$

czyli tak samo jak poprzednio. Widzimy tu ogólną właściwość środka wahań O i punktu zawieszenia P . Jeżeli wahadło zawiesimy na osi przechodzącej przez punkt O , to okres nie zmieni się, a punkt P będzie nowym środkiem wahań. Jaki okres drgań miałby krążek zawieszony w środku symetrii C ?

Przykład 5. Środek wahań wahadła fizycznego ma jeszcze inną interesującą właściwość. Jeżeli w punkcie będącym środkiem wahań podziałamy siłą impulsową (skierowaną poziomo w płaszczyźnie drgań), w punkcie zawieszenia wahadła nie pojawi się siła reakcji. Udowodnimy to dla siły impulsowej F skierowanej w lewo i działającej na punkt O na rys. 15-13. Zakładamy, że w chwili początkowej wahadło znajdowało się w spoczynku.

W rozważanym przypadku nakładają się na siebie przesunięcie i obrót (patrz § 12-7). Gdybyśmy rozważali jedynie ruch postępowy, punkt P na rys. 15-13 przesunąłby się w lewo z przyspieszeniem

$$a_1 = F/M.$$

Przy rozważaniu jedynie obrotu, pojawiłoby się przyspieszenie kątowe względem punktu C , o kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara i wartości

$$\begin{aligned}\alpha &= \tau/I \\ &= (F)(\frac{1}{2}r)/(\frac{1}{2}Mr^2) \\ &= F/Mr.\end{aligned}$$

Dzięki temu przyspieszeniu punkt P przesunąłby się w prawo z przyspieszeniem liniowym

$$\begin{aligned}a_r &= \alpha r \\ &= (F/Mr)(r) = F/M.\end{aligned}$$

Łatwo zauważyć, że $a_1 = -a_r$, wobec czego punkt P pozostaje w spoczynku.

Biorąc pod uwagę omawianą właściwość środek wahań nazywa się często *środkiem uderzenia*. Grający w baseball wiedzą dobrze, że jeżeli piłka nie zostanie uderzona odpowiednim miejscem palanta (środkiem uderzenia), kij szarpie ich rękę. Kierunek szarpnięcia zależy od tego, po której stronie rozważanego miejsca piłka zderzyła się z palantem.

Przykład 6. Okres drgań krążka o promieniu 10,2 cm wykonującego małe drgania względem punktu na obwodzie wynosi 0,784 s. Znaleźć wartość przyspieszenia ziemskiego g w miejscu, gdzie znajduje się krążek.

Ze wzoru $T = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}r/g}$ otrzymamy

$$g = \frac{6\pi^2 r}{T^2}.$$

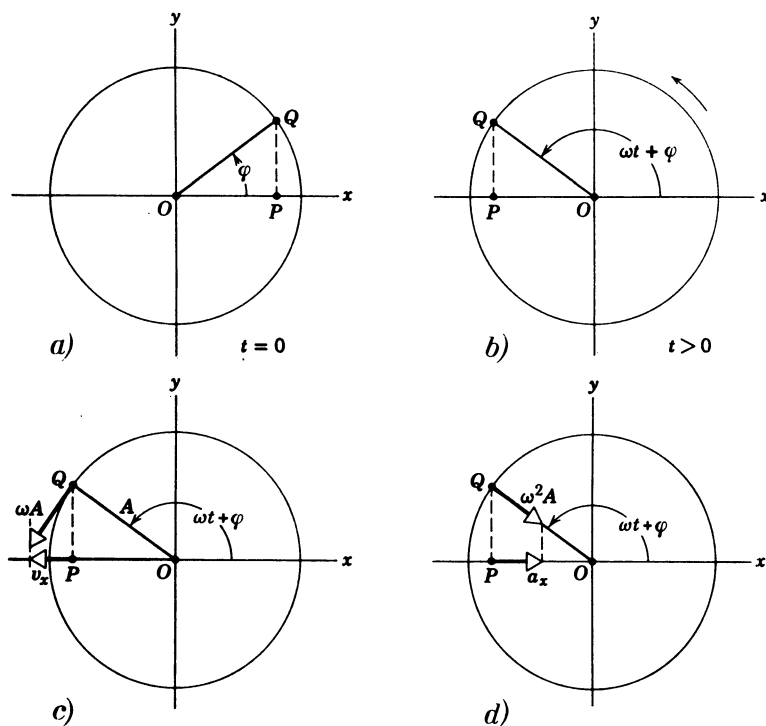
Dla $T = 0,784$ s i $r = 10,0$ cm przyspieszenie g wynosi

$$g = \frac{6\pi^2 10,2}{0,784^2} \text{ cm/s}^2 = 982 \text{ cm/s}^2 = 9,82 \text{ m/s}^2.$$

15-6. Związek między ruchem harmonicznym prostym a ruchem jednostajnym po okręgu

Rozważmy zależność między prostym ruchem harmonicznym a ruchem jednostajnym po okręgu. Zależność ta ułatwia opisanie wielu cech prostego ruchu harmonicznego. Pozwala ona również określić geometryczne znaczenie częstości kołowej ω i stałej fazowej φ . Ruch jednostajny po okręgu jest także przykładem kombinacji prostych ruchów harmoniczných; ze zjawiskiem tym będziemy się często spotykać w ruchu falowym.

Na rysunku 15-14 przedstawiono punkt Q poruszający się po okręgu o promieniu A ze stałą prędkością kątową ω rad/s. Punkt P jest rzutem prostokątnym punktu Q na oś poziomą, czyli średnicę wzdłuż osi x . Nazwijmy punkt Q *punktem odniesienia*, a okrąg po którym on się porusza, *okręgiem odniesienia*. Kiedy punkt odniesienia obiega okrąg, punkt P porusza się tam i z powrotem wzdłuż poziomej średnicy. Składowa x przemieszczenia punktu Q jest zawsze taka sama, jak przemieszczenie punktu P ; podobnie składowe v_x i a_x prędkości i przyspieszenia punktu Q są takie same, jak prędkości i przyspieszenie punktu P .



Rys. 15-14. Zależność między ruchem harmonicznym a ruchem jednostajnym po okręgu. Punkt Q porusza się ruchem jednostajnym po okręgu, a jego rzut P — ruchem harmonicznym prostym. Q ma prędkość kątową ω , P ma częstość kołową ω . (a) i (b) Składowa x przemieszczenia punktu Q jest zawsze równa przemieszczeniu punktu P . (c) Składowa v_x prędkości punktu Q jest zawsze równa prędkości punktu P . (d) Składowa a_x przyspieszenia punktu Q jest zawsze równa przyspieszeniu punktu P .

Niech kąt między promieniem OQ i osią x w chwili $t = 0$ wynosi φ . W dowolnej późniejszej chwili t kąt między OQ i osią x równa się $(\omega t + \varphi)$, bowiem punkt Q porusza się ze stałą prędkością kątową. Współrzędna x punktu Q w dowolnej chwili wynosi

$$x = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (15-28)$$

Przeto punkt P będący rzutem punktu Q porusza się prostym ruchem harmonicznym wzdłuż osi x . *Ruch harmoniczny prosty można zatem opisać jako rzut jednostajnego ruchu po okręgu na jego średnicę.*

Częstość kołowa ω w ruchu harmonicznym prostym równa się prędkości kątowej punktu poruszającego się po okręgu. Natomiast częstość ν ruchu harmonicznego prostego

równa się liczbie pełnych obiegów punktu odniesienia w jednostce czasu. Zatem $\nu = \omega/2\pi$ albo $\omega = 2\pi\nu$. Czas jednego obiegu po okręgu pokrywa się z okresem ruchu harmonicznego T , czyli $T = 2\pi/\omega$ albo $\omega = 2\pi/T$. Faza ruchu harmonicznego prostego ($\omega t + \varphi$) równa się kątowi, jaki tworzy promień OQ z osią x w dowolnej chwili t (rys. 15-14b, c, d). Stałą fazową φ czyli początkową fazą ruchu (rys. 15-14a) jest kąt, jaki tworzy promień OQ z osią x w czasie $t = 0$. Amplituda prostego ruchu harmonicznego jest taka sama, jak promień okręgu odniesienia.

Prędkość styczna punktu odniesienia Q wynosi po prostu ωA , a składowa v_x tej prędkości (rys. 15-14c)

$$v_x = -\omega A \sin(\omega t + \varphi).$$

Znak minus wskazuje na to, że v jest ujemne, kiedy punkty Q i P poruszają się w lewą stronę, a dodatnie, kiedy poruszają się w prawą stronę; v_x znika w skrajnych położeniach punktu P , w których $(\omega t + \varphi)$ przyjmuje wartość 0 i π .

Przyspieszenie punktu Q jest skierowane wzdłuż promienia do środka okręgu i wynosi $\omega^2 A$. Przyspieszenie rzutu, czyli punktu P , równa się składowej a_x przyspieszenia punktu Q (rys. 15-14d). Stąd

$$a_x = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$$

wyraża przyspieszenie punktu poruszającego się prostym ruchem harmonicznym; a_x znika w punkcie środkowym, gdzie $\omega t + \varphi = \frac{1}{2}\pi$ albo $\frac{3}{2}\pi$, jak należało oczekiwać

Wszystkie te wzory są identyczne z wzorami otrzymanymi dla prostego ruchu harmonicznego. [Patrz równanie (15-13).]

Gdybyśmy rzutowali punkt Q na oś y , to równanie ruchu rzutu miałoby postać

$$y = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (15-29)$$

czyli byłby to również ruch harmoniczny prosty. Jedyną różnicą w porównaniu z (15-28) byłaby różnica faz; jeżeli bowiem zastąpimy φ przez $\varphi - \pi/2$, to $\cos(\omega t + \varphi)$ przejdzie w $\sin(\omega t + \varphi)$. Z tego wyraźnie widać, że rzut ruchu jednostajnego po okręgu na dowolną jego średnicę daje prosty ruch harmoniczny.

I przeciwnie, jednostajny ruch po okręgu można przedstawić jako kombinację dwóch ruchów harmonicznym prostych. Jest to suma dwóch ruchów harmonicznym prostych zachodzących wzdłuż linii wzajemnie prostopadłych, mających tę samą amplitudę i częstość, lecz różniących się w fazie o 90° . Kiedy jedna ze składowych ma maksymalne wychylenie, druga składowa znajduje się w położeniu równowagi. Jeżeli weźmiemy kombinację tych składowych [równania (15-28) i (15-29)], natychmiast otrzymamy zależność

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = A.$$

Jeżeli napiszemy wyrażenie na v_x i a_x , i weźmiemy kombinację odpowiednich wielkości, to

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega A,$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \omega^2 A.$$

Zależności te przedstawiają kolejno wielkość przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia w ruchu jednostajnym po okręgu koła.

