

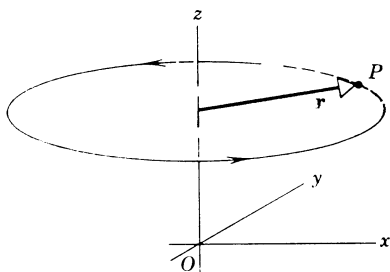
11. Kinematyka ruchu obrotowego

11-1. Ruch obrotowy

Dotąd zajmowaliśmy się głównie ruchem pojedynczych punktów materialnych albo ruchem postępowym ciał sztywnych, tj. takich ciał, których wszystkie punkty mają stałe położenie względem siebie. Oczywiście, w rzeczywistości nie ma ciał doskonale sztywnych, lecz bardzo wiele ciał, takich jak: cząsteczki, stalowe belki, planety i inne, możemy uważać za dostatecznie sztywne, aby móc w wielu zagadnieniach pominąć fakt, że mogą one np. krzywić się, wyginać albo drgać. Jak to ilustruje rys. 3-1, ciało sztywne porusza się czystym ruchem postępowym, jeżeli każdy punkt tego ciała doznaje jednakowych przemieszczeń w miarę upływu dowolnego przedziału czasu.

W tym rozdziale jednakże będziemy zajmowali się ruchem obrotowym a nie postępowym. Nasze rozważania znów ograniczymy do pojedynczych punktów materialnych i ciał sztywnych, co oznacza, że nie będziemy opisywać takich ruchów obrotowych, jak ruch Układu Słonecznego albo ruch wody w wirującej zlewce. Z kolei *ruchy obrotowe ograniczymy tylko do ruchów obrotowych dookoła osi pozostającej w spoczynku w układzie odniesienia, w którym dokonujemy obserwacji ruchu obrotowego.*

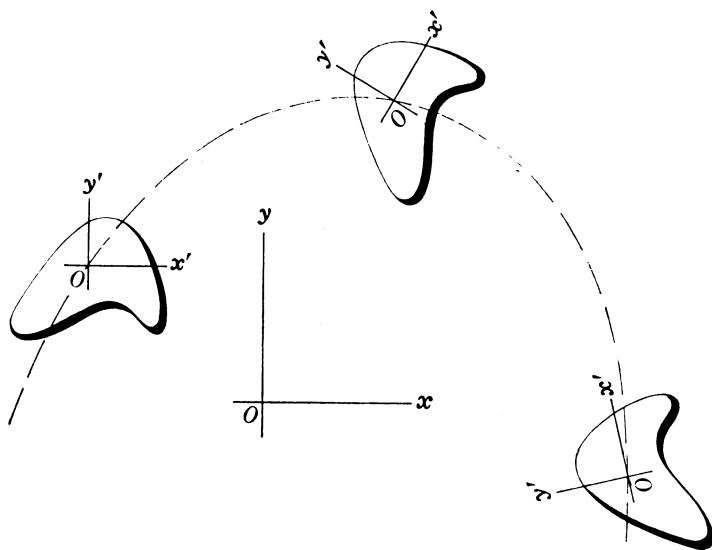
Rysunek 11-1 przedstawia ruch obrotowy ciała sztywnego dookoła nieruchomej osi, w przypadku gdy oś z jest naszym układem odniesienia. Niech punkt P przedstawia punkt materialny ciała sztywnego, dowolnie wybrany, którego położenie opisuje wektor r . Mówimy, że *ciało sztywne porusza się czystym ruchem obrotowym, jeżeli każdy punkt tego ciała* (tak jak P na rys. 11-1) *porusza się po okręgu, a środki wszystkich okręgów leżą na linii prostej, zwanej osią obrotu* (oś z na rys. 11-1). Jeżeli przeprowadzimy linię prostopadłą do osi obrotu z jakiegokolwiek punktu ciała sztywnego, to każda taka linia będzie zakreślała



Rys. 11-1. Ciało sztywne obraca się dookoła osi z . Każdy punkt ciała (np. punkt P) zakreśla okrąg

ten sam kąt w tym samym przedziale czasu. Zatem możemy opisać czysty ruch obrotowy ciała sztywnego, opisując ruch dowolnie wybranego punktu tego ciała (takiego jak np. P). Musimy jednak wykluczyć tu punkty, które znajdują się na osi obrotu. Dlaczego?)

Zwykle jednak ruch ciała sztywnego jest wynikiem nałożenia się ruchu postępowego i ruchu obrotowego. Bardzo rzadko występuje czysty ruch obrotowy. Położenie ciała sztywnego poruszającego się czystym ruchem postępowym możemy opisać podając trzy współrzędne x, y, z , dowolnego punktu tego ciała (np. środka masy) w wybranym układzie odniesienia. Dla ciała, które porusza się również ruchem obrotowym podczas ruchu postępowego, potrzebne są także, w najbardziej ogólnym przypadku, trzy dalsze współrzędne. Są to np. kąty, które określają orientację ciała względem układu odniesienia. Rysunek 11-2 (patrz także rys. 9-1) ilustruje szczególny przypadek ruchu ciała sztywnego, składający się z nałożenia przesunięcia i obrotu. Rysunek ten jest rozszerzeniem rys. 3-1; przedstawia on teraz ciało obracające się podczas ruchu postępowego. Do określenia położenia tego ciała nie wystarczy podać współrzędne punktu O w układzie odniesienia xy , lecz także trzeba wiedzieć, jak układ odniesienia $x'y'$, który jest sztywno związany z ciałem, jest ustawiony względem układu xy .



Rys. 11-2. Ciało sztywne porusza się ruchem złożonym postępowo-obrotowym względem układu odniesienia x, y . Układ odniesienia x', y' związany z ciałem zmienia podczas ruchu swoje ustawienie względem układu x, y . (Porównać z rysunkami 3-1 i 9-1.) Rysunek ten przedstawia szczególny przypadek ruchów, tj. ruchu postępowego w płaszczyźnie xy i ruchu obrotowego dookoła osi z' o ustalonym kierunku

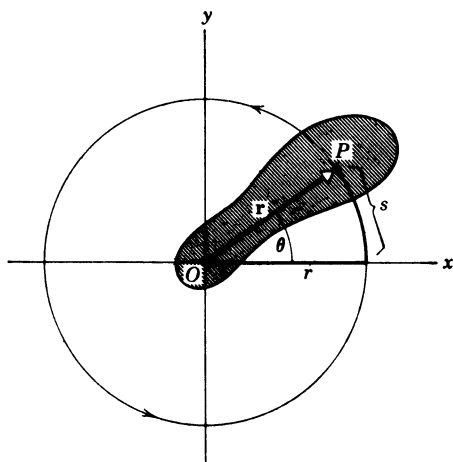
Jak już mówiliśmy w rozdziale 9, ruch postępowy dowolnego układu punktów materialnych — sztywnego lub nieszywnego, obracającego się lub nie — możemy opisać, przyjmując założenie, że cała masa M ciała jest skoncentrowana w środku masy i że F_{zew} , tzn. wypadkowa sił zewnętrznych działających na to ciało, działa na ten punkt. Przyspieszenie środka masy określa równanie (10-9) albo zależność $F_{zew} = Ma_{śr.m.}$. Jest bardzo wygodnie przedstawić ruch postępowy ciała sztywnego za pomocą ruchu pojedynczego punktu, to jest — środka masy. Pozostaje wtedy do określenia tylko ruch obrotowy. Takie

nałożenie ruchu postępowego omówimy w następnym rozdziale. Będzie to o wiele łatwiejsze po przestudiowaniu czystego ruchu obrotowego dookoła nieruchomej osi.

Powróćmy zatem do czystego ruchu obrotowego dookoła nieruchomej osi (rys. 11-1). Przede wszystkim musimy *opisać* ruch obrotowy. Opis ten nazywamy kinematyką ruchu obrotowego. Definiujemy wielkości kinematyczne ruchu obrotowego i podajemy zależności pomiędzy nimi. Postępujemy tak jak w kinematyce ruchu postępowego (patrz rozdział 4) definiując wielkości kinematyczne i ustalając zależności pomiędzy nimi. Następną częścią naszego programu jest powiązanie ruchu obrotowego ciała z właściwościami tego ciała i jego otoczenia. Jest to już dynamika ruchu obrotowego. Kinematyką ruchu obrotowego zajmujemy się w tym rozdziale, a do dynamiki ruchu obrotowego przejdziemy w następnym rozdziale.

11-2. Wielkości kinematyczne ruchu obrotowego

Poprowadźmy płaszczyznę przez punkt P , pod kątem prostym do osi obrotu, jak to widać na rys. 11-1. Płaszczyzna ta przecina ciało wirujące i zawiera okrąg, po którym porusza się punkt P . Na rysunku 11-3 widzimy tę płaszczyznę, patrząc z góry wzdłuż osi z (z rys. 11-1).



