

Dynamika punktu materialnego

Co jest przyspieszeniem punktu?

Isaac Newton (1643-1727)

Philosophiae naturalis principia mathematica (1686)

3 zasady dynamiki

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k a^{n-k} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

dwumian

I Ciało porusza się w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym (po linii prostej) dopóki nie zostanie zmuszone do zmiany tego stanu, wskutek zewn. sił.

- zwana zasadą bezstratności (inercji)

Układy inercyjne - układy, w których obowiązuje zasada bezstratności.

↓

są one nieruchome względem gwiazd!

Jeżeli na ciało nie działa żadna siła, przyspieszenie

$$\vec{a} = 0$$

II Jeżeli na ciało działa wiele sił, to każda z nich nadaje ciału niezależne przyspieszenie.

Przyspieszenie wypadkowe jest sumą wektorową tych przysp.

$$\vec{a}_w = \sum_i \vec{a}_i$$

Pod działaniem tej samej siły $\vec{F} = \text{const}$

$$\left\{ \frac{m_1}{m_0} = \frac{a_0}{a_1} \right\} \rightarrow \underline{\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}}$$

fundamentalne równanie mechaniki klasycznej.

$$F_x = m a_x, \quad F_y = m a_y, \quad F_z = m a_z$$

Uogólnienie na $m \neq \text{const}$

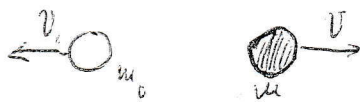
gdz $\underline{\vec{p} = m \vec{v}}$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Jak zmienia się masa?



$$m = m_0 \frac{v_0}{v}$$



def.

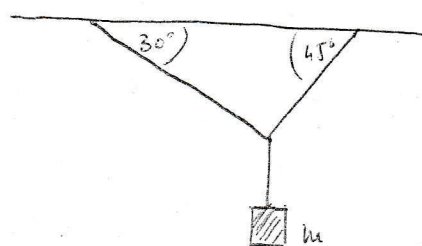
IV zasada dyn. Newtona.

Każdej akcji towarzyszy równa co do wartości, ale przeciwnie skierowana reakcja
wzajemne oddziaływanie $\vec{F}_{AB}$ jest zawsze równe co do wartości ale przeciwnie skierowane.

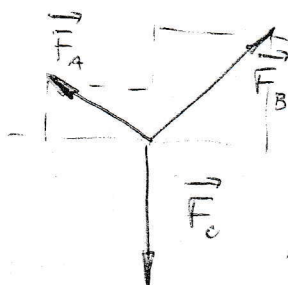
$$\vec{F}_{AB} = - \vec{F}_{BA}$$

Przykłady

Stylka



$$F_c = W = mg$$



$$\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_c = 0$$

składowe

$$x: F_A \cos \frac{\pi}{6} = F_B \cos \frac{\pi}{4}$$

$$y: F_A \sin \frac{\pi}{6} + F_B \sin \frac{\pi}{4} = F_c$$

2: —

$$x: F_A \frac{\sqrt{3}}{2} = F_B \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow F_A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} F_B$$

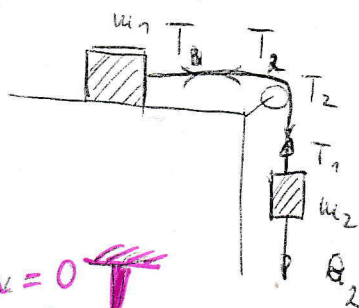
$$y: F_A \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} F_B = mg$$

$$\frac{\sqrt{2}}{3} F_B + \frac{1}{2} F_B = mg$$

$$F_B \left(\frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{1}{2} \right) = mg$$

$$F_B = \frac{mg}{\left(\frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{1}{2} \right)} = \frac{6mg}{(\sqrt{6} + 3)}$$

$$F_A = \frac{\sqrt{6}}{3} \frac{6mg}{(\sqrt{6} + 3)} = \frac{2\sqrt{6}mg}{(\sqrt{6} + 3)}$$