Możemy analizować znacznie bardziej skomplikowane ruchy będące kombinacjami indywidualnych ruchów harmonicznym prostych. Ruch po okręgu koła jest szczególnie prostą kombinacją. W następnym paragrafie będziemy rozważać inne kombinacje ruchów harmonicznym prostych.

Przykład 7. W przykładzie 1 rozważaliśmy poziomy ruch harmoniczny prosty pewnego ciała. Równanie tego ruchu (jednostki?) miało postać

$$x = 0,04 \cos 13t.$$

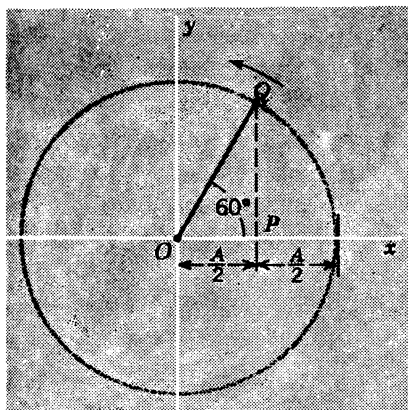
Ruch ten może być również przedstawiony jako rzut punktu poruszającego się ruchem jednostajnym po okręgu na poziomą średnicę.

(a) Określić właściwości odpowiedniego ruchu jednostajnego po okręgu. Składowa x ruchu po okręgu wyraża się wzorem

$$x = A \cos(\omega t + \varphi).$$

Ażby równanie miało postać $x = 0,04 \cos 13t$ dla rzutu na kierunek poziomy, wspomniany okrąg musi mieć promień $A = 0,04$ m, faza początkowa czyli stała fazowa φ musi być równa 0, a prędkość kątowna ω musi być równa 13 rad/s.

(b) Na podstawie ruchu punktu po okręgu określić czas potrzebny na to, aby ciało przebyło połowę drogi w kierunku środka toru, licząc od położenia początkowego.



Rys. 15-15. Przykład 7. Pokazane jest położenie punktów Q i P z rys. 15-14, dla $\omega t = 60^\circ$

Gdy ciało przebędzie połowę drogi, punkt na okręgu wykona obrót o kąt $\omega t = 60^\circ$ (rys. 15-15). Prędkość kątowna jest stała, 13 rad/s, a więc czas potrzebny na wykonanie obrotu o 60° wynosi

$$t = \frac{60^\circ}{\omega} = \frac{\frac{1}{3}\pi \text{ rad}}{13 \text{ rad/s}} = \frac{\pi}{39} \text{ s} = 0,045 \text{ s}.$$

Czas ten może być również wyliczony bezpośrednio z równania ruchu. A więc

$$x = 0,04 \cos 13t, \quad x = \frac{1}{2}A = 0,02,$$

zatem

$$0,02 = 0,04 \cos 13t \quad \text{lub} \quad 13t = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3};$$

ostatecznie

$$t = \frac{\pi}{39} \text{ s} = 0,045 \text{ s}.$$

15-7. Składanie ruchów harmoniczných

W wielu przypadkach dodaje się dwa liniowe ruchy harmoniczne proste *wzajemnie prostopadłe*. Powstały w wyniku tego ruch jest sumą dwóch niezależnych drgań. Rozważmy na początku przypadek, w którym częstotliwości drgań są takie same, np.

$$\begin{aligned} x &= A_x \cos(\omega t + \varphi_x), \\ y &= A_y \cos(\omega t + \varphi_y). \end{aligned} \tag{15-30}$$

Ruchy wzdłuż x i y mają jednak różne amplitudy i fazy.

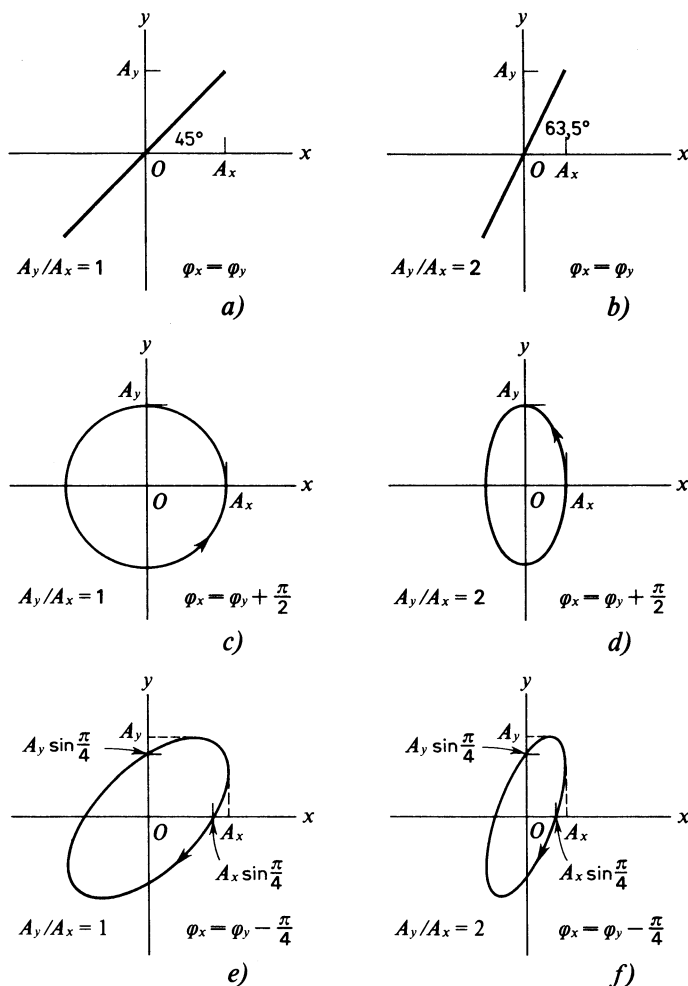
Gdy fazy początkowe są takie same, a więc $\varphi_x = \varphi_y = \varphi$, tor powstałego ruchu jest linią prostą. Można to wykazać na drodze analitycznej. Eliminując t z równań

$$x = A_x \cos(\omega t + \varphi), \quad y = A_y \cos(\omega t + \varphi),$$

otrzymujemy

$$y = (A_y/A_x)x.$$

Jest to równanie linii prostej o nachyleniu określonym przez stosunek A_y/A_x . Na rysunku 15-16a i b pokazany jest tor wypadkowego ruchu dla dwóch przypadków, gdy $A_y/A_x = 1$ oraz $A_y/A_x = 2$. W tych przypadkach obydwa wychylenia y i x osiągają jednocześnie maksimum i jednocześnie minimum. Mówimy wtedy, że są one w jednakowej fazie.



Rys. 15-16. Ruch harmoniczny prosty w przestrzeni dwuwymiarowej. (a) Amplitudy ruchów w kierunkach x i y , mianowicie A_x i A_y , są takie same, podobnie jak ich stałe fazowe. (b) Amplituda A_y jest dwukrotnie większa od amplitudy A_x , lecz ich stałe fazowe są jednakowe. (c) Amplitudy obu ruchów są równe, lecz „ x ” wyprzedza „ y ” w fazie o 90°. (d) Tak samo jak w (c), z tą różnicą, że amplituda A_y jest dwukrotnie większa od amplitudy A_x . (e) Amplitudy są równe, lecz x opóźnia się w fazie względem y o 45°. (f) Tak samo jak w (c), z tą różnicą, że amplituda A_y jest dwukrotnie większa od amplitudy A_x .

Jeżeli fazy początkowe są różne, tor powstałego ruchu nie jest linią prostą. Na przykład, jeżeli różnią się one o $\frac{1}{2}\pi$, to maksymalne wychylenie x następuje wtedy, gdy wychylenie y równa się zeru i na odwrót. Gdy amplitudy są równe, wtedy tor powstałego ruchu jest okręgiem; gdy amplitudy są różne, wtedy tor powstałego ruchu jest elipsą. Na rysunku 15-16c i d pokazane są dwa przypadki $A_y/A_x = 1$ i $A_y/A_x = 2$ dla $\varphi_x = \varphi_y + \frac{1}{2}\pi$. Przypadki $A_y/A_x = 1$ i $A_y/A_x = 2$ dla $\varphi_x = \varphi_y - \frac{1}{4}\pi$ są przedstawione na rys. 15-16e i f.

Ponieważ okrąg i odcinek prostej są szczególnymi przypadkami elipsy, więc wszystkie możliwe kombinacje dwóch prostych ruchów harmoniczných odbywających się pod kątami prostymi i mających tę samą częstość, odpowiadają torom eliptycznym. Można to wykazać na drodze analitycznej eliminując czas z równań (15-30). Czytelnik może przekonać się, że otrzymane równanie przedstawia elipsę. Kształt elipsy zależy tylko od stosunku amplitud, A_y/A_x , oraz od różnicy faz pomiędzy tymi dwoma drganiami, $\varphi_x - \varphi_y$. Rzeczywisty ruch może być zgodny z ruchem wskazówek zegara albo przeciwny do ruchu wskazówek zegara, zależnie od różnicy faz ruchów składowych.

Obrazy składanych ruchów harmoniczných można otrzymać w najprostszy sposób przy pomocy oscyloskopu. Elektrony w oscyloskopie są odchylane przez dwa pola elektryczne skierowane względem siebie pod kątem prostym. Natężenia tych pól zmieniają się tak jak funkcje sinus, częstości są takie same, natomiast fazy i amplitudy mogą być zmieniane. Dzięki temu elektrony mogą wykreślać na ekranie fluorescencyjnym różne, omawiane wyżej, obrazy. Takie obrazy możemy również wytworzyć mechanicznie za pomocą prostego wahadła wykonującego drgania o małej amplitudzie, którego ruch nie jest ograniczony do jednej płaszczyzny pionowej. Kombinacje dwóch ruchów harmoniczných prostych wzajemnie prostopadłych i mających te same częstości są szczególnie ważne w badaniu światła spolaryzowanego i obwodów prądu zmiennego.

Kombinacje prostych ruchów harmoniczných o tej samej częstości i odbywających się *w tym samym kierunku*, lecz o różnych amplitudach i fazach, są specjalnie interesujące przy badaniu dyfrakcji i interferencji światła, dźwięku i promieniowania elektromagnetycznego. Zagadnienia te będą omawiane później.

Jeżeli składane są dwa drgania *o różnych częstościach*, wzajemnie prostopadłe, to powstały w wyniku tego ruch jest bardziej skomplikowany. Ruch ten nie jest nawet okresowy, chyba że stosunek częstości składowych ω_1 i ω_2 jest równy stosunkowi liczb całkowitych (patrz zadanie 49). Można również składać drgania o różnych częstościach odbywające się w tym samym kierunku. Rozpatrywanie takiego ruchu jest szczególnie ważne w przypadku drgań dźwiękowych; sprawa ta będzie omawiana w rozdziale 20.