Rys. 11-3. Przekrój ciała sztywnego z rys. 11-1. Położenie punktu P określa wektor r . Punkt P związany z ciałem obraca się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, wokół początku układu, po okręgu koła o promieniu r

Możemy dokładnie określić położenie całego wirującego ciała w naszym układzie odniesienia, jeżeli znamy położenie chociaż jednego punktu materialnego (P) tego ciała w tym układzie. Przeto zadanie kinematyczne sprowadza się do rozważenia ruchu punktu materialnego po okręgu w przestrzeni (dwuwymiarowej).

Kąt θ widziany na rys. 11-3 określa kątowe położenie punktu P względem układu odniesienia. Kierunek obrotu punktu na rys. 11-3, przeciwny do kierunku ruchu wskazówek zegara, wybraliśmy za dodatni, tak że kąt θ wzrasta dla obrotu w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara i maleje dla obrotu w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Wygodniej jest mierzyć kąt θ w radianach niż w stopniach*.

* Radian jest jednostką czysto geometryczną, nie mającą żadnego fizycznego wymiaru, ponieważ jest stosunkiem dwóch długości. Ze względu na to, że obwód koła o promieniu r wynosi $2\pi r$, kąt pełny ma 2π radianów, czyli że $\theta = 2\pi r/r = 2\pi$. Zatem 2π radianów = 360° , π radianów = 180° i 1 radian $\cong 57,3^\circ$.

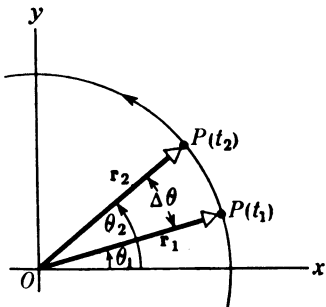
Z definicji kąt θ mierzony jest w radianach, jeżeli określa go zależność:

$$\theta = \frac{s}{r},$$

gdzie s jest długością łuku przedstawionego na rys. 11-3.

Niech ciało z rys. 11-3 obraca się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. W chwili t_1 położenie kątowe punktu P jest równe θ_1 , a w chwili późniejszej t_2 położenie kątowe równe jest θ_2 . Widzimy to na rys. 11-4, który ilustruje położenia punktu P i położenia wektora r w dwóch chwilach. Dla uproszczenia rysunku kontury ciała sztywnego zostały pominięte. W przedziale czasowym $t_2 - t_1 = \Delta t$ punkt P dozna przemieszczenia kątowego $\theta_2 - \theta_1 = \Delta\theta$. Średnią prędkość kątową $\bar{\omega}$ punktu P , dla określonego przedziału czasu, definiujemy następująco:

$$\bar{\omega} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$



Rys. 11-4. Linia OP związana z ciałem (rys. 11-1 i 11-3) została obrócona o kąt $\Delta\theta (= \theta_2 - \theta_1)$ w czasie $\Delta t (= t_2 - t_1)$

Natomiast chwilową prędkość kątową określamy jako graniczną wartość tego stosunku, gdy Δt zmierza do zera:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}.$$

Dla ciała sztywnego wszystkie linie radialne są prostopadłe do osi obrotu i w tym samym czasie zakreślają te same kąty; a więc prędkość kątowa wszystkich tych punktów jest jednakowa. Zatem prędkość kątowa jest cechą charakterystyczną całego ciała. Wymiarem prędkości kątowej jest odwrotność czasu (T^{-1}), a powszechnie używanymi jednostkami są: rad/s i obr/s.

Jeżeli prędkość kątowa ciała nie jest stała, to ciało doznaje przyspieszenia kątowego. Niech ω_1 i ω_2 będą odpowiednio chwilowymi prędkościami kątowymi w chwilach t_1 i t_2 . Wówczas średnie przyspieszenie kątowe $\bar{\alpha}$ wynosi

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Chwilowe (rzeczywiste) przyspieszenie kątowe jest granicą tego stosunku przy Δt dążącym do zera:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}. \quad (11-2)$$

Ponieważ ω jest takie samo dla wszystkich punktów materialnych ciała sztywnego, to jak wynika z równania (11-2), przyspieszenie kątowe α musi być również jednakowe dla każdego punktu. Podobnie jak ω , również α jest wielkością charakterystyczną dla całego ciała sztywnego.

Przyspieszenie kątowe ma wymiar odwrotności czasu podniesionego do kwadratu (T^{-2}) i mierzone jest w rad/s^2 lub w obr/s^2 .

Obrót ciała *dookoła nieruchomej osi* odpowiada formalnie ruchowi postępowemu ciała *w ustalonym kierunku*. Zmiennymi kinematycznymi w pierwszym przypadku są θ , ω , α , a w drugim — x , v , a . Wielkości te odpowiadają sobie parami, mianowicie θ i x , ω i v oraz α i a . Wielkości liniowe różnią się od kątowych czynnikiem o wymiarze długości. Te wszystkie (sześć) wielkości w pewnym szczególnym przypadku można traktować jako skalary; na przykład: punkt materialny w każdej chwili może posuwać się w jednym albo w drugim kierunku wzdłuż linii prostej, co odpowiada dodatniej albo ujemnej wartości v ; podobnie punkt materialny w każdej chwili może wirować w jednym albo w drugim kierunku dookoła nieruchomej osi, co odpowiada dodatniej albo ujemnej wartości ω .

Kiedy w ruchu postępowym przestaniemy ograniczać się do ruchu wzdłuż linii prostej, a rozważymy bardziej ogólny przypadek ruchu w przestrzeni trójwymiarowej wzdłuż linii krzywej, to zmienne liniowe x , v , a okażą się składowymi wektorów $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{a}$. W paragrafie 11-4 zobaczymy, do jakiego stopnia wielkości kinematyczne ruchu obrotowego okażą się wektorami w przypadku ruchu obrotowego dookoła ruchomej osi obrotu.

11-3. Ruch obrotowy ze stałym przyspieszeniem kątowym

Najprostszym rodzajem ruchu punktu materialnego albo ruchu postępowego ciała sztywnego w ustalonym kierunku, takiego jak np. oś x -ów (widzieliśmy to w rozdziale 3), jest ruch z przyspieszeniem a równym zeru. Również z prostym ruchem postępowym mamy do czynienia wtedy, gdy $a = \text{const}$ ($\neq 0$). Dla tego rodzaju ruchu wyprowadziliśmy równania zestawione w tablicy 3-1, którą łączą wielkości kinematyczne x , v , a , t , we wszystkich możliwych kombinacjach.

Najprostszym przykładem ruchu obrotowego ciała sztywnego dookoła stałej osi jest ruch, w którym przyspieszenie kątowe α jest równe zeru (tak jak w ruchu jednostajnym po okręgu). Innym rodzajem prostego ruchu obrotowego jest ruch, w którym $\alpha = \text{const}$ ($\neq 0$).

Tablica 11-1

Ruch ze stałym liniowym albo kątowym przyspieszeniem

	Ruch postępowy (stały kierunek ruchu)	Ruch obrotowy (nieruchoma oś obrotu)	
(3-12)	$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$	(11-3)
(3-14)	$x = \frac{v_0 + v}{2} t$	$\theta = \frac{\omega_0 + \omega}{2} t$	(11-4)
(3-15)	$x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$	$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$	(11-5)
(3-16)	$v^2 = v_0^2 + 2ax$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$	(11-6)

Taki ruch obrotowy odpowiada dokładnie ruchowi postępowemu z przyspieszeniem $a = \text{const}$ ($\neq 0$). Tak jak poprzednio dla ruchu postępowego, możemy teraz wyprowadzić cztery równania łączące cztery wielkości kinematyczne θ , ω , α oraz t , we wszystkich możliwych kombinacjach. Można te równania wyprowadzić albo w ten sam sposób, jak to uczyniliśmy w przypadku równań dla ruchu postępowego (patrz przykład 2), albo też napisać je od razu, podstawiając odpowiednie wielkości charakteryzujące ruch obrotowy na miejsce wielkości występujących w ruchu postępowym.

Obydwa zestawy równań zebrane są w tablicy 11-1 przy założeniu, że $x_0 = 0$ i $\theta_0 = 0$. Założenie to wprowadziliśmy dla uproszczenia postaci tych równań. W równaniach dla ruchu obrotowego ω_0 oznacza tu prędkość kątową w chwili $t = 0$. Czytelnik, zanim sprawdzi postać tych równań, powinien najpierw sprawdzić ich zgodność pod względem wymiarów. Obydwa zestawy równań obowiązują zarówno dla punktów materialnych, jak i dla ciał sztywnych.

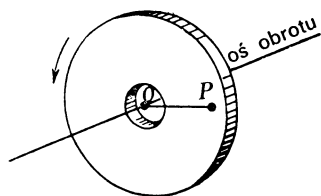
Zwykle z dwóch możliwych kierunków obrotu dookoła nieruchomej osi wybieramy ten, w którym kąt θ wzrasta. Wybranie tego kierunku dla θ jednoznacznie określa znak pozostałych wielkości kątowych.