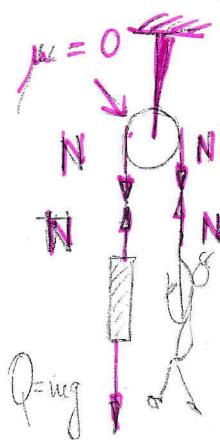


$$\begin{cases} Q_2 - T = m_2 a \\ T = m_1 a \end{cases}$$

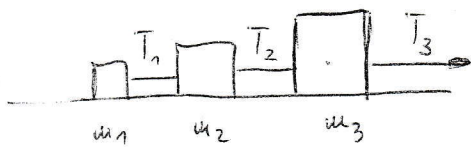
$$Q_2 = (m_1 + m_2) a \Rightarrow a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2}$$

"dziadzio" mas

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$



ciężar na bloku



$$\begin{cases} m_3 a = T_3 - T_2 \\ m_2 a = T_2 - T_1 \\ m_1 a = T_1 \end{cases}$$

$$(m_1 + m_2 + m_3) a = T_3 \Rightarrow a = \frac{T_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

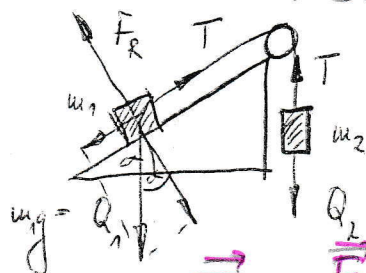
$$T_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3} T_3 \quad T_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} T_3$$

$$T_3 = 60 \text{ N}, \quad m_1 = 10 \text{ kg}, \quad m_2 = 20 \text{ kg}, \quad m_3 = 30 \text{ kg}$$

$$a = \frac{60 \text{ N}}{60 \text{ kg}} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad T_1 = \frac{1}{6} 60 \text{ N} = 10 \text{ N}$$

$$T_2 = \frac{40}{60} = \frac{2}{3} 60 \text{ N} = 40 \text{ N}$$

Równia pochyła

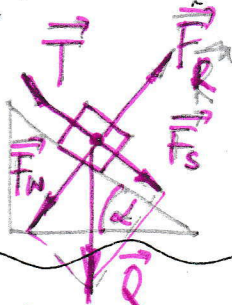


$$\begin{cases} m_2 g - T = m_2 a \\ T - m_1 g \sin \alpha = m_1 a \end{cases}$$

$$g(m_2 - m_1 \sin \alpha) = (m_1 + m_2) a \Rightarrow a = g \frac{m_2 - m_1 \sin \alpha}{m_1 + m_2}$$

$$m_2 - m_1 \sin \alpha = 0 \rightarrow a = 0$$

$$m_2 = m_1 \sin \alpha$$



Spadek ciała w powietrzu

$$F_{op} = k v$$

siły
ciężkości

$$m g - k v = m a$$

gdzie

$$m g = k v \Rightarrow v_{gr} = \frac{m g}{k}$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + k \frac{dy}{dt} = m g$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k}{m} \frac{dy}{dt} = 0$$

$$y = C e^{-\frac{k t}{m}}$$

$$y' = -\frac{k}{m} C e^{-\frac{k t}{m}}$$

$$y'' = \frac{k^2}{m^2} C e^{-\frac{k t}{m}}$$

$$\frac{k^2}{m^2} C e^{-\frac{k t}{m}} + \frac{k^2}{m^2} C e^{-\frac{k t}{m}} = 0$$

v

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m} v$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int -\frac{k}{m} dt$$

$$\ln v = -\frac{k}{m} t + C$$

$$v = v_{gr} (1 - e^{-\frac{k t}{m}})$$

v_{gr}

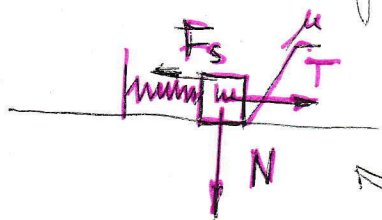
Masa a ciężar

$$m = \frac{Q}{g}$$

masa ciężar

- masę nie zależy od przyspieszenia
- ! byleż staru można podnieść na Kozien, podoraś gęły
 - nie można jej podnieść na Ziemi
 - ! jednak przenieść wagom po dynach na Kozien i Ziemi wymaga tej samej siły.