15-8. Drgania dwu ciał

Prosty oscylator harmoniczny przedstawiony na rys. 15-4 składa się z masy m połączonej z nieruchomą ścianą za pomocą sprężyny o stałej sprężystości k . Ściana jest sztywno połączona z ziemią, układ taki jest więc w rzeczywistości układem dwóch ciał (z których jedno ma masę nieskończenie wielką) połączonych sprężyną. Ściana w czasie ruchu drgającego tego układu pozostaje w spoczynku w inercjalnym układzie odniesienia, a zmiana długości sprężyny jest równa przemieszczeniu masy m . Koniec sprężyny przyczepiony do ściany nie zmienia swego położenia. Energię potencjalną $U(x)$ tego układu drgającego (patrz rys. 15-4) zdefiniowaliśmy jako funkcję przemieszczenia x samej tylko masy m (patrz rys. 15-3, 15-9). Takie przedstawienie energii potencjalnej jest uzasadnione faktem, że jeden koniec sprężyny jest połączony z nieskończenie dużą masą, tak że wydłużenie sprężyny jest określone wyłącznie przez ruch masy m .

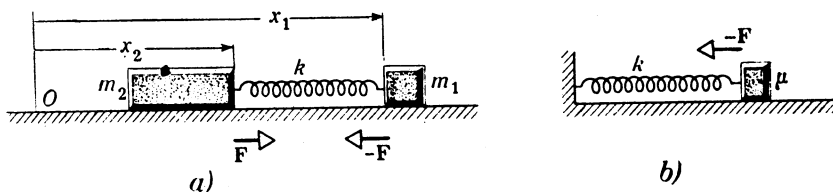
W przyrodzie często możemy spotkać drgające układy dwóch ciał, których masy są porównywalne (*nie możemy* przyjąć, że masa jednego z ciał jest nieskończona). Wówczas musimy rozważać ruch obydwu ciał w odpowiednio wybranym inercjalnym układzie odniesienia. Częsteczki dwuatomowe, takie jak H_2 , CO, HCl i inne, są przykładami takich drgających układów dwóch ciał. Atomy mogą wykonywać oscylacje wzdłuż osi symetrii cząsteczek. Między atomami w takich cząsteczkach występuje sprzężenie elektromagnetyczne. Ale dla naszych celów możemy sobie wyobrazić, że atomy w cząsteczce dwuatomowej są połączone delikatną nieważką sprężyną.

Zadziwiającą rzeczą w ruchu drgającym dwóch ciał jest to, że możemy opisać ten ruch, posługując się tymi samymi równaniami, które wyprowadziliśmy dla układu z jednym ciałem (rys. 15-4). Należy tylko wprowadzić nowe pojęcie (*masy zredukowanej*) i nieco zmienić oznaczenia. Postaramy się to wykazać poniżej.

Rysunek 15-17a przedstawia dwa ciała o masach m_1 i m_2 połączone (nieważką) sprężyną o współczynniku sprężystości k . Układ może wykonywać oscylacje na poziomej, doskonale gładkiej powierzchni. Położenia końców sprężyny określamy współrzędnymi $x_1(t)$ i $x_2(t)$. Długość sprężyny w każdej chwili jest dana różnicą $x_1 - x_2$. Jeżeli długość swobodnej sprężyny wynosi l , to *zmiana* długości sprężyny $x(t)$ w czasie wyraża się równaniem

$$x = (x_1 - x_2) - l. \quad (15-31)$$

Jeżeli x jest dodatnie, to sprężyna jest rozciągnięta, jeżeli $x = 0$, to sprężyna jest swobodna i ma długość normalną l , a jeżeli x jest ujemne, to sprężyna jest ściśnięta.



Rys. 15-17. Dwa ciała o masach m_1 i m_2 połączone (nieważką) sprężyną o długości swobodnej l . (b) Jedno ciało o masie μ (masa zredukowana) połączone identyczną sprężyną ze sztywną ścianą

Zaczynamy od konkretnego przypadku, w którym sprężyna jest rozciągnięta, czyli $x > 0$ (rys. 15-17a). Sprężyna oddziałuje siłą F na masę m_2 i siłą $-F$ na masę m_1 . Te dwie siły są przeciwnie skierowane, jak to przedstawia rysunek, i mają tę samą wartość bezwzględną $F = kx$.

Stosując drugą zasadę Newtona, $F = ma$, dla mas m_1 i m_2 otrzymujemy

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -kx$$

oraz

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = +kx.$$

Pomnożmy teraz pierwsze równanie przez m_2 , a drugie przez m_1 i odejmijmy je od siebie stronami. Otrzymujemy

$$m_1 m_2 \frac{d^2 x_1}{dt^2} - m_1 m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -m_2 kx - m_1 kx,$$

co możemy przepisać jako

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2}{dt^2} (x_1 - x_2) = -kx. \quad (15-32)$$

Nazwijmy wielkość $m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$, mającą wymiar masy, *masą zredukowaną* układu, i oznaczmy ją symbolem μ ; czyli

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (15-33)$$

Ponieważ l jest wielkością stałą, więc $d^2(x_1 - x_2)/dt^2 = d^2x/dt^2$ [patrz równ. (15-31)] i równanie (15-32) przyjmuje znaną nam postać

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{\mu}x = 0. \quad (15-34)$$

Jest to równanie identyczne pod względem formy z równaniem (15-5), które wyprowadziliśmy dla drgań pojedynczego ciała przedstawionego na rys. 15-4. Występują tu dwie różnice: (1) x w równaniu (15-34) oznacza *względne* przemieszczenie dwu mas z ich położenia równowagi [patrz równanie (15-31)], a nie przemieszczenie pojedynczego ciała z jego położenia równowagi; (2) μ oznacza tu *zredukowaną masę* dwu ciał, a nie masę pojedynczego ciała. Łatwo zauważyć na podstawie równania (15-33), napisanego w postaci

$$\mu = m_1 \frac{m_2}{m_1 + m_2} = m_2 \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

albo

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2},$$

że (dla skończonych mas) μ jest zawsze *mniejsze* niż m_1 oraz m_2 ; dlatego nosi ono nazwę *masy zredukowanej*. Z równania (15-34) otrzymujemy, postępując analogicznie jak w przypadku równania (15-6), wyrażenia

$$v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}}, \quad (15-35)$$

na częstość i okres drgań układu z rys. 15-17a. Widzimy, że rozważany układ ma tę samą częstość i okres jak pojedyncze ciało o masie μ związane podobną sprężyną z nieruchomą ścianą (rys. 15-17b). Innymi słowy, ruch drgający dwóch ciał przedstawiony na rys. 15-17a jest równoważny ruchowi drgającemu jednego ciała zilustrowanemu na rys. 15-17b. Jedno ciało porusza się względem drugiego tak, jakby to drugie było nieruchome. Masa ciała poruszającego się jest w tym przypadku zredukowana do wartości μ . Pojęcie masy zredukowanej jest szeroko stosowane w fizyce.

Możemy rozwiązać równanie (15-34), podobnie jak to uczyniliśmy w paragrafie 15-3, otrzymując zależność

$$\begin{aligned} x &= A \cos(\omega t + \varphi), \\ v &= dx/dt = -\omega A \sin(\omega t + \varphi), \\ a &= dv/dt = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned}$$

Są one takie same jak zależności (15-13), ale teraz x , v i a oznaczają odpowiednio względne przemieszczenie, prędkość i przyspieszenie obu mas. Tak więc

$$\begin{aligned} x &= (x_1 - x_2) - l, \\ v &= dx/dt = v_1 - v_2, \\ a &= dv/dt = a_1 - a_2; \end{aligned} \quad (15-36)$$

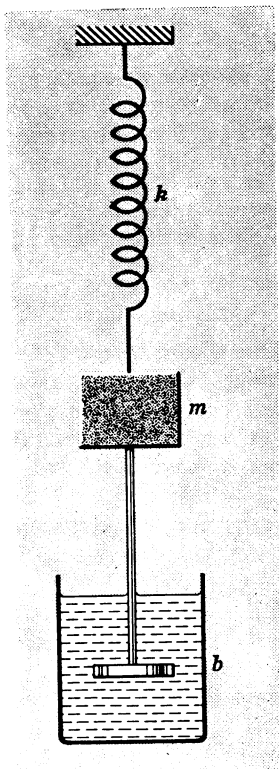
wskaźniki 1 i 2 odnoszą się do dwóch mas.

Energia potencjalna dwuciałowego oscylatora harmonicznego prostego wyraża się przez $U(x) = \frac{1}{2} kx^2$. Ponieważ x zależy od położenia obydwu mas [patrz równanie (15-36)], to energia potencjalna jest wielkością charakterystyczną dla układu jako całości.

Wiele rzeczywistych oscylatorów składających się z dwóch ciał zaliczamy do grupy oscylatorów harmoniczych, chociaż nie są one oscylatorami harmonicznymi prostymi. Wykresy ich energii potencjalnych nie są krzywymi parabolicznymi, podobnie jak krzywa z rys. 8-7a odnosząca się do cząsteczki dwuatomowej. Ale nawet takie oscylatory zachowują się jak oscylatory harmoniczne proste, jeżeli ich amplitudy drgań względem punktu równowagi są dostatecznie małe. Zwracamy uwagę, że x na rys. 8-7a ma inne znaczenie niż to, które przypisaliśmy tej wielkości w tym rozdziale; jest to po prostu rzeczywista odległość ciał, a nie różnica między rzeczywistą odległością a odległością w stanie równowagi [patrz równanie (15-36)]. Dlatego położenie równowagi trwałej na rys. 8-7a nie odpowiada wartości $x = 0$, jak na rys. 15-2, ale wartości $x = \sqrt[6]{2a/b}$. Wynika to tylko z innego położenia początku osi x , względem której została wykreślona krzywa energii potencjalnej. Nie jest to więc różnica zasadnicza.

15-9. Ruch harmoniczny tłumiony

Dotychczas zakładaliśmy, że na rozpatrywany oscylator nie działają żadne siły tarcia. Gdyby tak było, wtedy wahadło lub ciężarek na sprężynie drgałby nieskończenie długo. W rzeczywistości w wyniku działania tarcia amplituda drgań zmniejsza się stopniowo, aż do zera. Mówimy, że taki ruch jest tłumiony przez tarcie; nazywamy go *ruchem harmonicznym tłumionym*. Tarcie często powstaje na skutek występowania oporu powietrza lub sił wewnętrznych. Wartość siły tarcia zależy od prędkości. W większości przypadków, stanowiących przedmiot naszego zainteresowania, siła tarcia jest proporcjonalna do prędkości ciała i przeciwnie do niej skierowana. Na rysunku 15-18 pokazany jest przykład oscylatora tłumionego.