Na podstawie równania (11-1) ($\omega = d\theta/dt$) widzimy, że jeżeli θ wzrasta w czasie, to ω jest dodatnie. Podobnie zauważamy [na podstawie równania (11-2)] ($\alpha = d\omega/dt$), że jeżeli ω wzrasta w czasie, to α jest dodatnie. Dla wielkości liniowych istnieje podobny sposób ustalania znaków.

Przykład 1. Tarcza szlifierska ma stałe przyspieszenie kątowe $\alpha = 3,0 \text{ rad/s}^2$. Początkowe położenie tarczy określone jest linią poziomą OP (rys. 11-5). Znaleźć: (a) kątowe przemieszczenie linii OP (a zatem i tarczy) oraz (b) prędkość kątową tarczy po czasie 2,0 s.

(a) α i t są dane, szukamy θ . Stosując równanie (11-5) otrzymamy

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2.$$



Rys. 11-5. Przykład 1. Linia OP związana jest z kamieniem szlifierskim, obracającym się dookoła osi przechodzącej przez punkt O

W chwili $t = 0$, $\omega = \omega_0 = 0$ oraz $\alpha = 3,0 \text{ rad/s}^2$, zatem po dwóch sekundach

$$\theta = (0) \cdot (2,0 \text{ s}) + \frac{1}{2} \cdot (3,0 \text{ rad/s}^2) \cdot (2,0 \text{ s})^2 = 6,0 \text{ rad} = 0,96 \text{ obr.}$$

(b) α i t są dane, szukamy ω . Stosując równanie (11-3) otrzymujemy

$$\omega = \omega_0 + \alpha t,$$

$$\omega = 0 + (3,0 \text{ rad/s}^2) \cdot (2,0 \text{ s}) = 6,0 \text{ rad/s.}$$

Dla sprawdzenia korzystamy z równania (11-6)

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta,$$

$$\omega^2 = 0 + (2) \cdot (3,0 \text{ rad/s}^2) \cdot (6,0 \text{ rad}) = 36 \text{ rad}^2/\text{s}^2,$$

$$\omega = 6,0 \text{ rad/s.}$$

Przykład 2. Zakładając, że przyspieszenie kątowe jest stałe, wyprowadzić równanie $\omega = \omega_0 + \alpha t$.

(a) Na podstawie definicji przyspieszenia kątowego:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt},$$

mamy

$$\alpha dt = d\omega,$$

czyli

$$\int \alpha dt = \int d\omega.$$

Ponieważ α jest stałe, więc $\alpha \int dt = \int d\omega$. Jeżeli dla $t = 0$ oznaczmy prędkość kątową przez ω_0 , to

$$\alpha \int_0^t dt = \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega,$$

czyli

$$\alpha t = \omega - \omega_0;$$

ostatecznie

$$\omega = \omega_0 + \alpha t.$$

(b) Ten sam wynik możemy uzyskać, jeżeli za punkt wyjścia przyjmiemy fakt, że przyspieszenie średnie równe jest przyspieszeniu chwilowemu, gdy to ostatnie jest stałe. Przyspieszenie średnie wynosi

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega - \omega_0}{t - t_0}.$$

Gdy przyjmiemy $\alpha = \bar{\alpha}$ i $t_0 = 0$, wówczas

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t}$$

lub

$$\omega = \omega_0 + \alpha t.$$

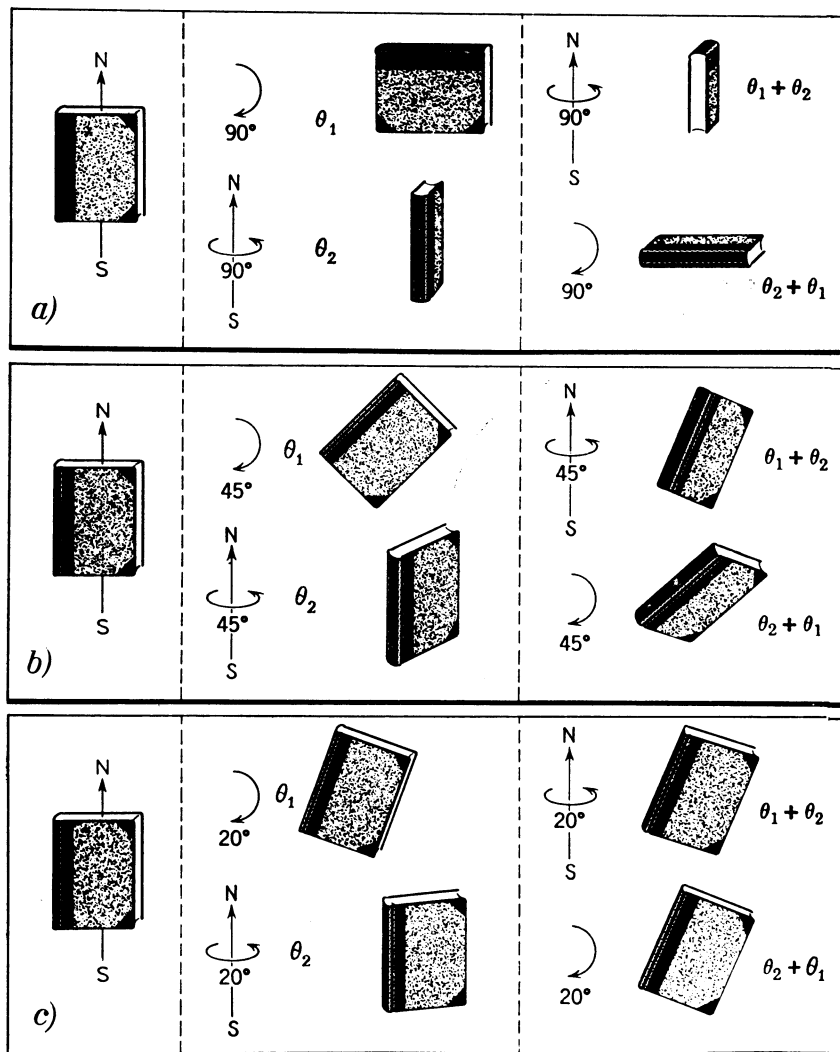
Porównać to wyprowadzenie z odpowiadającym mu wyprowadzeniem równania dla ruchu postępowego $v = v_0 + \alpha t$ z paragrafu 3-8.

11-4. Wielkości kątowe jako wektory

Przemieszczenie, prędkość i przyspieszenie liniowe są wektorami. Odpowiadające im wielkości kątowe mogą być także wektorami, ponieważ oprócz wartości musimy również określić ich kierunek, czyli kierunek osi obrotu. Gdy kierunek ten jest stały w czasie, wielkości θ , ω oraz α możemy traktować jako wielkości skalarne. Jeżeli jednak kierunek osi zmienia się, nie możemy uniknąć pytania: „Czy wielkości kątowe są rzeczywiście wektorami?” Odpowiemy na to pytanie, gdy sprawdzimy, czy wielkości kątowe podlegają prawom algebry wektorowej, m.in. prawu dodawania wektorów.

Rozpatrzmy najpierw z tego punktu widzenia przemieszczenie kątowe θ ciała. Wartością przemieszczenia kątowego jest kąt, który to ciało zakreśla. Przemieszczenia kątowe jednakże nie są wektorami, ponieważ nie dodają się tak jak wektory. Jako przykład weźmy dwa kolejne obroty (θ_1 i θ_2) książki, która początkowo leży w płaszczyźnie poziomej. Niech obrót $\theta_1 = 90^\circ$ odbywa się w kierunku zgodnym ze wskazówkami zegara, dookoła pionowej osi przechodzącej przez środek książki, jak to widzimy na rys. 11-6. Niech następnie obrót $\theta_2 = 90^\circ$ odbywa się w kierunku zgodnym ze wskazówkami zegara dookoła osi północno-południowej, przechodzącej przez środek książki, jak to widać na rysunku,

patrząc z kierunku północnego. W pierwszym przypadku wykonujemy najpierw operację θ_1 , a później operację θ_2 . W drugim przypadku stosujemy najpierw operację θ_2 , a później operację θ_1 . Czytelnik powinien sprawdzić to doświadczenie. Jeżeli przemieszczenia kątowe są wektorami, to powinny dodawać się jak wektory. W szczególności powinny one podlegać prawu przemienności dodawania wektorów, czyli, że $\theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1$. Innymi słowy, porządek dodawania wektorów nie powinien wpływać na wynik dodawania. Jednak zasada