Tarcie (bardzo skomplikowane zjawisko elektromagnetyczne)



jak należy napiąć sprężynę (jakoby przetrzymałby między 2 miejscami)

$$F_s = \mu_s N$$

tarcie statyczne

Tarcie dynamiczne - siły działające między ciałami w ruchu

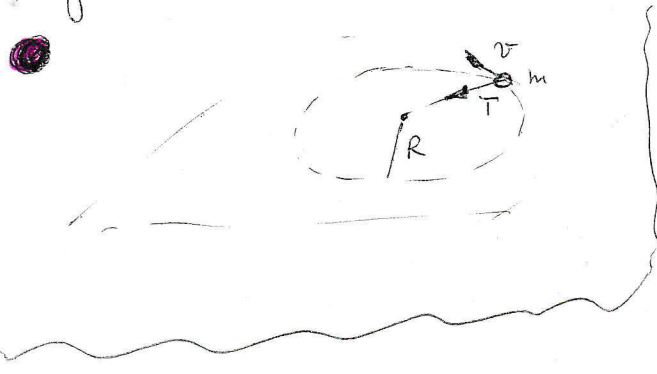
Leonardo da Vinci (1452-1519) Tarcie, tak tego samego aparatu na porzeczku ruchu jest zawsze takie samo, niezależnie od tego jak jest długość i szerokość powierzchni styku

Jeśli ciężar ciała zwiększymy dwukrotnie, tarcie również wzrośnie dwukrotnie

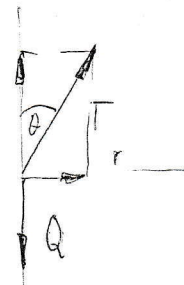
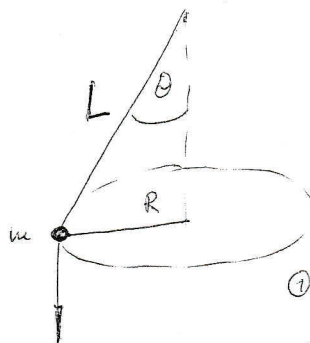
$$F_k = \mu_k N$$

$$\mu_s > \mu_k$$

Dynamika ruchu jednost. po okręgu



$$a_c = \frac{v^2}{R}$$



$$\begin{cases} ① T \cos \theta - Q = 0 \\ ② T \sin \theta = \frac{mv^2}{R} \end{cases}$$

$$① T = \frac{mg}{\cos \theta}$$

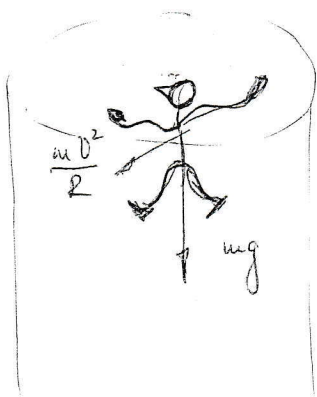
$$② T = \frac{mv^2}{R \sin \theta} = \frac{mv^2}{R \sin^2 \theta}$$

$$\frac{mg}{\cos \theta} = \frac{mv^2}{R \sin^2 \theta}$$

$$\tan^2 \theta = \frac{v^2}{Rg} \Rightarrow v^2 = Rg \tan^2 \theta \Rightarrow \underline{v = \text{const} !}$$

$$v = \frac{2\pi R}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{\sqrt{Rg \tan^2 \theta}}$$

$$T = \frac{2\pi \sqrt{R}}{\sqrt{g \tan^2 \theta}} = 2\pi \sqrt{\frac{L \cos \theta}{g}}$$



2 jaką prędkość porusza obracac się będzie by odczuwał nie spadek?