Rys. 15-18. Przykład oscylatora tłumionego. Krążek jest przymocowany do ciała o masie m i zanurzony w cieczy, która tłumí jego ruch siłą równą $-b dx/dt$. Siła sprężysta przywracająca równowagę jest równa $-kx$

Równanie ruchu dla prostego tłumionego oscylatora harmonicznego daje nam zasada dynamiki, $F = ma$. W tym równaniu F jest sumą siły $-kx$ sprowadzającej drgające ciało do położenia równowagi oraz siły tłumiącej $-b dx/dt$. Stała b jest dodatnia. Otrzymujemy więc w rezultacie

$$F = ma,$$

czyli

$$-kx - b \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

lub

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0. \quad (15-37)$$

Jeżeli stała b jest mała, to rozwiązaniem tego równania (podanym bez dowodu)* jest wyrażenie

$$x = Ae^{-bt/2m} \cos(\omega' t + \varphi), \quad (15-38)$$

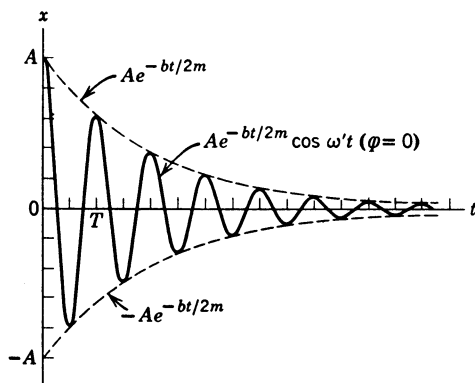
* Patrz: W. Rubinowicz, W. Królikowski, *Mechanika teoretyczna*, PWN, Warszawa 1978 (przyp. tłum.).

gdzie

$$\omega' = 2\pi\nu' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}. \quad (15-39)$$

Na rysunku 15-19 przedstawione jest przemieszczenie x jako funkcja czasu t , dla ruchu drgającego o słabym tłumieniu.

Rozwiązanie to możemy interpretować w następujący sposób. Po pierwsze, gdy występuje tarcie, częstość jest mniejsza, a okres dłuższy. Tarcie powoduje spowolnienie ruchu, czego należało się spodziewać. Gdyby tarcie nie występowało, b byłoby równe zero, a ω byłoby równe $\sqrt{k/m}$, czyli ω , tzn. częstości kołowej ruchu nietłumionego. Gdy występuje tarcie, ω' jest mniejsze od ω , co widać z równania (15-39). Po drugie, amplituda ruchu stopniowo maleje do zera. Przedział czasu τ , po którym amplituda ruchu drgającego tłumionego spada do $1/e$ wartości początkowej, nazywamy *średnim czasem życia* oscylacji. Czynniki amplitudowy wynosi $Ae^{-b\tau/2m}$, tak że $\tau = 2m/b$. I znowu, gdyby tarcie nie występowało, b byłoby równe zero i amplituda zachowałaby stałą wartość A w miarę upływu czasu.



Rys. 15-19. Wykres ruchu harmonicznego tłumionego w zależności od czasu. Taki ruch jest drganiem o stale zmniejszającej się amplitudzie. Krzywa (— — —) jest wykresem amplitudy w zależności od czasu. Z rysunku widać, że wielkość amplitudy w chwili początkowej równa się A i zanika wykładniczo, dążąc do zera, gdy $t \rightarrow \infty$

Jeśli siła tarcia jest dostatecznie duża, b staje się tak wielkie, że równanie (15-38) nie może być dłużej prawdziwym rozwiązaniem równania ruchu. Wtedy ruch w ogóle nie będzie okresowy. Ciało powraca jedynie do położenia równowagi, po uwolnieniu ze swego początkowego wychylenia A .

W ruchu harmonicznym tłumionym energia oscylatora w wyniku tarcia ulega stopniowemu rozpraszaniu i z biegiem czasu zmniejsza się do zera.

15-10. Drgania wymuszone i rezonans

Dotychczas omawialiśmy jedynie naturalne drgania ciała, tzn. drgania, które pojawiają się wtedy, gdy ciało zostaje wychylone z położenia równowagi, a następnie puszczone swobodnie. Dla ciała o masie m , przymocowanego do sprężyny, częstość własna wynosi

$$\omega = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

jeżeli nie występują siły tarcia, oraz

$$\omega' = 2\pi\nu' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2},$$

w przypadku kiedy występujące siły tarcia $b\nu$ są niewielkie.

Jednak odmienna sytuacja powstaje wtedy, gdy na ciało działa zewnętrzna siła okresowa. Jako przykład można wymienić następujące zjawiska: most drga pod wpływem maszerującej przez niego kolumny żołnierzy; osłona silnika drga wskutek impulsów wywołanych przez nieregularności wału, widełki stroikowe (kamerton) wykonują drgania, gdy są poddane działaniu siły okresowej pochodzącej od fali głosowej.

Drgania, które powstają w tych zjawiskach, nazywamy drganiami *wymuszonymi*. Drgania wymuszone mają częstość taką, z jaką działa *siła zewnętrzna*, a nie taką, jaka jest częstość własna ciała. Jednak reakcja ciała zależy od stosunku, jaki zachodzi pomiędzy częstością wymuszoną a częstością własną. Kolejne impulsy, nawet niewielkie, ale następujące w odpowiednich chwilach (zsynchronizowane), mogą doprowadzić do drgań o dużej amplitudzie. Dziecko bawiące się huśtawką stwierdza, że przez popychanie jej w odpowiednich odstępach czasu można doprowadzić do ruchu drgającego o dużej amplitudzie. Zagadnienie drgań wymuszonych jest zagadnieniem bardzo ogólnym. Rozwiązanie tego zagadnienia zostało wykorzystane w urządzeniach akustycznych, w obwodach prądu zmiennego, w fizyce atomowej oraz w mechanice.

Równanie ruchu dla oscylatora o wymuszonej częstości drgań wynika z drugiej zasady dynamiki. Prócz siły $-kx$ sprowadzającej ciało drgające do położenia równowagi i siły tłumienia $-b dx/dt$ występuje jeszcze okresowa siła zewnętrzna. Niech siła zewnętrzna wyraża się dla prostoty następująco: $F_m \cos \omega'' t$, gdzie F_m jest maksymalną wartością siły zewnętrznej, a $\omega'' (= 2\pi\nu'')$ jest jej częstością kołową. Możemy sobie wyobrazić, że siła ta jest przyłożona bezpośrednio do ciała o masie m zawieszonego tak jak na rys. 15-18.

Z równania $F = ma$ otrzymujemy

$$-kx - b \frac{dx}{dt} + F_m \cos \omega'' t = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

lub

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F_m \cos \omega'' t. \quad (15-40)$$

Rozwiązaniem tego równania (podanym bez dowodu)* jest

$$x = \frac{F_m}{G} \sin(\omega'' t - \varphi), \quad (15-41)$$

gdzie

$$G = \sqrt{m^2(\omega''^2 - \omega^2)^2 + b^2 \omega''^2} \quad (15-42)$$

oraz

$$\varphi = \arccos \frac{b\omega''}{G}. \quad (15-43)$$

Rozważmy przedstawiony wyżej ruch pod względem jakościowym.

Zwróćmy uwagę [równanie (15-41)], że układ drga z częstością równą częstości siły wymuszającej ω'' , a nie z częstością własną ω , oraz że ruch ten jest ruchem harmonicznym nietłumionym.

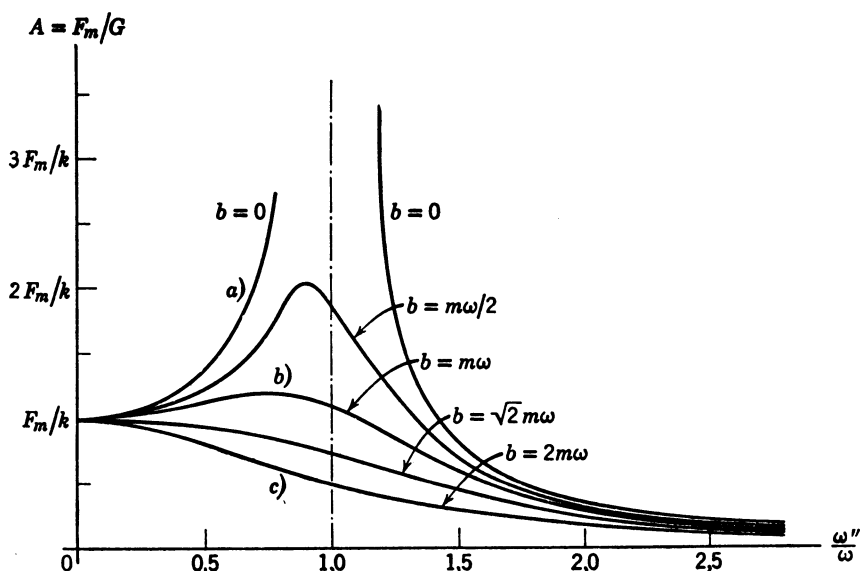
Jest to najprostszy przypadek, gdy nie występuje tłumienie, tzn. gdy w równaniu (15-42) $b = 0$. Czynniki G , który dla $b = 0$ ma wartość bezwzględną $|m(\omega''^2 - \omega^2)|$, jest duży, gdy częstość siły wymuszającej ω'' bardzo różni się od nietłumionej częstości własnej układu ω . Oznacza to, że amplituda F_m/G powstałego ruchu jest mała. Jeśli częstość wymuszająca zbliża się do nietłumionej częstości własnej, tzn. gdy $\omega'' \rightarrow \omega$, to $G \rightarrow 0$, a amplituda $F_m/G \rightarrow \infty$. W rzeczywistości zawsze występuje tłumienie, tak że amplituda drgań, chociaż może stać się bardzo duża, pozostaje jednak w praktyce wielkością skończoną.

Dla rzeczywistych oscylatorów tłumionych [dla których $b \neq 0$ — równanie (15-42)] przy pewnej charakterystycznej wartości częstości wymuszającej ω'' , amplituda oscylacji osiąga maksimum. Takie zjawisko nazywa się *rezonansem***². Częstość ω'' , przy której pojawia się maksymalna amplituda drgań wymuszonych danego układu, nazywamy *częstością rezonansową*. Im mniejsze tłumienie układu, tym częstość rezonansowa bliższa jest częstości ω układu nietłumionego. Często tłumienie jest na tyle małe, że popełniając niewielki błąd możemy uważać częstość rezonansową za równą częstości własnej ω układu nietłumionego. Podobnie, przy małym tłumieniu częstość układu tłumionego [patrz równanie (15-39)] jest w przybliżeniu równa częstości własnej układu nietłumionego $\omega (= \sqrt{k/m})$.

* Patrz przypis na str. 372 (przyp. tłum.).