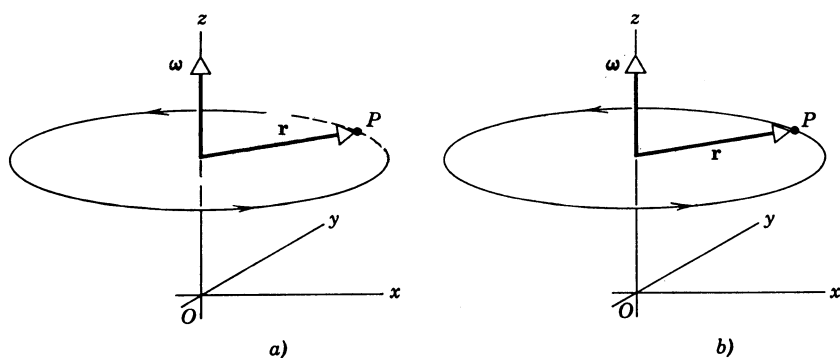


Rys. 11-6. (a) Książkę obracamy o kąt θ_1 (90° zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara patrząc od przodu), a potem o kąt θ_2 (90° przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, patrząc z góry). Jeżeli kolejność obrotów zmienić, to końcowe ustawienie będzie różne. Mówimy, że dodawanie kątów skończonych jest nieprzemienne $\theta_1 + \theta_2 \neq \theta_2 + \theta_1$. (b) Takie same obroty, tylko pod kątem 45° . Końcowe orientacje również różnią się, ale różnica jest mniejsza. (c) Te same operacje, ale pod kątem 20° . Widzimy tu, że $\theta_1 + \theta_2 \cong \theta_2 + \theta_1$. Jest rzeczą widoczną, że gdy $\theta_1, \theta_2 \rightarrow 0$, końcowe ustawienia zbliżają się do siebie. Kąty skończone w przybliżeniu spełniają zasadę przemienności względem dodawania, gdy stają się bardzo małe. Dodawanie nieskończenie małych kątów jest przemienne, tak że można je traktować jako wektory

przemienności nie stosuje się do skończonych przemieszczeń kątowych (patrz ćwiczenie powyżej, a także rys. 11-6a). Zatem skończone przemieszczenia kątowe nie są wielkościami wektorowymi.

Przypuśćmy, że zastąpiliśmy obroty o 90° obrotami o 3° . Suma $\theta_1 + \theta_2$ będzie się w dalszym ciągu różniła od sumy $\theta_2 + \theta_1$, z tym że różnica ta będzie o wiele mniejsza. Rzeczywiście, jeżeli dwa przemieszczenia kątowe maleją, to różnica między ich dwiema sumami szybko zanika (rys. 11-6b, c). Przy nieskończenie małych przesunięciach kątowych kolejność dodawania nie odgrywa już żadnej roli. Dlatego też *nieskończenie małe przesunięcia kątowe są wektorami*.

Wielkości zdefiniowane za pomocą nieskończenie małych przemieszczeń kątowych są również wektorami, np. prędkość kątowa zdefiniowana jako $\omega = d\theta/dt$ jest wektorem. Ponieważ $d\theta$ jest wektorem, a dt — skalar, więc iloraz jest wektorem. Na rysunku 11-7a prędkość kątowa ω obracającego się ciała sztywnego przedstawiona jest za pomocą strzałki narysowanej wzdłuż osi obrotu; tę samą prędkość kątową ω ilustruje rys. 11-7b dla pojedynczego punktu materialnego poruszającego się po okręgu (takiego jak np. punkt P z rys. 11-7a). Długość strzałki jest proporcjonalna do wartości prędkości kątowej. Kierunek strzałki wzdłuż osi obrotu związany jest z kierunkiem wirowania ciała. Jeżeli palce *prawej ręki* okrążają oś obrotu zgodnie z kierunkiem wirowania ciała, to duży palec wskaże kierunek wektora prędkości kątowej. Zatem dla ciała sztywnego z rys. 11-1 wektor prędkości kątowej będzie skierowany w kierunku dodatniej osi z . Na rysunku 11-3 natomiast wektor ω będzie prostopadły do płaszczyzny rysunku i będzie skierowany do góry, gdy ciało będzie obracało się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Prędkość kątowa tarczy gramofonu jest wektorem skierowanym na dół wzdłuż osi obrotu. Zwracamy uwagę, że w ruchu obrotowym nic nie porusza się w kierunku wektora prędkości kątowej. Wektor ten reprezentuje kątową prędkość ruchu obrotowego i jest prostopadły do płaszczyzny tego ruchu.



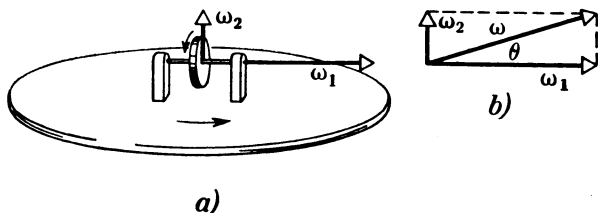
Rys. 11-7. Prędkość kątowa ω (a) obracającego się ciała sztywnego i (b) punktu materialnego wirującego dookoła nieruchomej osi obrotu

Przyspieszenie kątowe jest także wielkością wektorową. Wynika to z definicji $\alpha = d\omega/dt$, w której $d\omega$ jest wektorem, a dt skalar. W ruchu obrotowym spotkamy się później jeszcze z innymi wielkościami wektorowymi, jak moment pędu i moment siły.

Przykład 3. Krążek wiruje na poziomym pręcie, zamocowanym w łożyskach z prędkością kątową $\omega_1 = 100 \text{ rad/s}$ (rys. 11-8a). Krążek razem z prętem umieszczony jest na obrotowym stole, który porusza

się ruchem obrotowym dookoła osi pionowej, z prędkością kątową $\omega_2 = 30,0 \text{ rad/s}$, przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Opisać ruch obrotowy krążka widziany przez obserwatora znajdującego się w pokoju.

Krażek podlega dwu ruchom obrotowym jednocześnie. Opiszemy wypadkowy ruch sumując wektory prędkości. Wektor prędkości kątowej ω_1 związany z obrotem pręta ma wartość 100 rad/s i nie jest nieruchomy, ale z punktu widzenia obserwatora znajdującego się w pokoju obraca się w płaszczyźnie poziomej z prędkością kątową 30 rad/s . Prędkość kątowa ω_2 stołu obrotowego ma stały kierunek pionowy i wartość 30 rad/s .



Rys. 11-8. (a) Wirujący krążek na obrotowym stole. (b) Prędkości kątowe dodajemy jak wielkości wektorowe

Wypadkowa prędkość kątowa krążka ω jest sumą wektorów ω_1 i ω_2 . Piszemy więc

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = \sqrt{(100 \text{ rad/s})^2 + (30,0 \text{ rad/s})^2} = 104 \text{ rad/s}.$$

Kierunek wektora ω nie jest ustalony w układzie odniesienia obserwatora, lecz obraca się z taką samą prędkością kątową, z jaką obraca się stół. Wektor ω nie leży w płaszczyźnie poziomej, lecz skierowany jest w górę pod kątem θ (patrz rys. 11-8b), gdzie

$$\theta = \arctg(\omega_2/\omega_1) = \arctg(30,0 \text{ rad/s}/(100 \text{ rad/s})) = \arctg 0,300 = 16,7^\circ.$$

Ruch krążka możemy opisać jako prosty obrót dookoła tej nowej osi (której kierunek w układzie odniesienia obserwatora zmienia się w czasie, jak to opisaliśmy powyżej) z prędkością kątową 104 rad/s . Jak zmieniłaby się sytuacja, gdyby kierunek obrotu krążka albo stołu obrotowego został zmieniony?

11-5. Związek między liniowymi i kątowymi wielkościami kinematycznymi punktu materialnego w ruchu kołowym — postać skalarna

Ruch punktu materialnego po okręgu omawialiśmy w paragrafach 4-4 i 4-5. Kiedy ciało sztywne obraca się dookoła nieruchomej osi, każdy punkt tego ciała porusza się po torze kołowym. Dlatego też ruch każdego takiego punktu możemy opisać zarówno za pomocą wielkości liniowych, jak i kątowych. Zależności między wielkościami liniowymi i kątowymi pozwalają łatwo przejść od jednego opisu do drugiego.

Rozważmy ruch punktu materialnego P ciała sztywnego leżącego w odległości r od osi obrotu. Punkt ten porusza się po okręgu o promieniu r (rys. 11-9a). Położeniem wyjściowym jest oś Ox . Kiedy ciało obróci się o kąt θ , punkt P zakreśli łuk

$$s = \theta r, \quad (11-7)$$

gdzie θ mierzymy w radianach.

