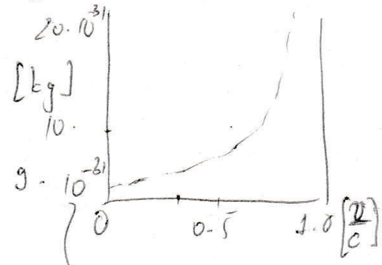
energia relat. $E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = m_0 c^2 + \frac{m_0 v^2}{2}$

$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} f^{(n)}(0)\, x^n = 1 - \frac{1}{2!}x^2 = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \ldots$



$f^{(0)}(0) = 1$

$f^{(1)}(0) = +\frac{1}{\cancel{2}}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cancel{2}x = 0$

$f^{(2)}(0) = +(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + x\frac{3}{\cancel{2}}(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}(+2x) = +1$

$m = const.$

(1)

$E_k = E - m_0 c^2 = \frac{m_0 v^2}{2}$

do wykładu z "energii"

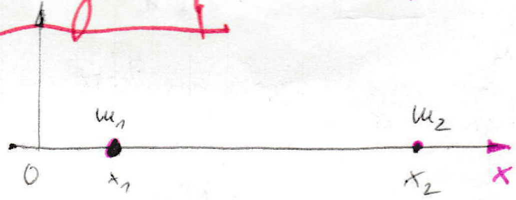
$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint (\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot d\vec{S} \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$

$F(x,y,z) = ?$ $\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 0$

CM

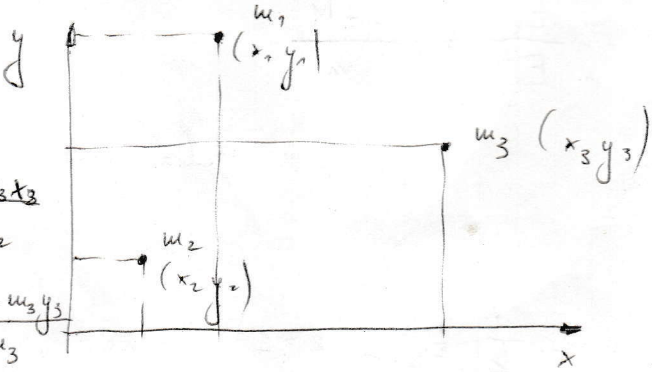
Układy ~~punktów materialnych~~ ~~wielu ciał~~ → układ "środka masy"

środek masy



$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow M x_c = \sum_i m_i x_i$

na płaszczyźnie



$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$

$y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$

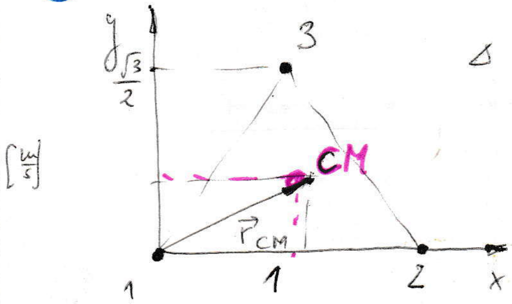
$M = \sum_i m_i \Rightarrow x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i x_i \Rightarrow \vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i$

$y_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i y_i$

Układy ciągłe

2

$$\begin{cases} x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\,dm \\ y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\,dm \\ z_{CM} = \frac{1}{M}\int z\,dm \end{cases} \Rightarrow \vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,dm$$



Δ równoboczny

$$\begin{cases} x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i x_i \\ y_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i y_i \end{cases}$$

Ruch środka masy

$$M\vec{r}_{CM} = m_1\vec{r}_1 + \ldots + m_n\vec{r}_n$$

$$M\frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} + \ldots + m_n\frac{d\vec{r}_n}{dt}$$

$$\boxed{M\vec{v}_{CM} = m_1\vec{v}_1 + \ldots + m_n\vec{v}_n}$$

prędkość środka masy

$$M\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt} + \ldots + m_n\frac{d\vec{v}_n}{dt}$$

$$\boxed{M\vec{a}_{CM} = \underbrace{m_1\vec{a}_1}_{\vec{F}_1} + \ldots + \underbrace{m_n\vec{a}_n}_{\vec{F}_n}}$$

przyśpieszenie środka masy

$$\boxed{M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_{zew} = \sum_i \vec{F}_i}$$

! środek masy porusza się tak jakby cała masa była skupiona w środku masy a wszystkie siły zewn. nań działały

Pęd układu punktów

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \ldots + \vec{p}_n = m_1\vec{v}_1 + \ldots + m_n\vec{v}_n$$

$$\boxed{\vec{P} = M\vec{v}_{CM}}$$

! całkowity pęd układu punktów materialnych jest równy iloczynowi całk. masy i prędkości środka masy

Zasada zachowania pędu dla układu punktów

3

$$\vec{F}_{zew.} = \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P} = const$$

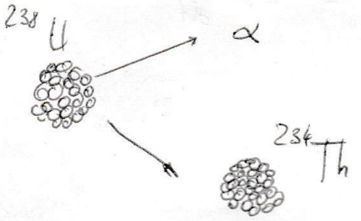
Jeżeli wypadkowa sił zewn. działających na układ jest równa zeru => całkowity wektor pędu = const