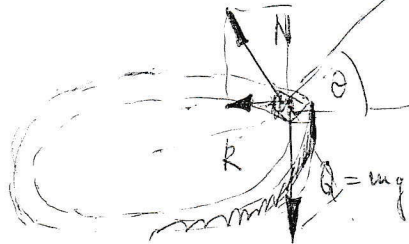
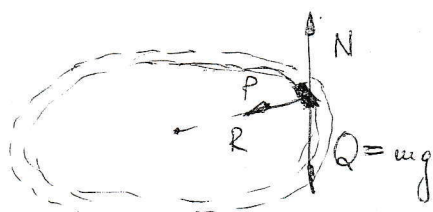
$$\frac{mv^2}{R} = N$$

$$F_s = N \mu = mg$$

$$\frac{mv^2}{R} \mu = mg$$

$$\mu = \frac{Rg}{v^2}$$

$$R = 2 \frac{m}{v} \frac{m}{s} \left(25 \frac{\text{km}}{\text{h}} \right)$$



$$N \cos \theta = mg$$

$$mg \cos \theta = N$$

$$mg = N \cos \theta$$

$$N \sin \theta = \frac{mv^2}{R}$$

$$\tan \theta = \frac{v^2}{Rg}$$

$$\frac{mv^2}{R} = \mu mg$$

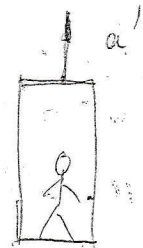
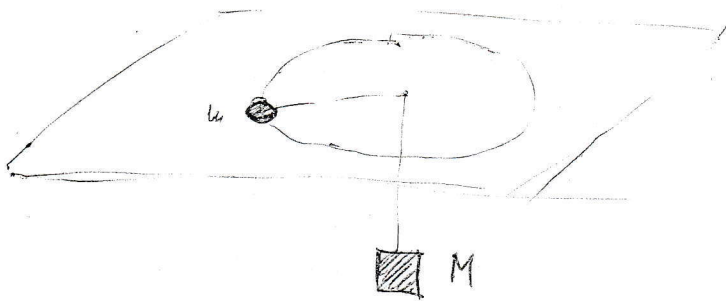
$$\mu = \frac{v^2}{Rg}$$

Siły bezwładności

układy inercyjne - takie układy odliczenia, które przemieszczają się lub poruszają się ze stałą prędkością $v = \text{const}$ względem gwiazd ślasy

układy nieinercyjne - winda, układ obracający się (mechanika klasyczna (Newton) można stosować do układów nieinercyjnych, jeśli wprowadzimy siły pozwane nazywane siłami bezwładności

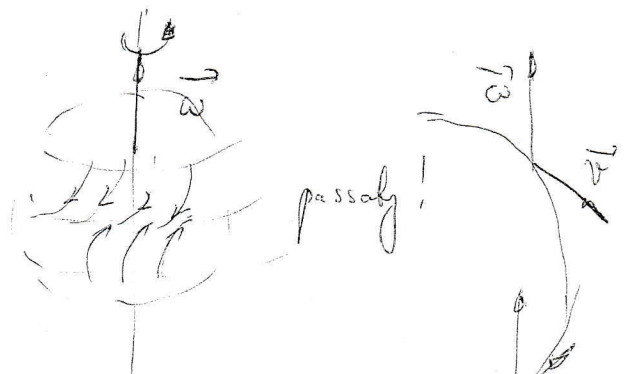
- jazdy samochód i druggis (przedmiot) na desce rozdzielnej
- pasażerowie tramwaju (autobusu) na zakrętach,
- siła dośrodkowa $\rightarrow$ siła odśrodkowa