** Rezonans, zdefiniowany tu jako zjawisko zachodzące przy częstości, dla której drgania wymuszone mają największą amplitudę, może być zdefiniowany inaczej, np. jako zjawisko zachodzące przy częstości, dla której z urządzenia wymuszającego drgania do układu drgającego jest dostarczana maksymalna moc, lub dla której szybkość drgającej masy jest największa. Definicje te nie są równoważne; będziemy jeszcze omawiać to zagadnienie, gdy zajmiemy się wymuszonymi drganiami elektrycznymi; patrz zadanie 55.

Na rysunku 15-20 przedstawiliśmy pięć wykresów amplitudy drgań wymuszonych jako funkcji stosunku częstości wymuszającej ω'' do częstości własnej ω . Każda z tych pięciu krzywych odpowiada innej wartości stałej tłumienia b . Krzywa (a) pokazuje amplitudę przy braku tłumienia, tzn. gdy $b = 0$. Jak już widzieliśmy w tym przypadku przy $\omega'' = \omega$, amplituda przyjmuje wartość nieskończoną, ponieważ energia jest dostarczana do układu w sposób ciągły przez działającą z zewnątrz siłę i nie jest ona rozpraszana w układzie. W rzeczywistości pewne tarcie zawsze jest obecne, tak że amplituda osiąga wartość bardzo dużą, ale skończoną. Oczywiście, jeśli amplituda jest na tyle duża, że nie obowiązuje już prawo Hooke'a i zostaje przekroczona granica sprężystości układu, wówczas układu tego nie opisuje już równanie (15-40). Często w takim przypadku układ ulega zniszczeniu, jak było z mostem Tacoma (rys. 15-21). Krzywe (b) i (c) podają amplitudy drgań wymuszonych dla dwu przypadków o wzrastającym tłumieniu.

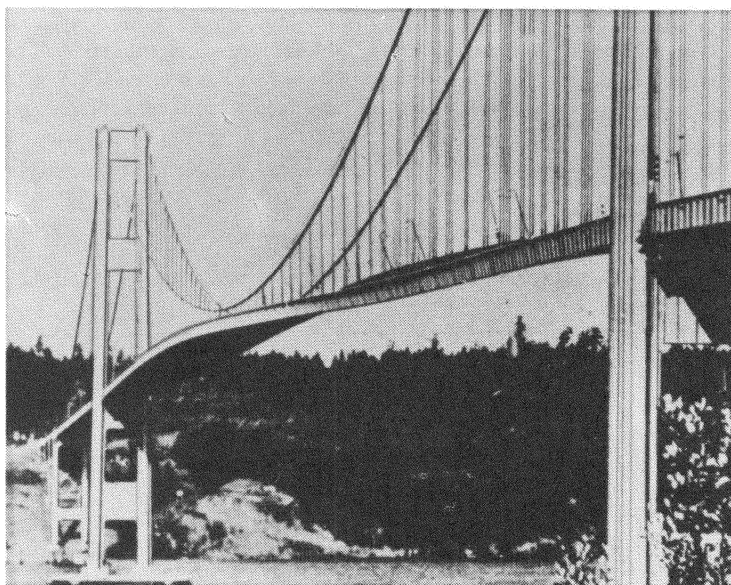


Rys. 15-20. Wykres amplitudy drgań wymuszonych, tłumionego oscylatora harmonicznego w zależności od stosunku częstości wymuszającej ω'' do nietłumionej częstości własnej ω . Na rysunku przedstawiono krzywe dla pięciu różnych stopni tłumienia. Krzywa (a) przedstawia przypadek bez tłumienia, a krzywa (c) przypadek o silnym tłumieniu. Zwróćmy uwagę na to, że rezonansowy wierzchołek krzywej przesuwają się coraz bliżej ku linii przerywanej ($\omega''/\omega = 1$), gdy b staje się coraz mniejsze

Przemieszczenie wywołane stałą siłą F_m przyłożoną do układu o stałej sprężystości k , jest po prostu równe F_m/k . Zwróćmy uwagę na to (rys. 15-20), że amplituda drgań wymuszonych jest duża w porównaniu z tym statycznym przemieszczeniem. Kolumna żołnierzy maszerujących równym krokiem przez most może doprowadzić do powstania drgań tego mostu. Jeśli zdarza się, że częstość drgań wywołana ich krokiem będzie równa częstości własnej mostu, to amplituda powstałych drgań może stać się katastrofalnie duża. Aby tego uniknąć, żołnierze przechodzą most krokiem dowolnym. Zjawisko rezonansu, jak przekonamy się później, jest zjawiskiem bardzo istotnym dla wielu urządzeń elektrycznych, akustycznych i atomowych.

Pytania

1. Podać kilka przykładów ruchów, które w przybliżeniu są ruchami harmonicznymi prostymi. Dlaczego rzadko spotyka się ruchy będące ruchami harmonicznymi prostymi?
2. Typowa sprężyna drzewiowa w swoim normalnym stanie jest naprężona w kierunku ściskającym, to znaczy sąsiednie zwoje silnie przylegają do siebie. Czy taka sprężyna podlega prawu Hooke'a.
3. Czy choćby w przybliżeniu podlega prawu Hooke'a trampolina? Zwojowa sprężyna wykonana z ołowianego drutu?



Rys. 15-21. W dniu 1 lipca 1940 r. został ukończony i otwarty dla ruchu most nad cieśniną Tacoma w Puget Sound, w stanie Washington. Most ten miał przęsło, które wówczas pod względem długości zajmowało trzecie miejsce na świecie. Zaledwie w cztery miesiące później, niezbyt silna wichura wprawiła most w takie drgania, że główne przęsło zostało złamane i po oderwaniu się od lin runęło do wody. W wyniku działania wiatru o stałej prędkości powstała siła fluktuująca, będąca w rezonansie z drganiami własnymi konstrukcji. Spowodowało to tak silny wzrost amplitudy, że most został zniszczony. Po tym wypadku poprawiono konstrukcję wielu innych mostów, aby uczynić je stabilnymi pod względem aerodynamicznym

4. Na sprężynie o współczynniku sprężystości k zawieszono jest ciało o masie m . Po przecięciu sprężyny na połowy, to samo ciało zawieszono na jednej połowie sprężyny. Jaki jest stosunek częstości drgań przed i po przecięciu sprężyny?

5. Nie naprężona sprężyna ma współczynnik sprężystości k . Ulega ona rozciągnięciu przez zawieszony ciężar i pozostaje w stanie równowagi przed przekroczeniem granicy sprężystości. Czy sprężyna ma ten sam współczynnik sprężystości dla przemieszczeń względem nowego położenia równowagi?

6. Przypuśćmy, że nie znamy masy ciała ani współczynnika sprężystości sprężyny, na której to ciało jest zawieszone. Pokazać, w jaki sposób możemy wyznaczyć okres drgań układu ciało-sprężyna przez zwykły pomiar wydłużenia sprężyny pod wpływem tego ciała.

7. Każda rzeczywista sprężyna ma masę. Wyjaśnić jakościowo, jak zmieni się wyrażenie na okres drgań dla układu sprężyna-ciężarek, jeżeli weźmie się pod uwagę tę masę. (Patrz zadanie 31.)

8. Czy można sobie wyobrazić oscylator, który nawet przy małych amplitudach nie jest prostym oscylatorem harmonicznym? To znaczy, czy siła przywracająca równowagę w oscylatorze może być nieliniowa dla dowolnie małych amplitud?

9. Jak wpłynie podwojenie amplitudy na następujące cechy ruchu harmonicznego prostego: okres, stała sprężysta, całkowita energia mechaniczna, maksymalna prędkość, maksymalne przyspieszenie?

10. Jakie zmiany w oscylatorze harmonicznym mogą doprowadzić do podwojenia maksymalnej prędkości masy drgającej?

11. O wymianie energii w układzie masa-sprężyna myślimy jako o przemianach U w K i K w U , takich, by ich suma E pozostawała stała; patrz rys. 15-9. Badamy drgania masy znajdującej się między dwiema napiętymi sprężynami, jak na rys. 15-23. Student mówi: „Przyjmijmy, że masa jest chwilowo w spoczynku, w położeniu skrajnego wychylenia. W tym stanie $K = 0$. Gdy masa zaczyna się poruszać w kierunku swojego położenia równowagi, K rośnie. Ponieważ dla sprężyny $U = \frac{1}{2}kx^2$ [równ. (8-11)], obie sprężyny zwiększają swoją energię potencjalną, gdyż znak x (ściskanie lub rozciąganie) nie ma tu znaczenia. A więc zarówno K jak i U rosną. Jak więc ich suma ($= E$) może być stała? Jaki jest błąd w tym rozumowaniu?

12. Mężczyzna stoi na wadze, jaką miewamy w łazienkach, spoczywającej na platformie zawieszzonej na potężnej sprężynie. Cały układ wykonuje proste drgania harmoniczne w kierunku pionowym. Opisz zmiany wskazań wagi w ciągu jednego okresu ruchu.

13. Czy jest możliwe zbudowanie wahadła prostego?

14. Czy wzorce masy, długości i czasu mogłyby być oparte na właściwościach wahadła? Wyjaśnić to.

15. Pokazać, że kiedy amplituda θ_m w równaniu (15-20) zbliża się do 180° , to okres dąży do nieskończoności. Czy tak może być rzeczywiście?

16. Przewidzieć za pomocą rozważań jakościowych, czy okres wahań wahadła drgającego z dużymi amplitudami będzie większy, czy też mniejszy od okresu tego wahadła drgającego z małymi amplitudami. (Rozważyć przypadki krańcowe.)

17. Co się dzieje z częstością huśtawki, gdy amplituda jej wahań zmniejsza się?

18. Jak wpływa na okres wahadła ruch jego punktu zawieszenia? (a) Punkt zawieszenia porusza się poziomo z przyspieszeniem a ; (b) porusza się pionowo w górę z przyspieszeniem a ; (c) porusza się pionowo w dół z przyspieszeniem $a < g$.

Czy któryś przypadek odnosi się do wahadła przytwierdzonego do wózka staczającego się w dół po równi pochyłej?

19. Dlaczego nie można stosować równania (15-26) do określenia momentu bezwładności I w przypadku, gdy oś obrotu przechodzi przez środek masy? Czy równanie to stosuje się do takiej osi? Jak możemy określić I dla tej osi posługując się wahadłem fizycznym?

20. Pustą kulę napełniono wodą przez mały otwór i zawieszono na długiej nici otworem w dół, tak że woda powoli wycieka. Obserwując wahania tego wahadła zauważono, że w miarę wypływu wody okres początkowo wzrasta, a później maleje. Wyjaśnić dlaczego?

21. a) Masa m sznurka wahadła, na którym wisi ciężarek o masie M , powoduje wzrost okresu wahań w porównaniu z okresem wahadła prostego, dla którego $m = 0$. Uzasadnij to. b) Chociaż masa sznurka wahadła powoduje wzrost jego okresu, sam sznurek o długości l , bez jakiegokolwiek masy na końcu ($M = 0$), waha się z okresem mniejszym niż okres wahadła prostego o długości l . Uzasadnij to. (Patrz artykuł: Effect of the Mass of the Cord on the Period of a Simple Pendulum, napisany przez H. L. Armstronga, w *American Journal of Physics*, June, 1976.)