Przykład

Rozpad $^{238}U \to \underset{\alpha}{\overset{^4He}{\parallel}} + {}^{234}Th$

cząstka α emitowana z $v = 1.4\times10^7 \frac{m}{s}$ i $E_k = 4.1$ MeV

Uran początkowo pozostaje w spoczynku

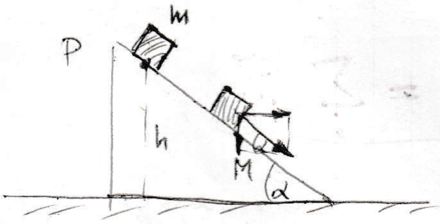


$$0 = m_\alpha v_\alpha + m_{Th} v_{Th}$$

$$v_{Th} = -\frac{M_\alpha}{M_{Th}} v_\alpha$$

$$v_{Th} = -\frac{3}{234}\cdot 1.4\cdot10^7 \frac{m}{s} = -2.4\times10^5 \frac{m}{s}$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{1}{238}(0) = 0$$



$$v(t) = gt = g\sin\alpha\, t$$

$$a = g\sin\alpha$$

$$s = \frac{at^2}{2}$$

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

$$s = \frac{h}{\cos\alpha}$$

$$v(t) = g\sin\alpha\sqrt{\frac{h}{\cos\alpha\, a}} = \sqrt{\frac{2gh}{\sin\alpha\cos\alpha}}$$

$$m g\sin\alpha\cos\alpha\sqrt{\frac{h}{g\cos\alpha\sin\alpha}} = Mv$$

$$m(v-V) = (M+m)V$$

$$mv = (M+2m)V$$

$$V = \frac{m}{2m+M}v$$

$$mgh = \frac{(m+M)V^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$$

$$2mgh = (m+M)V^2 + mv^2$$

$$V^2 = \frac{m}{m+M}(2gh - v^2) = \frac{2mgh}{m+M} - \frac{mv^2}{m+M}$$

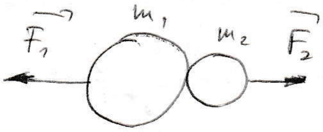
4

Zderzenia

pęd i popęd $\qquad d\vec{p} = \vec{F}\,dt \qquad$ bo $\quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

$$\vec{p}_k - \vec{p}_p = \int \vec{F}\,dt \quad \leftarrow$$ miara siły w zderzeniach

popęd $= \Delta\vec{p}$



$$\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = const$$

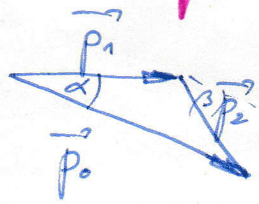
$$\boxed{\Delta\vec{P} = 0}$$

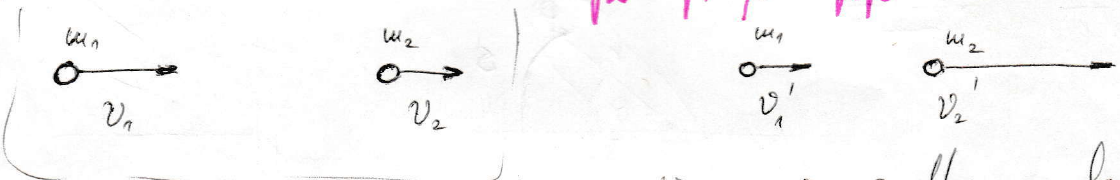
zderzenie sprężyste — jeśli obowiązuje zasada zachowania energii kinetycznej

zderzenie całk. niesprężyste — ciała po zderzeniu łączą się.

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_0$$

$$p_2^2 = p_1^2 + p_0^2 - 2p_1p_0\cos\alpha$$





w przypadku zderzeń centralnych

(1) $\quad m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$

(2) $\quad \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$

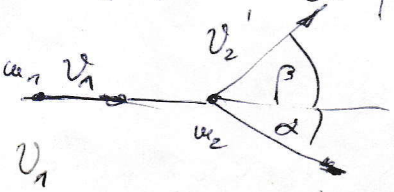
$$\begin{cases} v_1' = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \\ v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \end{cases}$$

$m_1 = m_2 \Rightarrow \quad v_1' = v_2 \ \wedge \ v_2' = v_1$

cząstki wymieniają się prędkościami

parametr zderzenia

$$\begin{cases} m_1 v_1 = m_1 v_1' \cos\alpha + m_2 v_2' \cos\beta \\ 0 = m_1 v_1' \sin\alpha - m_2 v_2' \sin\beta \end{cases}$$



np. zjeżdżalnia, zderzenia

r. Ciołkowskiego

$\boxed{\text{układy o zmiennej masie}}$

$$\vec{F}_{zew} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dM}{dt} - \vec{u}\frac{dM}{dt}$$

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{zew} + \vec{v}_{wzgl.}\frac{dM}{dt} = \vec{F}_{zew} + \vec{F}_{reakcji}$$

silniki rakietowe