Obydwie strony równania różniczkujemy względem czasu, a ponieważ r jest stałe, otrzymamy

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} r.$$

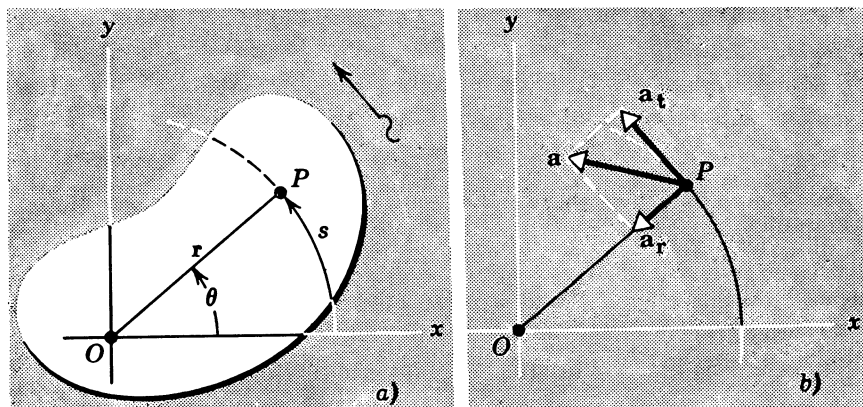
ds/dt jest prędkością liniową v punktu P , a $d\theta/dt$ — prędkością kątową ω wirującego ciała. Zatem

$$v = \omega r. \quad (11-8)$$

Jest to zależność między wartościami bezwzględnymi prędkości liniowej i kątowej. Prędkość liniowa w ruchu kołowym równa się iloczynowi prędkości kątowej i odległości r od osi obrotu.

Po zróżniczkowaniu równania (11-8) względem czasu mamy

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r.$$



Rys. 11-9. (a) Ciało sztywne obraca się dookoła osi O prostopadłej do płaszczyzny rysunku. Punkt P zakreśla łuk s odpowiadający kątowi θ . (b) Przyspieszenie a punktu P ma składową a_t (styczna), gdzie $a_t = \alpha r$, oraz a_r (radialna), gdzie $a_r = v^2/r = \omega^2 r$ (ω = prędkość kątowa)

Lecz dv/dt jest wartością składowej stycznej przyspieszenia punktu materialnego (patrz paragraf 4-5), a $d\omega/dt$ — wartością przyspieszenia kątowego obracającego się ciała. Zatem

$$a_t = \alpha r. \quad (11-9)$$

Wartość bezwzględna składowej stycznej przyspieszenia liniowego punktu materialnego będącego w ruchu kołowym jest iloczynem wartości bezwzględnej przyspieszenia kątowego i odległości r punktu materialnego od osi obrotu.

Składowa radialna przyspieszenia liniowego punktu materialnego poruszającego się po okręgu wynosi, jak wiemy, v^2/r . Po przejściu do zmiennych kątowych, stosując równania (11-8), otrzymujemy

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r. \quad (11-10)$$

Wypadkowe przyspieszenie punktu P przedstawione jest na rys. 11-9b.

Równania (11-7) do (11-10) pozwalają opisać ruch danego punktu wirującego ciała sztywnego przy pomocy wielkości kątowych lub liniowych. Dlaczego zatem wprowadziliśmy wielkości kątowe, skoro mieliśmy już równoważne im wielkości liniowe. Chodzi bowiem o to, że opis kątowy jest o wiele wygodniejszy od liniowego, gdy musimy brać pod uwagę różne punkty tego samego obracającego się ciała. Różne bowiem punkty tego samego obracającego się ciała mogą mieć różne przemieszczenia, prędkości lub przyspieszenia kątowe. Posługując się wielkościami kątowymi możemy w prostszy sposób opisać ruch ciała jako całości.

Przykład 4. Przyjmując, że promień tarczy szlifierskiej z przykładu 1 wynosi 0,50 m obliczyć: (a) liniową, czyli styczną prędkość punktu na obwodzie tarczy; (b) przyspieszenie styczne tego punktu; (c) przyspieszenie dośrodkowe po 2 s.

Wiemy, że $\alpha = 3,0 \text{ rad/s}^2$, $\omega = 6,0 \text{ rad/s}$ oraz $r = 0,50 \text{ m}$. Stąd:

(a) $v = \omega r = (6,0 \text{ rad/s}) \cdot (0,50 \text{ m}) = 3,0 \text{ m/s}$ (prędkość liniowa).

(b) $a_t = \alpha r = (3,0 \text{ rad/s}^2) \cdot (0,50 \text{ m}) = 1,5 \text{ m/s}^2$ (przyspieszenie styczne).

(c) $a_r = v^2/r = \omega^2 r = (6,0 \text{ rad/s})^2 (0,50 \text{ m}) = 18 \text{ m/s}^2$ (przyspieszenie dośrodkowe).

(d) Czy takie same wyniki otrzymamy dla punktu tarczy, odległego od osi obrotu o $r = 0,25 \text{ m}$?

Wielkości kątowe są te same, czyli

$$\alpha = 3,0 \text{ rad/s}^2, \quad \omega = 6,0 \text{ rad/s}.$$

Ponieważ $r = 0,25 \text{ m}$, więc

$$v = 1,5 \text{ m/s}, \quad a_t = 0,75 \text{ m/s}^2, \quad a_r = 9,0 \text{ m/s}^2.$$

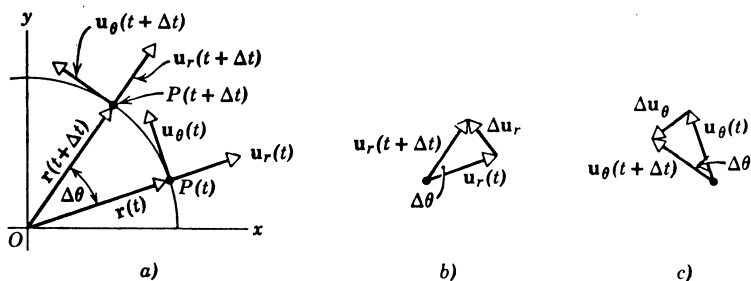
11-6. Związek między liniowymi i kątowymi wielkościami kinematycznymi punktu materialnego w ruchu kołowym — postać wektorowa

Zwracamy uwagę, że zależności dotychczas wyprowadzone są zależnościami między wielkościami skalarnymi, tzn. między wartościami bezwzględnymi wielkości liniowych i kątowych. Rozważmy teraz zależności wektorowe między tymi wielkościami. Wprowadzając wielkości kątowe wykorzystamy zasadniczo wyniki analizy wektorowej z paragrafu 4-5. Będzie to ilustracja bardziej ogólnego ujęcia, w którym rozważania wektorowe stają się zasadnicze. W dalszym ciągu ograniczymy się do obrotu wokół stałej osi.

Rysunek 11-10a przedstawia punkt materialny P , obracający się dookoła nieruchomej osi przechodzącej przez początek układu współrzędnych, w chwilach t oraz $t + \Delta t$. Punkt materialny porusza się po okręgu o stałym promieniu r . Poza tym nie ma żadnych ograniczeń na ruch punktu materialnego P ; ogólnie biorąc wektory ω i α mogą mieć różne wartości podczas ruchu tego punktu. Ograniczenie ruchu punktu materialnego do ruchu po okręgu o stałym promieniu zapiszemy następująco:

$$\mathbf{r} = \mathbf{u}_r r, \quad (11-11)$$

gdzie $\mathbf{u}_r$ jest wektorem jednostkowym w kierunku wektora $\mathbf{r}$.



Rys. 11-10. (a) Punkt materialny P przebywa drogę kątową $\Delta\theta$ w czasie Δt . W każdym położeniu punktu P zaznaczono wektory jednostkowe we współrzędnych biegunowych. (b) Zmiana wektorowa $\mathbf{u}_r$; $\Delta\mathbf{u}_r$ ma kierunek $\mathbf{u}_\theta$, gdy $\Delta\theta \rightarrow 0$. (c) Zmiana wektorowa $\mathbf{u}_\theta$; $\Delta\mathbf{u}_\theta$ ma kierunek $-\mathbf{u}_r$, gdy $\Delta\theta \rightarrow 0$

Różniczkując równanie (11-11) oraz mając na uwadze, że r (lecz nie $\mathbf{r}$ albo $\mathbf{u}_r$, ponieważ ich kierunki zmieniają się) jest stałe, mamy

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{u}_r}{dt} r. \quad (11-12)$$