$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

siły Coriolisa

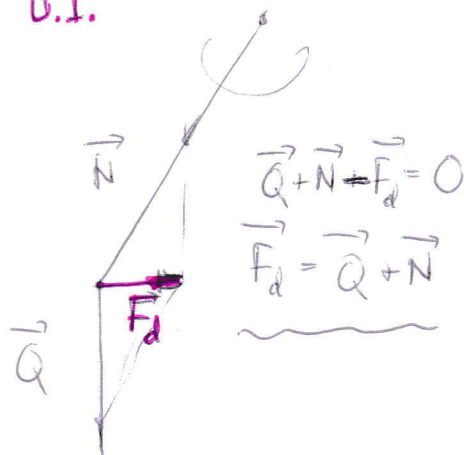
$$\vec{a}_c = -2 \vec{\omega} \times \vec{v}'$$



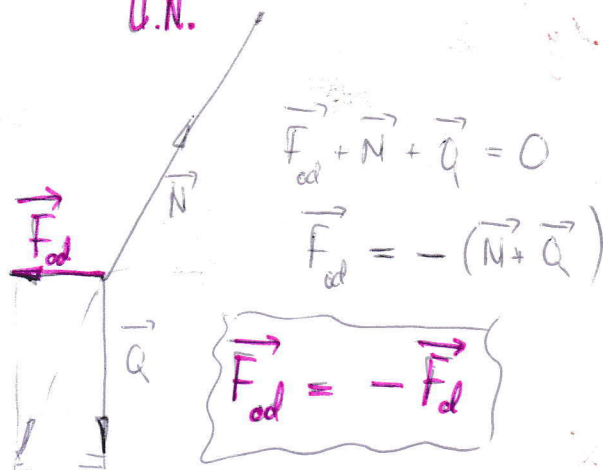
podrywaniu prędkości na pół hule

Sity bezwładności

U.I.

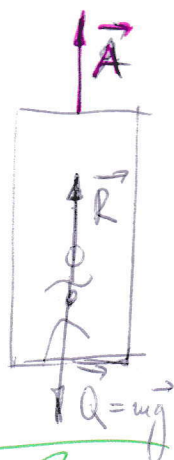


U.N.

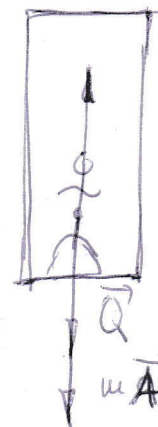


winda

U.I.



U.N.