22. Dwa wahadła, z których każde składa się z krążka przytwierdzonego do lekkiego pręta są identyczne, z wyjątkiem sposobu połączenia krążka z prętem. W jednym wahadle pręt jest połączony sztywno z krążkiem, a w drugim za pomocą łożyska kulowego (krążek zatem może swobodnie obracać się dookoła końca pręta). Obydwa wahadła wychylono do tej samej wysokości i puszczono w ruch. Które ma większy okres wahań? Wyjaśnić, dlaczego.

23. Czy zmieni się po przeniesieniu na Księżyc częstość drgań wahadła torsyjnego? wahadła prostego? oscylatora masa-sprężyna? wahadła fizycznego?

24. W jaki sposób możemy użyć wahadła do wykreslenia krzywych sinusoidalnych?

25. Jakie składowe ruchy harmoniczne proste dadzą w wyniku figurę o kształcie cyfry 8?

26. Czy istnieje związek pomiędzy siłą jako funkcją odległości między dwoma atomami w cząsteczce, a makroskopową zależnością pomiędzy siłą i odległością x w sprężynie?

27. a) W jakich okolicznościach masa zredukowana układu dwóch ciał byłaby równa masie jednego ciała? Wyjaśnij to. b) Ile wynosi masa zredukowana, gdy ciała mają równe masy? c) Czy przypadki a) i b) dają ekstremalne wartości masy zredukowanej.

28. Dlaczego w wielu maszynach stosuje się urządzenia tłumiące drgania? Podaj przykład.

29. Podać przykład znanego zjawiska, gdzie dużą rolę odgrywa rezonans.

30. Księżycowe przypiły oceanu są o wiele ważniejsze niż przypiły słoneczne (patrz pytanie 18 z rozdziału 16). Jednakże przypiły ziemskiej atmosfery zachowują się przeciwnie. Używając pojęcia rezonansu i wiedząc, że atmosfera ma okres drgań własnych równy około 12 godzin, wyjaśnić różnicę w zachowaniu się wód oceanu i powietrza atmosferycznego.

Zadania

Paragraf 15-3

1. Ciało o masie 4 kg rozciąga sprężynę wydłużając ją o 16 cm w porównaniu z jej długością przed rozciągnięciem. Ciało to zostaje usunięte, a na jego miejsce zawieszamy ciało o masie 0,5 kg. Obliczyć okres drgań sprężyny po obciążeniu drugim ciałem.

Odp.: 0,28 s.

2. Ciało o masie 2 kg wisi na sprężynie. Sprężyna ta ulega dodatkowemu rozciągnięciu o 2 cm, jeżeli pod tym ciałem zawieszamy ciało o masie 300 g. Następnie ostatnie ciało usuwamy i sprężyna zostaje wprawiona w ruch drgający. Znaleźć okres drgań tego ruchu.

3. Skala wagi sprężynowej ma zakres od 0 do 32 kG oraz długość 20 cm. Na wadze tej zawieszono paczkę, która wykonuje drgania pionowe o częstości 2 Hz. Ile waży ta paczka?

Odp.: 9,94 kG.

4. W odniesieniu do drgań pionowych samochodów można traktować jako ciało zamocowane na sprężynach. Dla pewnego samochodu tak dobrano te sprężyny, że częstość jego drgań wynosi 3,0 Hz. (a) Jaka jest stała sprężystości tych sprężyn, jeśli samochód waży 1600 kG? (b) Z jaką częstością będą się odbywały drgania, gdy samochodem jedzie pięciu pasażerów, ważących średnio po 70 kG?

5. (a) Pokazać, że dla każdego prostego ruchu harmonicznego ogólne wyrażenia na okres oraz częstość są następujące:

$$T = 2\pi \sqrt{-\frac{x}{a}}, \quad \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{-\frac{a}{x}}.$$

(b) Pokazać, że dla każdego prostego, kąтового ruchu harmonicznego ogólne wyrażenia na okres oraz częstość są następujące:

$$T = 2\pi \sqrt{-\frac{\theta}{\alpha}}, \quad \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{-\frac{\alpha}{\theta}}.$$

6. Gdy do końca sprężyny przymocowane jest ciało o masie m , drga ono z okresem 2,0 s. Po zwiększeniu tej masy o 2,0 kg stwierdzono, że okres wynosi 3,0 s. Znaleźć wartość m .

7. Punkt materialny wykonuje ruch harmoniczny prosty wokół punktu $x = 0$. W czasie $t = 0$ ma przemieszczenie $x = 0,37$ cm i prędkość zerową. Przy częstości ruchu 0,25 Hz określić (a) okres, (b) częstość kołową, (c) amplitudę, (d) przemieszczenie w chwili t (dowolnej), (e) prędkość w chwili t (dowolnej),

(f) maksymalną prędkość, (g) maksymalne przyspieszenie, (h) przemieszczenie w chwili $t = 3,0$ s i (i) prędkość w chwili $t = 3,0$ s.

Odp.: (a) 4,0 s, (b) $\pi/2$ rad/s, (c) 0,37 cm, (d) $0,37\cos(\pi t/2)$ w centymetrach, (e) $-0,58\sin(\pi t/2)$ w centymetrach na sekundę, (f) 0,58 cm/s, (g) 0,91 cm/s², (h) zero, (i) 0,58 cm/s.

8. Ciało o masie 0,10 kg wykonuje ruch harmoniczny prosty o amplitudzie 1,0 m i okresie 0,20 s. (a) Jaka jest maksymalna wartość siły działającej na to ciało podczas ruchu? (b) Jaki jest współczynnik sprężystości k sprężyny, jeżeli drgania te odbywają się pod wpływem działania sprężyny?

9. Częstotliwości drgań atomów w ciałach stałych, w temperaturze normalnej, są rzędu 10^{13} Hz. Przypuśćmy, że atomy są połączone ze sobą za pomocą „sprężyn”. Przypuśćmy, że jeden atom srebra drga z podaną częstotliwością, natomiast pozostałe są nieruchome. Obliczyć współczynnik sprężystości pojedynczej sprężyny. Jedna gramocząsteczka srebra ma masę 108 g oraz zawiera $6,02 \cdot 10^{23}$ atomów. Założyć, że atom oddziałuje tylko z najbliższymi sąsiadami.

Odp.: 710 N/m.

10. Ciało leży na tłoku, który porusza się prostym ruchem harmonicznym w kierunku pionowym z okresem 1 s. (a) Przy jakiej amplitudzie ciało oddzieli się od tłoka? (b) Jeżeli drgania tłoka mają amplitudę 5 cm, to jaka jest maksymalna częstota, przy której tłok i ciało jeszcze się stykają?

11. Ciało znajduje się na poziomej powierzchni, która porusza się poziomo prostym ruchem harmonicznym z częstotliwością 2 Hz. Współczynnik tarcia statycznego między ciałem a tą powierzchnią wynosi 0,5. Jak duża może być amplituda tego ruchu, aby ciało nie ślizgało się po powierzchni?

Odp.: 3,1 cm.

12. Widelki stroikowe wykonują ruch harmoniczny prosty o częstotliwości 1000 Hz. Amplituda drgań końca jednego z ramion widełek wynosi 0,40 mm. Znaleźć: (a) maksymalne przyspieszenie oraz maksymalną prędkość końca widełek, (b) prędkość oraz przyspieszenie końca widełek w chwili, gdy przemieszczenie wynosi 0,20 mm. (c) Wyrazić położenie końca widełek jako funkcję czasu, przy założeniu, że w chwili $t = 0$ jest on w położeniu równowagi.

13. Ciało wykonuje ruch harmoniczny prosty zgodnie z równaniem

$$x = 6,0\cos(3\pi t + \frac{1}{3}\pi),$$

gdzie x jest podane w metrach, t w sekundach, a zawartość nawiasu w radianach. Jakie jest: (a) przemieszczenie, (b) prędkość, (c) przyspieszenie i (d) faza w chwili $t = 2,0$ s. Znaleźć również (e) częstotliwość ν i (f) okres drgań.

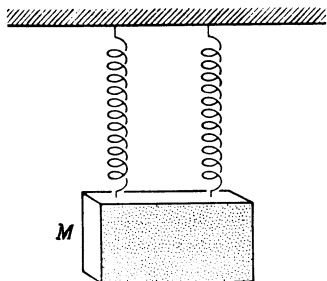
Odp.: (a) 3,0 m, (b) -49 m/s, (c) -270 m/s², (d) 20 rad, (e) 1,5 Hz, (f) 0,67 s.

14. Głośnik wytwarza dźwięki muzyczne dzięki drganiom membrany. Jakie częstotliwości mogą powstawać dla drgań, w których przyspieszenia przekraczają g , jeśli amplituda drgań jest ograniczona do $1,0 \cdot 10^{-3}$ mm.

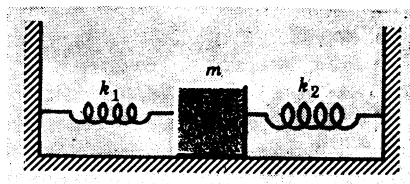
15. Dwa punkty materialne wykonują proste ruchy harmoniczne o równych amplitudach i częstotliwościach wzdłuż jednej linii prostej. Spotykają się one, posuwając się w kierunkach przeciwnych, wówczas, gdy ich przemieszczenia równają się połowie ich amplitudy. Jaka jest różnica faz obu tych ruchów?

Odp.: 120° .

16. Dwa punkty materialne drgają ruchem harmonicznym prostym wzdłuż wspólnego odcinka prostej, o długości A . Każdy z punktów drga z okresem 1,5 s, a różnica faz ruchów wynosi 30° . (a) Jaka jest odległość między punktami (wyrażona w ułamkach A) po upływie 0,50 s od chwili, gdy opóźniający się punkt znalazł się na skraju odcinka? (b) Czy w tym momencie punkty zbliżają się do siebie, czy oddalają i czy poruszają się w tym samym kierunku?



Rys. 15-22. Zadanie 17



Rys. 15-23. Zadanie 19

17. Sprężynę o stałej sprężystości $7,0 \text{ N/m}$ i zaniedbywalnej masie przecięto w połowie długości. (a) Jaka jest stała sprężystości każdej połówki? (b) Dwie połówki, zaczepione oddzielnie podtrzymują klocek o masie M (patrz rys. 15-22). Układ drga z częstotliwością $3,0 \text{ Hz}$. Obliczyć masę M .

Odpo.: (a) 14 N/m , (b) 79 g .