W równaniu tym $d\mathbf{r}/dt$ jest prędkością liniową $\mathbf{v}$ cząstki. Dla obliczenia $d\mathbf{u}_r/dt$, rozważmy rysunek 11-10b, który przedstawia jednostkowy wektor $\mathbf{u}_r$ dla dwóch różnych położen punktu materialnego P , odpowiada-

jących obrotowi o (mały) kąt $\Delta\theta$. Stosując definicję miary kąta w radianach, otrzymujemy wartość (wektorowej) zmiany $\Delta\mathbf{u}_r$ w postaci

$$\Delta\mathbf{u}_r = (1)\Delta\theta,$$

gdzie czynnik (1) przypomina nam, że te dwa jednostkowe wektory na rys. 11-10b mają jednostkowe długości. Równanie powyższe jest poprawne, jeżeli $\Delta\theta$ jest dostatecznie małe; a więc wtedy różnicę między cięciwą a łukiem w małym trójkącie na rys. 11-10b możemy pominąć. Zmiana $\mathbf{u}_r$ jest zmianą wektorową $\Delta\mathbf{u}_r$, której wartość bezwzględną otrzymujemy z powyższego równania, a *kierunek* zmiany (znowu zakładamy, że kąt $\Delta\theta$ jest dostatecznie mały) definiuje nam jednostkowy wektor $\mathbf{u}_\theta$. Łatwo się przekonać, że tak jest istotnie, bo gdy $\Delta\mathbf{u}_r$ na rys. 11-10b przesuniemy do punktu P na rys. 11-10a, wtedy zobaczymy, że kierunek różnicy $\Delta\mathbf{u}_r$ pokrywa się z kierunkiem $\mathbf{u}_\theta$ (gdy oczywiście $\Delta\theta \rightarrow 0$). Znajdujemy zatem, że

$$\Delta\mathbf{u}_r \cong \mathbf{u}_\theta \Delta\theta.$$

Dzieląc to równanie przez Δt , przy założeniu, że Δt dąży do zera, otrzymujemy

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = \mathbf{u}_\theta \frac{d\theta}{dt} = \mathbf{u}_\theta \omega. \quad (11-13)$$

Podstawiając otrzymane wyniki do równania (11-12) widzimy, że

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_\theta \omega r. \quad (11-14a)$$

Zależność skalarna dla tych wielkości ma postać:

$$v = \omega r \quad (11-14b)$$

i jest jedną z zależności otrzymanych poprzednio, łączących prędkość liniową v punktu materialnego poruszającego się po okręgu z jego prędkością kątową ω .

Dla znalezienia zależności pomiędzy liniowym i kątowym przyspieszeniem różniczkujemy równanie (11-14a), pamiętając, że r jest stałe, chociaż $\mathbf{u}_\theta$ i ω zmieniają się:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{u}_\theta \frac{d\omega}{dt} r + \omega \frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} r. \quad (11-15)$$

Wiemy, że $d\mathbf{v}/dt$ jest liniowym przyspieszeniem $\mathbf{a}$ punktu materialnego, a $d\omega/dt$ jest przyspieszeniem kątowym α . Posługując się rys. 11-10c i wyprowadzeniem równania (11-13), Czytelnik może łatwo dowiedzieć, że

$$\frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} = -\mathbf{u}_r \omega. \quad (11-16)$$

Znak minus pojawia się tutaj dlatego, że przy przenoszeniu $\Delta\mathbf{u}_\theta$ (na rys. 11-10c) do punktu P , w wypadku gdy $\Delta\theta \rightarrow 0$, $\Delta\mathbf{u}_\theta$ skierowana jest wzdłuż promienia do środka, czyli przeciwnie do kierunku $\mathbf{u}_r$.

Dokonując tych podstawień w równaniu (11-15), otrzymujemy

$$\mathbf{a} = \mathbf{u}_\theta \alpha r - \mathbf{u}_r \omega^2 r. \quad (11-17)$$

Zatem zgodnie z tym, co wiemy już z paragrafu 4-5, $\mathbf{a}$ ma składową radialną (albo dośrodkową) $\mathbf{a}_r$ i styczną $\mathbf{a}_t$. Wartości bezwzględne tych składowych, otrzymane z równania (11-17), są równe

$$a_t = \alpha r \quad (11-18a)$$

oraz [stosując równanie (11-14b)]

$$a_r = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}. \quad (11-18b)$$

Ostatnią zależność otrzymaliśmy już w paragrafie 4-4. W uzupełnieniu I wyprowadzamy zależności pomiędzy kinematycznymi wielkościami kątowymi i liniowymi dla punktu materialnego poruszającego się swobodnie na płaszczyźnie, lecz którego ruch nie jest ograniczony do ruchu po okręgu. Równania (11-14a) i (11-17) okażą się specjalnymi przypadkami, bardziej ogólnych zależności wyprowadzonych w tym uzupełnieniu.

Równania (11-14a) i (11-17) są zależnościami pomiędzy kinematycznymi zmiennymi liniowymi w postaci wektorowej i zmiennymi kinematycznymi w postaci skalarnej. Powinniśmy teraz wyprowadzić zależności, w których każdy układ zmiennych wyrażony jest w postaci wektorowej. Zrobimy to teraz. Będzie to szczególnie użyteczne dla przypadków, dla których oś obrotu jest osią ruchomą.

Rysunek 11-11 przedstawia wektory $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{a}_t$, $\mathbf{a}_r$, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\alpha}$ dla obracającego się punktu materialnego z rys. 11-7b. Wielkości kątowe zaznaczone są na osi obrotu i skierowane zgodnie z regułą prawej ręki (str. 35). Napišemy i udowodnimy, że szukane zależności mają postać:

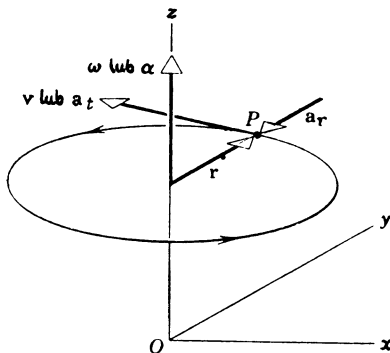
$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (11-19)$$

oraz

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_r, \quad (11-20a)$$

gdzie

$$\mathbf{a}_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}, \quad \mathbf{a}_r = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}. \quad (11-20b)$$



Rys. 11-11. Kierunek wektorów $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{a}_t$, $\mathbf{a}_r$, $\boldsymbol{\omega}$ i $\boldsymbol{\alpha}$ punktu materialnego poruszającego się po okręgu dookoła osi z

W paragrafie 2-4 (do którego Czytelnik powinien wrócić) zdefiniowaliśmy iloczyn wektorowy dwóch wektorów. Jeżeli $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, to wartość bezwzględna $c = ab \sin \varphi$, gdzie φ jest kątem między $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$. Stosując tę część definicji iloczynu wektorowego do równania (11-19) i (11-20), zauważmy (patrz rys. 11-11), że $\boldsymbol{\omega}$ i $\mathbf{r}$, $\boldsymbol{\omega}$ i $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\alpha}$ i $\mathbf{r}$, są względem siebie prostopadłe. Zatem kąt φ dla każdej z tych trzech par wektorów równa się 90° . Wartości bezwzględne otrzymane z równania (11-19) są równe:

$$v = \omega r \sin 90^\circ = \omega r,$$

co dokładnie pokrywa się z równaniem (11-14b). Z równania (11-20b) wynika, że wartość bezwzględna składowej radialnej równa się

$$a_r = \omega v = \omega(\omega r) = \omega^2 r,$$

a składowej stycznej:

$$a_t = \alpha r.$$

Zależności te pokrywają się całkowicie z równaniami (11-18a) i (11-18b).

Pozostaje jeszcze do sprawdzenia, czy równania (11-19) i (11-20b) definiują poprawnie także kierunki tych wielkości. Dla iloczynu wektorowego $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (rys. 2-12) kierunek $\mathbf{c}$ zgodnie z regułą „prawej ręki” pokaże duży palec, gdy zagięte palce wskazują obrót od $\mathbf{a}$ do $\mathbf{b}$ przez mniejszy kąt między nimi. Patrząc na rys. 11-11 i stosując regułę prawej ręki łatwo sprawdzimy, że kierunki wektorów $\mathbf{v}$, $\mathbf{a}_t$ i $\mathbf{a}_r$, określone przez równania (11-9) i (11-20b), są rzeczywiście poprawne.

Pytania

1. W paragrafie 11-1 stwierdziliśmy, że do wyznaczenia położenia ciała sztywnego względem wybranego układu odniesienia, ogólnie biorąc, potrzeba sześć zmiennych. Ile zmiennych potrzeba do wyznaczenia położenia ciała z rys. 11-2, względem układu współrzędnych x , y ? Jeżeli potrzeba mniej zmiennych niż sześć, wyjaśnić tę różnicę.

2. Nieregularne ciało może się dowolnie obracać dookoła swojego środka masy, umieszczonego w początku układu odniesienia. Jak należy określić jego położenie w przestrzeni?

3. Czy wielkości kątowe θ , ω oraz α , występujące w równaniach kinematycznych, mogą być wyrażone w stopniach zamiast w radianach?

4. Wyjaśnić, dlaczego radian we wszystkich układach jednostek jest właściwą jednostką kąta. Czy to samo odnosi się do stopnia?

5. Jeżeli szybkościomierz samochodu odczytuje prędkość proporcjonalną do prędkości obrotowej kół tylnych, to czy należy zmodyfikować odczyt, gdy opony zwykle zostaną zamienione na zimowe?