$$m\vec{a} = -m\vec{A} + m\vec{g}$$

$$\vec{R} - \vec{Q} = \vec{F}_w$$

$$\vec{R} = \vec{Q} + m\vec{A}$$

$$\vec{a}' = \vec{A} + \vec{g}$$

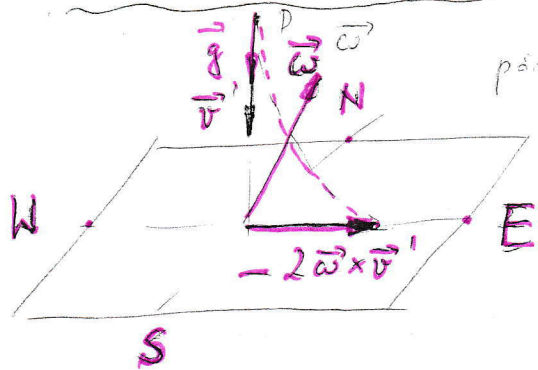
$$\vec{R} - \vec{Q} = m\vec{A}$$

$$\vec{R} = m\vec{A} + m\vec{g}$$

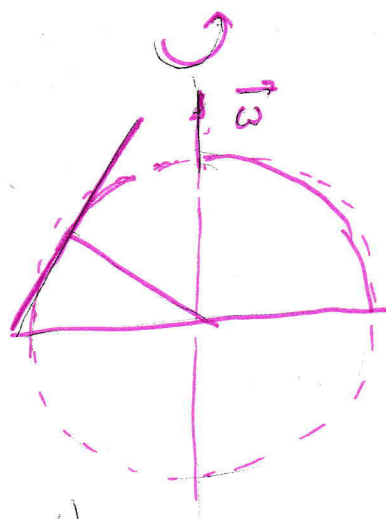
$$\vec{R} = m(\vec{A} + \vec{g})$$

$$\vec{a}' = (\vec{A} + \vec{g})$$

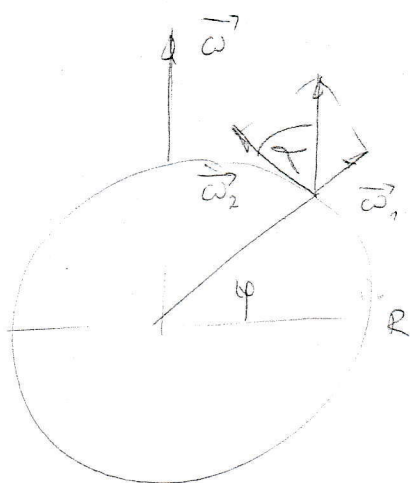
siła Coriolisa



położona
położenie

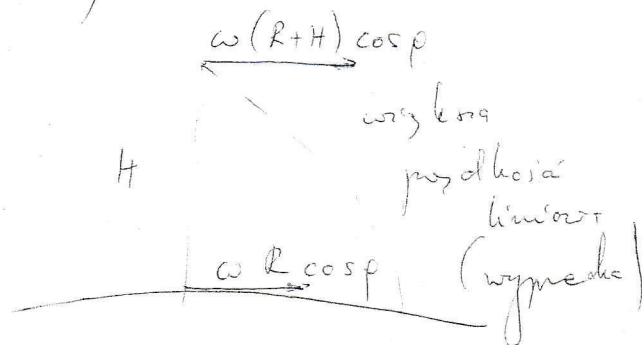


Wirowania (krążący w łoku!)

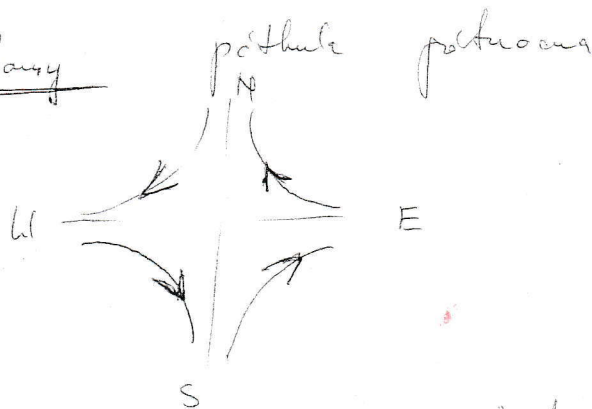


$$\vec{\omega}' = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$$

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega \sin \rho \\ \omega_2 = \omega \cos \rho \end{cases}$$

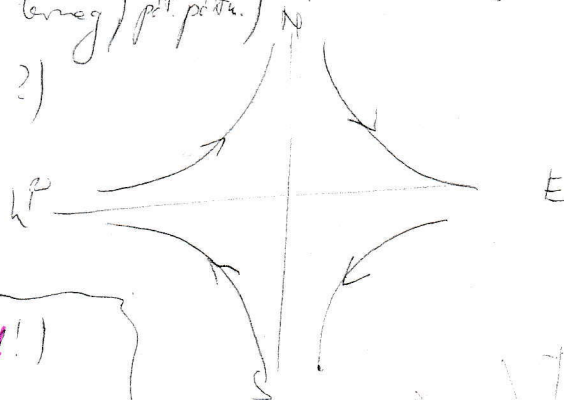


cyklony



- p. Baera
- podługami raki (przy biegu/pół. półk.)
- systemy powiatów (Włochy?)
- położenie warg, obrotowa w ruchu satelitów!

położenie położenie



Wahadło Foucault (1851!)
w Panteonie (Londra)

$$l = 67 \text{ m}, \quad m = 28 \text{ kg}, \quad T = 17 \text{ s}$$

$$3 \text{ m} \rightarrow 17 \text{ m} \rightarrow 67 \text{ m}$$

W-wa
12°/h