18. Jednorodna sprężyna o długości normalnej (nie naprężona ani nie rozciągnięta) równej l ma współczynnik sprężystości k . Sprężynę przecięto na dwie części o długościach normalnych l_1 i l_2 , gdzie $l_1 = nl_2$ przy n równym liczbie całkowitej. Obliczyć odpowiadające tym odcinkom współczynniki sprężystości k_1 i k_2 , w zależności od n i k . Sprawdzić otrzymany wynik dla $n = 1$ i $n = \infty$.

19. Dwie sprężyny przymocowane są do ciała o masie m i do nieruchomych ścian, jak na rys. 15-23. Pokazać, że częstość drgań w tym przypadku wyraża się wzorem

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}.$$

(Odpowiednikiem elektrycznym tego układu są dwa kondensatory połączone szeregowo.)

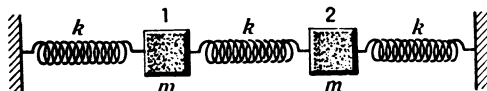
20. Dwie równe masy m i trzy identyczne sprężyny o stałej sprężystości k tworzą układ przedstawiony na rys. 15-24. (a) Niech x_1 i x_2 oznaczają przemieszczenie każdej masy w stosunku do ich położen równowagi.

Pokazać, że

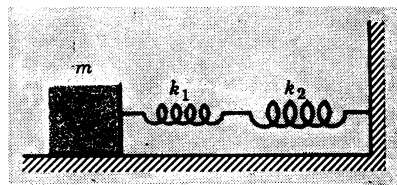
$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = k(x_2 - 2x_1),$$

$$m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = k(x_1 - 2x_2).$$

(b) Znaleźć częstości drgań układu zakładając rozwiązania równań w postaci $x_1 = A_1 \sin \omega t$ i $x_2 = A_2 \sin \omega t$.



Rys. 15-24. Zadanie 20



Rys. 15-25. Zadanie 21

21. Dwie sprężyny złączono i doczepiono do nich ciało o masie m (rys. 15-25). Ciało porusza się po powierzchni bez tarcia. Wykazać, że jeżeli współczynniki sprężystości, oddzielnie dla każdej sprężyny, wynoszą k_1 i k_2 , to częstość drgań tego ciała wyraża się wzorem

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m}}.$$

(Odpowiednikiem elektrycznym tego układu są dwa kondensatory połączone równolegle.)

22. Siłę oddziaływania pomiędzy dwoma atomami w pewnej dwuatomowej cząsteczce można opisać wzorem $F = -a/r^2 + b/r^3$, w którym a i b są dodatnimi stałymi, a r jest odległością między atomami. Wykonaj wykres zależności F od r . Następnie (a) wykaż, że odległość w stanie równowagi wynosi b/a , (b) wykaż, że dla małych drgań wokół położen równowagi, stała sprężystości wynosi a^4/b^3 , (c) oblicz okres tego ruchu.

Paragraf 15-4

23. Sprężyna o zaniedbywalnej masie i współczynniku sprężystości 19 N/m wisi w pozycji pionowej. Do jej wolnego końca zostało przymocowane ciało o masie $0,20 \text{ kg}$, które puszczono w chwili, gdy sprężyna znajdowała się w stanie nierozciągniętym. Znaleźć: (a) odległość od początkowego położenia na jaką przemieści się ciało, (b) częstość oraz (c) amplitudę prostego ruchu harmonicznego, w jaki zostanie wprowadzone to ciało.

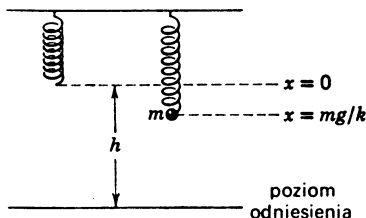
Odpo.: (a) $0,21 \text{ m}$, (b) $1,6 \text{ Hz}$, (c) $0,11 \text{ m}$.

24. Drgający układ masa-sprężyna ma energię mechaniczną 1,0 J, amplitudę 0,10 m i prędkość maksymalną 1,0 m/s. Obliczyć: (a) współczynnik sprężystości sprężyny, (b) masę i (c) częstotliwość drgań.

25. (a) Jaką część całkowitej energii stanowi energia kinetyczna, a jaką potencjalna, jeżeli w ruchu harmonicznym prostym przemieszczenie w pewnej chwili wynosi pół amplitudy A ? (b) Przy jakim przemieszczeniu energia kinetyczna równa jest energii potencjalnej?

Odp.: (a) $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{4}$, (b) $A/\sqrt{2}$.

26. (a) Wykazać, że w prostym ruchu harmonicznym średnia energia potencjalna równa jest średniej energii kinetycznej, jeżeli średnie te wyznaczamy dla całego okresu T . Wykazać, że wartość średnia równa jest $\frac{1}{4}kA^2$. (Patrz rys. 15-9a.) (b) Wykazać, że gdy wyznaczamy średnie energie na drodze równej $2A$, średnia energia potencjalna wynosi $\frac{1}{6}kA^2$, a średnia energia kinetyczna $\frac{1}{3}kA^2$. (Patrz rys. 15-9b.) (c) Wyjaśnić, dlaczego powyższe wyniki (a) i (b) są różne.



Rys. 15-26. Zadanie 27

27. *Pionowa sprężyna w jednorodnym polu grawitacyjnym.* Rozważmy nieważką sprężynę o współczynniku sprężystości k w jednorodnym polu grawitacyjnym. Przywiążmy masę m do tej sprężyny. (a) Pokazać, że jeżeli $x = 0$ oznacza położenie końca sprężyny nierozciągniętej, to położenie równowagi statycznej po obciążeniu sprężyny masą m wynosi $x = mg/k$ (patrz rys. 15-26). (b) Wykazać, że równanie ruchu układu masa-sprężyna jest następujące:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = mg$$

i że rozwiązanie na przemieszczenie masy w funkcji czasu ma postać $x = A \cos(\omega t + \varphi) + mg/k$, gdzie $\omega = \sqrt{k/m}$, jak poprzednio. (c) Wykazać następnie, że układ ten ma takie same wartości ω , v , a , v i T w jednorodnym polu grawitacyjnym, jak i w nieobecności tego pola, z jedną tylko różnicą. Mianowicie, inne jest teraz położenie równowagi, określone wzorem mg/k . (d) Energia układu wynosi więc $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + mg(h-x) = \text{const}$. Pokazać, że zróżniczkowanie tego wyrażenia względem czasu doprowadzi do równania ruchu podanego w punkcie (b). (e) Pokazać, że kiedy masa spada z położenia $x = 0$ do położenia równowagi statycznej $x = mg/k$, połowa straty grawitacyjnej energii potencjalnej idzie na wzrost energii potencjalnej sprężyny, a połowa na wzrost energii kinetycznej układu. (f) Rozważyć ruch układu wokół położenia równowagi statycznej. Wyliczyć oddzielnie zmiany grawitacyjnej energii potencjalnej i energii potencjalnej związanej z siłą sprężystą, gdy masa porusza się w górę na odległość A i kiedy porusza się w dół na tę samą odległość A . Pokazać, że całkowita zmiana energii potencjalnej jest taka sama w obu przypadkach i wynosi $\frac{1}{2}kA^2$.

W świetle wyniku (c) i (f) przy analizie ruchu drgającego można po prostu pominąć jednorodne pole grawitacyjne. Jedyną zmianą, jaką wprowadza to pole, jest przesunięcie punktu odniesienia z $x = 0$ do $x_0 = x - mg/k = 0$. Krzywa nowej energii potencjalnej $U(x_0) = \frac{1}{2}kx_0^2 + \text{const}$ ma taki sam paraboliczny kształt jak krzywa energii potencjalnej przy nieobecności pola grawitacyjnego $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$.

28. Kłoczek o ciężarze 8,0 kG zawieszono na sprężynie o współczynniku sprężystości $k = 3,0$ kG/cm. Z dołu w kierunku klocka wystrzelono z prędkością 500 m/s pocisk ważący 0,10 kG. Pocisk ten utknął w klocek. (a) Znaleźć amplitudę powstałego ruchu harmonicznego prostego. (b) Jaka część początkowej energii kinetycznej pocisku została zmagazynowana w oscylatorze harmonicznym? Czy mamy tu do czynienia ze stratą energii? Wyjaśnić odpowiedź.

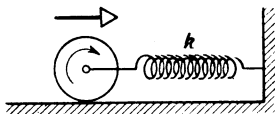
29. Na podstawie równania (15-17), wyrażającego zasadę zachowania energii ($\frac{1}{2}kA^2 = E$), znaleźć wychylenie jako funkcję czasu przez scałkowanie równania (15-18). Porównać z równaniem (15-8).

30. Pełny walec przywiązano do poziomej nieważkiej sprężyny w ten sposób, że może się on toczyć bez poślizgu wzdłuż poziomej powierzchni (rys. 15-27). Współczynnik sprężystości k sprężyny wynosi

3,0 N/m. Sprężynę rozciągnięto o 0,25 m i puszczono. Znaleźć (a) energię kinetyczną ruchu postępowego i (b) obrotowego, w chwili gdy walec przechodzi przez położenie równowagi. (c) Pokazać, że w tych warunkach środek masy walca wykonuje proste drgania harmoniczne z okresem

$$T = 2\pi \sqrt{3M/2k},$$

gdzie M jest masą walca.



Rys. 15-27. Zadanie 30

31. Jeżeli masy sprężyny m_s nie możemy pominąć w porównaniu z masą ciała m zawieszonego na niej, to okres wahań wynosi

$$T = 2\pi \sqrt{(m + m_s/3)/k}.$$

Wyprowadzić tę zależność. (Wskazówka: warunek $m_s \ll m$ równoważny jest założeniu, że sprężyna rozciąga się jednakowo wzdłuż swej długości). (Pełne rozwiązanie ogólnego przypadku w artykule: H. L. Armstrong, *American Journal of Physics*, 37, 447 (1969)).

Paragraf 15-5

32. Jaka jest długość wahadła prostego, którego okres wynosi 1,00 s w punkcie, gdzie przyspieszenie grawitacyjne $g = 981 \text{ cm/s}^2$?

33. W pewnej miejscowości wahadło proste o długości 1,00 m wykonuje 100 całkowitych wahań w ciągu 204 s. Jakie jest przyspieszenie ziemskie w tej miejscowości?

Odp.: 9,49 m/s².

34. Na nici wisi kula o masie 2,0 kg oraz średnicy 0,30 m. Znaleźć okres drgań skrętnych dla małych przemieszczeń kątowych, jeżeli moment kierujący nici wynosi $6,0 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m/rad}$.

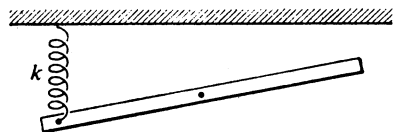
35. Na poziomym gwoździu zawieszono kołową obręcz o promieniu 2,0 m i ciężarze 8,0 kG. (a) Jaka jest jej częstość drgań dla małych wychyleń z położenia równowagi? (b) Jaka jest długość równoważnego jej wahadła prostego?