6. Jak można w prosty sposób wyrazić zależność między prędkościami kątowymi pary kół zębatach, które są ze sobą sprzężone?

7. Koło obraca się dookoła osi przechodzącej przez jego środek i prostopadłej do jego płaszczyzny. Wybierzmy punkt na obwodzie koła. Czy punkt ten ma przyspieszenie styczne? Czy punkt ten ma przyspieszenie dośrodkowe, gdy koło obraca się ze stałym przyspieszeniem kątowym? A czy ma przyspieszenie styczne? Czy wartości tych przyspieszeń zmieniają się?

8. Przypuśćmy, że trzeba określić drogę, jaką igła gramofonowa zakreśla w czasie przegrywania płyty o średnicy 30 cm, przy prędkości obrotu $33\frac{1}{3}$ obr/min. Jakie dane są potrzebne do rozwiązania zadania? Przedyskutować zagadnienie w dwóch układach odniesienia: (a) związanym z pokojem, w którym się płyta znajduje, (b) związanym z obracającą się płytą i (c) związanym z ramieniem gramofonu?

9. (a) Opisać wektor, który określa prędkość kątową Ziemi obracającej się dookoła swej osi. (b) Opisać wektor, który określa prędkość kątową Ziemi obiegającej dookoła Słońca.

10. Zwykle prędkość kątową przedstawia się graficznie w postaci wektora leżącego wzdłuż osi obrotu. Czy jest jakiś powód, dla którego wektorów tych nie można by umieszczać równoległe do osi, lecz obok niej? Przypominamy, że wektor przemieszczenia można przesuwać wzdłuż jego kierunku oraz przesuwać równoległe, nie zmieniając przy tym jego wartości liczbowej.

11. W wirówce cząstki będą starały oddzielić się od płynu, w którym są zawieszone, jeżeli ich gęstość (masa/objętość) różni się od gęstości płynu. Przedyskutować dynamiczne zasady, od których zależy działanie wirówki. Rozpatrzyć zagadnienie zarówno w inercjalnym (laboratoryjnym), jak i nieinercjalnym (obracającym się) układzie odniesienia.

12*. Strzelec wyborowy stojący w środku karuzeli strzela do celu położonego na zewnętrznym obwodzie karuzeli. W jaki sposób strzelec musi uwzględnić prędkość kątową (stałą) karuzeli (jeśli w ogóle musi ją uwzględnić), aby trafić w cel? Jak należy opisać zagadnienie, gdy pozycja strzelca i celu zostaną zamienione?

13*. Na karuzeli obracającej się ze stałą prędkością kątową siedzi chłopiec, który w pewnej chwili upuszcza piłkę, którą trzymał w pozycji nieruchomej względem karuzeli w odległości r_0 od jej środka. Opisać ruch piłki w układzie odniesienia: (a) obserwatora będącego na ziemi i (b) obserwatora będącego na karuzeli. Przyjmujemy, że siły tarcia pominiemy, ale wszystkie inne siły uwzględnimy.

14* Chłopiec na obracającej się karuzeli wyrzuca piłkę na zewnątrz, wzdłuż linii radialnej. Jaki będzie ruch tej piłki widzianej przez obserwatora związanego: (a) z karuzelą, (b) z ziemią? Przyjmujemy, że siły tarcia można pominąć?

Zadania

Paragraf 11-2

1. Ile wynosi prędkość kątową dla: (a) wskazówki sekundowej zegara, (b) wskazówki minutowej?

Odp.: (a) 0,10 rad/s, (b) $1,7 \cdot 10^{-3}$ rad/s.

2. Płyta gramofonowa obraca się z prędkością kątową 33 obr/min. Jaka jest prędkość liniowa punktu płyty, w którym dotyka igła: (a) na początku i (b) na końcu odtwarzania? Odległości igły od osi obrotu wynoszą 14 cm na początku i 7 cm na końcu.

3. Koło zębate może służyć do mierzenia prędkości światła. Wiązka światła przechodzi przez przerwę między kolejnymi zębami na przeciwną stronę koła, jak to widzimy na rys. 11-12. Odbija się od odległego zwierciadła, zwraca tą samą drogą i trafia w sąsiednią przerwę między zębami. Koło zębate ma promień 5 cm i 500 zębów na obwodzie. Pomiary przeprowadzone w przypadku, gdy zwierciadło znajdowało się w odległości 500 m od koła, wykazały, że prędkość światła wynosi $3 \cdot 10^5$ km/s. (a) Obliczyć (stałą) prędkość kątową koła. (b) Jaka była prędkość liniowa punktu znajdującego się na brzegu koła?

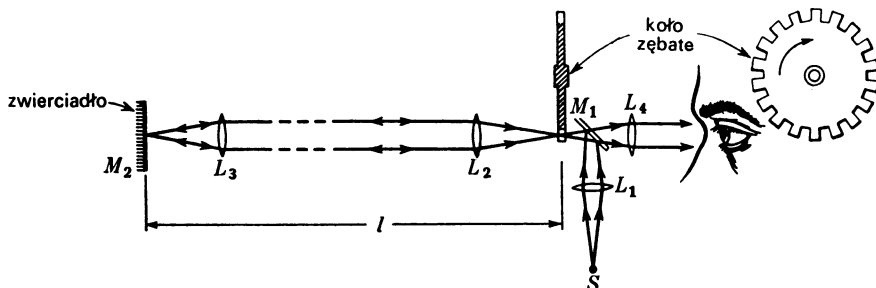
Odp.: (a) $3,8 \cdot 10^3$ rad/s; (b) 190 m/s.

* Patrz uzupełnienie I.

4. Jeżeli śmigło samolotu o promieniu 1,5 m obraca się z prędkością kątową 2000 obr/min i samolot ma prędkość 480 km/h, to jaka jest prędkość końcowego punktu śmigła widziana przez: (a) pilota, (b) obserwatora na ziemi?

5. Położenie katowe punktu znajdującego się na obręczy obracającego się koła jest następujące: $\theta = 4t - 3t^2 + t^3$, gdzie θ podane w radianach, a t w sekundach. Jakie jest średnie przyspieszenie w przedziale czasu od $t = 2$ s do $t = 4$ s?

Odp.: 12 rad/s².



Rys. 11-12. Zadanie 3

6. Kąt, o jaki obróci się koło zamachowe generatora w ciągu czasu t , wyraża się wzorem:

$$\theta = at + bt^3 - ct^4,$$

gdzie a , b i c są stałe. Jaki jest wzór na przyspieszenie katowe?

7. Koło obraca się z przyspieszeniem kątowym α danym przez wyrażenie

$$\alpha = 4at^3 - 3bt^2,$$

gdzie t oznacza czas, a a i b są stałe. Jeżeli koło ma początkową prędkość kątową ω_0 , napisać równania dla: (a) prędkości kątowej i (b) drogi kątowej — jako funkcji czasu.

Odp.: (a) $\omega_0 + at^4 - bt^3$; (b) $\theta_0 + \omega_0 t + at^5/5 - bt^4/4$.

8. Planeta P porusza się po orbicie kołowej, w której środku znajduje się Słońce. Orbita ta jest współpłaszczyznowa i koncentryczna z orbitą kołową, po której porusza się Ziemia Z . P i Z poruszają się w tym samym kierunku. Okresy pełnego obiegu wokół Słońca dla P i Z wynoszą odpowiednio T_P i T_Z . Niech T_S będzie okresem, w którym P dokonuje jednego pełnego obiegu wokół Słońca względem Z . Wykazać, że $1/T_S = 1/T_Z - 1/T_P$. Przyjąć $T_P > T_Z$.

9. Doba słoneczna jest to przedział czasu pomiędzy dwoma kolejnymi przejściami Słońca, na określonej długości geograficznej, albo innymi słowy, jest to czas całkowitego obrotu Ziemi względem Słońca. Doba gwiazdowa jest to czas jednego obrotu Ziemi względem gwiazd stałych, czyli jest to przedział czasu między dwoma kolejnymi obserwacjami ustalonego kierunku na niebie, zwanego równonocą wiosenną. (a) Pokazać, że w roku jest dokładnie o jeden mniej (średnich) dni słonecznych niż (średnich) dni gwiazdowych. (b) Jeżeli (średnia) doba słoneczna wynosi dokładnie 24 h, to jak długa jest średnia doba gwiazdowa?

Odp.: (b) 23 godz. 56 min.

Paragraf 11-3

10. Prędkość kątową korbowału samochodu w ciągu 12 s wzrosła z 1200 obr/min do 3000 obr/min. (a) Obliczyć przyspieszenie katowe przyjmując, że jest ono stałe. (b) Ile obrotów wykonał korbował w ciągu tego czasu?

11. Po wyłączeniu silniczka talerz adaptera obracający się z prędkością 78 obr/min obracał się jeszcze w ciągu 30 s. (a) Znaleźć (stałe) przyspieszenie katowe talerza. Ile obrotów wykonał talerz w ciągu tego czasu?

Odp.: (a) $-0,27$ rad/s²; (b) 20.

12. Z powodu tarcia ciężkie koło zamachowe, obracające się wokół własnej osi, zaczyna obracać się wolniej. Po upływie 1 min jego prędkość kątowa wynosi 0,9 prędkości kątowej ω_0 na początku tej minuty. Przyjmując, że siły tarcia są stałe, obliczyć prędkość kątową po upływie 2 min.

13. Czekaając na wejście do środka helikoptera pasażer zauważył, że prędkość obrotowa wirnika helikoptera zmieniła się w ciągu jednej minuty z 300 obr/min do 225 obr/min. (a) Znaleźć średnie przyspieszenie kątowe w tym przedziale czasu. (b) Przyjmując, że to przyspieszenie pozostaje stałe, obliczyć, po jakim czasie wirnik zatrzyma się całkowicie? (c) Ile obrotów wykona wirnik do zatrzymania się licząc od 225 obr/min?

Odp.: (a) $-0,13 \text{ rad/s}^2$; (b) 4 min; (c) 340.

14. Stałe przyspieszenie kątowe koła wynosi 3 rad/s^2 . W ciągu 4 s obróciło się ono o 120 rad. Przyjmując, że prędkość kątowa na początku ruchu wynosiła zero, obliczyć jak długo to koło znajdowało się w ruchu przed rozpoczęciem tego 4-sekundowego okresu?

15. Jednorodny krążek zaczyna obracać się wokół nieruchomej osi i przyspiesza ze stałym przyspieszeniem kątowym. Początkowo obraca się z prędkością 10 obr/s. Po 60 pełnych obrotach jego prędkość kątowa wynosi 15 obr/s. Obliczyć: (a) przyspieszenie kątowe; (b) czas, w jakim dokonane zostało wspomnianych 60 obrotów; (c) czas potrzebny do osiągnięcia prędkości kątowej 10 obr/s i (d) liczbę obrotów krążka od chwili rozpoczęcia ruchu do chwili, w której osiągnął on prędkość kątową 10 obr/s.

Odp.: (a) 1,04 obr/s²; (b) 4,8 s; (c) 9,6 s; (d) 48.

Paragraf 11-4

16. Koło zamachowe poruszające się z prędkością kątową 1,5 obr/s zwalnia, ale do chwili całkowitego zatrzymania się wykonuje jeszcze 40 obrotów. Przyjmując jednostajne przyspieszenie, obliczyć: (a) czas wymagany do całkowitego zatrzymania się koła; (b) ile wynosi przyspieszenie kątowe? (c) czas, w którym dokona się pierwsza połowa z owych 40 obrotów?

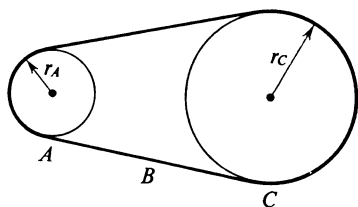
17. Samochód, którego koła mają średnicę 76 cm, jedzie z prędkością 97 km/h. (a) Obliczyć prędkość kątową kół wokół ich osi. (b) Jakie było przyspieszenie kątowe kół, jeżeli po włączeniu hamulców obróciły się one jeszcze 30 razy ruchem jednostajnie opóźnionym? (c) Obliczyć drogę hamowania.

Odp.: (a) 71 rad/s; (b) -13 rad/s^2 ; (c) 72 m.

18. Współrzędne ciała poruszającego się w płaszczyźnie xy określone są zależnościami $x = R \cos \omega t$, $y = R \sin \omega t$, gdzie t oznacza czas, a R i ω są wielkościami stałymi. (a) Wyeliminować z tych równań czas t w celu znalezienia równania krzywej, po której porusza się to ciało. Jaki kształt ma ta krzywa? Co oznacza stała ω ? (b) Różniczkując zależności x i y względem czasu znajdujemy składowe v_x i v_y . Opisać ruch ciała. (c) Zróżniczkować v_x i v_y względem czasu oraz określić wypadkowe przyspieszenie (kierunek i wartość).

19. Koło A o promieniu $r_A = 10 \text{ cm}$ jest połączone paskiem B z kołem C o promieniu $r_C = 25 \text{ cm}$, jak na rys. 11-13. Koło A znajdujące się początkowo w stanie spoczynku zwiększa swą prędkość kątową jednostajnie o $\pi/2 \text{ rad/s}^2$. Określić czas, w ciągu którego koło C osiągnie prędkość kątową 100 obr/s, przyjąwszy, że pasek się nie ślizga.

Odp.: 17 s.



Rys. 11-13. Zadanie 19

Paragraf 11-5

20. (a) Z jaką prędkością kątową obraca się wokół osi Ziemi punkt znajdujący się na jej powierzchni na szerokości geograficznej północnej 45° ? Jaka jest prędkość liniowa tego punktu? (b) Obliczyć to samo dla punktu znajdującego się na równiku i porównać ze sobą otrzymane wyniki.

21. Ziemia porusza się dookoła Słońca po orbicie, którą można uważać za kołową. (a) Obliczyć prędkość kątową oraz (b) średnią prędkość liniową Ziemi w jej ruchu po orbicie (uważając Ziemię za punkt materialny). (c) Ile wynosi przyspieszenie Ziemi w jej ruchu względem Słońca.

Odp.: (a) $2 \cdot 10^{-7} \text{ rad/s}$; (b) $3 \cdot 10^4 \text{ m/s}$; (c) $6 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$.

22. Jaka jest prędkość kątowa samochodu jadącego po torze kołowym o promieniu 110 m z prędkością 48 km/h?

23. Jakie jest przyspieszenie dośrodkowe punktu leżącego na brzegu płyty gramofonowej o średnicy 30 cm, obracającej się z prędkością 33,3 obr/min?

Odp.: $1,8 \text{ m/s}^2$.

24. Jaki jest stosunek przyspieszenia związanego z obrotem Ziemi punktu znajdującego się na równiku, do przyspieszenia Ziemi związanego z jej ruchem dookoła Słońca? Przyjąć kołowe orbity.

25. Koło zamachowe silnika parowego porusza się ze stałą prędkością 150 obr/min. Gdy dopływ pary zostaje odcięty, tarcie łożysk i powietrza zatrzymuje koło w ciągu 2,2 godz. (a) Jakie jest średnie przyspieszenie kątowe koła? (b) Ile obrotów wykona koło przed całkowitym zatrzymaniem się? (c) Ile wynosi styczne przyspieszenie liniowe punktu materialnego oddalonego o 50 cm od osi obrotu, gdy koło zamachowe obraca się z prędkością 75 obr/min? (d) Jaka jest wartość całkowitego przyspieszenia liniowego punktu materialnego w pytaniu (c)?

Odp.: (a) $-2 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}^2$; (b) 10^4 obr.; (c) -1 mm/s^2 ; (d) 31 m/s^2 .

26. Ciało sztywne obraca się wokół stałej osi ze stałym przyspieszeniem kątowym α . Prędkość początkowa równa się zeru. Niech punkt materialny znajduje się w odległości r od osi obrotu. Znaleźć: (a) przyspieszenie dośrodkowe i (b) styczne danego punktu materialnego tego ciała w zależności od α , r i czasu t . (c) Jeżeli w pewnej chwili przyspieszenie wypadkowe tworzy kąt 60° z przyspieszeniem stycznym, to o jaki kąt obróciło się ciało do tej chwili?

Paragraf 11-6

27. Wyprowadzić równanie (11-20) różniczkując równanie (11-19).

28*. Mucha o masie $8,0 \cdot 10^{-2} \text{ g}$ spaceruje ze stałą prędkością $1,6 \text{ cm/s}$ wzdłuż linii radialnej zaznaczonej na talerzu gramofonu obracającym się ze stałą prędkością kątową $33\frac{1}{3}$ obr/min. Znaleźć: (a) prędkość i (b) przyspieszenie muchy widzianej przez obserwatora z zewnątrz, kiedy mucha znajduje się 12 cm od osi obrotu. (c) Jaki musi być minimalny współczynnik tarcia, który pozwala musze osiągnąć krawędź wirującego talerza (promień 16 cm) bez ześlizgnięcia się?

29. Wirus o masie $1,0 \cdot 10^{-7} \text{ g}$ znajdujący się w roztworze w wirówce, w pewnym momencie w odległości 6,5 cm od osi obrotu, porusza się w kierunku radialnym na zewnątrz ze stałą (w przybliżeniu) prędkością wynoszącą $2,0 \text{ mm/s}$. Wirówka obraca się z prędkością kątową 55 000 obr/min. Przedyskutować ruch ilościowo, podając wielkości wszystkich sił i przyspieszeń w dwóch układach odniesienia: (a) obracającego się razem z wirówką; (b) nieruchomego.

* Patrz uzupełnienie I.