Odp.: (a) 0,45 Hz, (b) 4,0 m.

36. Określ największą amplitudę drgań wahadła prostego, przy której wzór (15-19) na okres jest poprawny z dokładnością 1,0%.

37. Jednorodny pręt o długości l i masie m może obracać się w płaszczyźnie poziomej wokół pionowej osi przechodzącej przez jego środek. Koniec pręta połączono z nieruchomą ścianą poziomą sprężyną o współczynniku sprężystości k , jak to przedstawiono na rys. 15-28. Jaki jest okres małych drgań, które rozpoczynają się dzięki lekkiemu popchnięciu jednego końca pręta?

Odp.: $2\pi \sqrt{m/3k}$.



Rys. 15-28. Zadanie 37

38. Balans zegara wykonuje drgania o amplitudzie kątowej π rad oraz okresie 0,50 s. Znaleźć (a) maksymalną prędkość kątową tego wahadła, (b) prędkość kątową wahadła, gdy jego wychylenie wynosi $\frac{1}{2}\pi$ rad oraz (c) przyspieszenie kątowe wahadła, gdy wychylenie wynosi $\frac{1}{4}\pi$ rad.

39. (a) Jaka jest częstość wahań wahadła prostego o długości 2,0 m? (b) Jaka jest jego częstość w przypadku, gdy wahadło znajduje się w windzie poruszającej się do góry z przyspieszeniem $2,0 \text{ m/s}^2$, jeżeli amplituda wahań jest mała? (c) Jaka będzie jego częstość, gdy winda spada swobodnie w dół?

Odp.: (a) 0,35 Hz, (b) 0,39 Hz, (c) zero.

40. Wahadło proste o długości l i masie m zawieszono w samochodzie, który porusza się ze stałą prędkością v po okręgu o promieniu R . Jaka będzie częstość oscylacji, jeżeli wahadło wykonuje małe oscylacje wokół swego położenia równowagi?

41. Sprawdź, że dla uogólnionego wahadła fizycznego z rys. 15-12 środek drgań pokrywa się ze środkiem uderzenia. Zapoznaj się z przykładami 4 i 5 jako szczególnymi przypadkami.

42. Mamy wahadło, którym jest cienki pręt o długości l i masie m zamocowany obrotowo w punkcie odległym o d od środka pręta. (a) Obliczyć okres małych drgań tego wahadła, wyrażając go przez d , l , m i g . (b) Pokazać, że okres przyjmuje wartość *minimalną*, gdy $d = l/\sqrt{12} = 0,289 l$.

43. Z blachy metalowej wycięto krążek o średnicy 1,0 m. W krążku wywiercono mały otwór i zawieszono go na gwoździu na ścianie jako wahadło. Oznaczmy przez l odległość od gwoździa do środka krążka. (a) Dla jakiej albo jakich wartości l okres tego wahadła wyniesie 1,7 s? (b) Przypuśćmy, że chcemy mieć najmniejszy możliwy okres wahań; jaka będzie wówczas długość l ?

Odp.: a) 0,30 m; 0,42 m. b) 0,35 m.

44. (a) Wykazać, że maksymalne naprężenie nici wahadła prostego poruszającego się z małą amplitudą θ_m wynosi $mg(1+\theta_m^2)$. (b) W jakim położeniu wahadła naprężenie jest maksymalne?

Paragraf 15-7

45. W oscyloskopie elektrony są odchylane przez dwa wzajemnie prostopadłe pola elektryczne. Odchylenie w danej chwili t jest dane za pomocą wzoru

$$x = A \cos \omega t, \quad y = A \cos(\omega t + \varphi).$$

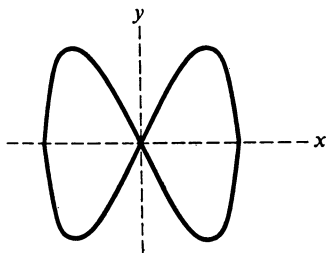
(a) Opisać drogę elektronów i napisać równanie dla $\varphi = 0^\circ$. (b) To samo dla $\varphi = 30^\circ$. (c) To samo dla $\varphi = 90^\circ$.

Odp.: (a) Linia prosta, $y = \pm x$. (b) Elipsa, $y^2 - \sqrt{3}xy + x^2 = A^2/4$. (c) Okrąg, $x^2 + y^2 = A^2$.

46. Narysuj tor punktu poruszającego się na płaszczyźnie x - y zgodnie z równaniami $x = A \cos(\omega t - \pi/2)$, $y = 2A \cos \omega t$.

47. Krzywa przedstawiona na rys. 15-29 jest wynikiem nałożenia dwóch ruchów harmonicznym prostych $x = A_x \cos \omega_x t$ oraz $y = A_y \cos(\omega_y t + \varphi_y)$. (a) Jaka jest wartość A_x/A_y ? (b) Jaka jest wartość ω_x/ω_y ? (c) Jaka jest wartość φ_y ?

Odp.: (a) 1,0, (b) 0,50, (c) $\pm \frac{1}{2} \pi$.



Rys. 15-29. Zadanie 47

48. Cząstka o masie m porusza się na płaszczyźnie tak, że jej położenie określa równanie $\mathbf{r} = A \cos \omega t + jA \cos 3\omega t$. (a) Narysuj tor cząstki. (b) Znajdź zależność momentu pędu od czasu. (c) Znajdź siłę działającą na cząstkę. Znajdź także (d) jej energię potencjalną i (e) jej energię całkowitą jako funkcje czasu. (f) Czy ruch jest okresowy? Jeśli tak, jaki jest okres?

49. *Figury Lissajous*. Kiedy dodajemy dwa drgania liniowe do siebie prostopadłe, to częstotliwości ruchu cząstki wzdłuż kierunków x i y nie muszą być równe. W ogólnym przypadku równania (15-30) przechodzą w równania o postaci

$$x = A_x \cos(\omega_x t + \varphi_x), \quad y = A_y \cos(\omega_y t + \varphi_y).$$

Tor, po którym porusza się cząstka, nie jest już elipsą, lecz nosi nazwę krzywej Lissajous, pochodzącą od nazwiska Jules Antoine Lissajous (1822—1880), który po raz pierwszy zademonstrował te krzywe w roku 1857.

(a) Jeżeli ω_x/ω_y jest liczbą wymierną, to krzywa, która zakreśla punkt materialny, jest krzywą zamkniętą i ruch powtarza się w regularnych odstępach czasu. Przyjmijmy, że $A_x = A_y = A$, i $\varphi_x = \varphi_y = \varphi$, i wyrysujmy krzywe Lissajous dla $\omega_x/\omega_y = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ i 2 .

(b) Niech ω_x/ω_y będzie liczbą wymierną równą $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ albo 2 . Pokażmy, że kształt krzywej Lissajous zależy od różnicy faz $\varphi_x - \varphi_y$. Narysować krzywe dla $\varphi_x - \varphi_y = 0, \pi/4$ i $\pi/2$ rad.

(c) Jeżeli ω_x/ω_y nie jest liczbą wymierną, to krzywe są „otwarte”. Dowieść, że po dostatecznie długim czasie krzywa przejdzie przez każdy punkt leżący w prostokącie o boku $x = A_x$ i $y = \pm A_y$, i że punkt materialny nigdy nie przejdzie dwa razy przez ten sam punkt z tą samą prędkością. Przyjąć wszędzie $q_x = 0$.

Paragraf 15-8

50. (a) Obliczyć masę zredukowaną następujących cząsteczek dwuatomowych: O_2 , HCl i CO . Wyrazić wynik w atomowych jednostkach masy; masa atomu wodoru wynosi w przybliżeniu 1,00 u. (b) Wiadomo, że cząsteczka HCl wykonuje drgania z częstością podstawową $\nu = 8,7 \cdot 10^{13}$ Hz. Jaki jest efektywny „współczynnik sprężystości” k między atomami w tych cząsteczkach? Czy na podstawie doświadczenia ze zwykłymi sprężynami można powiedzieć, że ta „molekularna sprężyna” jest względnie sztywna, czy też nie?

51. (a) Pokazać, że gdy $m_2 \rightarrow \infty$ w równaniu (15-33), to $\mu \rightarrow m_1$. (b) Pokazać, że przy skończonej masie ściany ($m_2 < \infty$) drgania masy m_1 na końcu sprężyny przywiązanej do ściany mają mniejszy okres w porównaniu z drganiami z punktu (a). (c) Pokazać, że gdy $m_2 = m_1$, układ zachowuje się tak, jak gdyby sprężyna była przecięta w połowie i każda masa drgała niezależnie względem środka masy układu.

52. Sprężyna z rys. 15-17a ma współczynnik sprężystości $k = 250$ N/m. Niech $m_1 = 1,0$ kg i $m_2 = 3,0$ kg. (a) Jaka jest częstość drgań układu dwóch ciał? (b) Jaki jest stosunek K_1/K_2 energii kinetycznych tych ciał?

53. Pokazać, że energia kinetyczna oscylatora składającego się z dwóch ciał (rys. 15-17a) wyraża się wzorem $K = \frac{1}{2}\mu v^2$, gdzie μ jest masą zredukowaną, a $v (= v_1 - v_2)$ jest prędkością względną.

Wskazówka: podczas ruchu drgającego pęd układu jest zachowany.

Paragraf 15-9

54. W układzie z rys. 15-18 ciało ma masę 1,5 kg, a współczynnik sprężystości sprężyny $k = 8,0$ N/m. Załóżmy, że ciało wychylono o 12 cm w dół, a następnie puszczono. Przy założeniu, że siła tarcia jest dana wyrażeniem $-b dx/dt$, w którym $b = 0,23$ kg/s, znaleźć liczbę oscylacji wykonanych przez ciało w przedziale czasu potrzebnym na to, by amplituda spadła do trzeciej części wartości początkowej.

Paragraf 15-10

55. Wychodząc z równania (15-41), znaleźć prędkość $v (= dx/dt)$ ruchu drgającego wymuszonego. Pokazać, że maksymalna prędkość $v_m = F_m / [(m\omega''^2 - k/\omega'')^2 + b^2]^{1/2}$.

Równania paragrafu 15-10 są identyczne pod względem formy z równaniami opisującymi obwód elektryczny zawierający opór R , indukcyjność L i pojemność C połączone szeregowo ze zmienną siłą elektromotoryczną $V = V_m \cos \omega'' t$. Dlatego b , m , k i F_m są odpowiednikami R , L , $1/C$ i V_m , a x i v są odpowiednikami ładunku elektrycznego q i prądu i . Odpowiednikiem maksymalnej prędkości v_m w ruchu drgającym wymuszonym jest w obwodzie elektrycznym prąd maksymalny i_m , który używany jest do opisu jakości rezonansu elektrycznego.