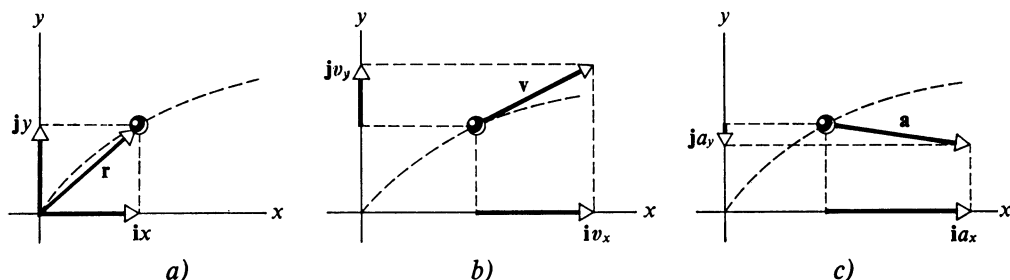


4. Ruch na płaszczyźnie

4-1. Przesunięcie, prędkość i przyspieszenie

Wróćmy do rozważań dotyczących ruchu dwuwymiarowego. Przyjmijmy, dla wygody, że odbywa się on na płaszczyźnie xy . Na rysunku 4-1 widzimy punkt materialny poruszający się wzdłuż pewnej krzywej na płaszczyźnie. *Położenie* tego punktu w chwili t , czyli jego przesunięcie względem początku układu, przedstawia wektor $\mathbf{r}$; *prędkość* punktu dana jest wektorem $\mathbf{v}$, który, jak widzieliśmy w paragrafie 3-4, musi być styczny do toru. *Przyspieszenie* przedstawia wektor $\mathbf{a}$; kierunek $\mathbf{a}$, jak zobaczymy później, nie tworzy żadnego stałego kąta z torem, lecz zależy od tego, jak zmienia się w czasie prędkość poruszającego się punktu.



Rys. 4-1. Punkt materialny porusza się po torze krzywoliniowym na płaszczyźnie xy . Przedstawiono (a) jego położenie $\mathbf{r}$, (b) prędkość $\mathbf{v}$ i (c) przyspieszenie $\mathbf{a}$ w chwili t oraz wektorowe składowe wszystkich tych wektorów. Zwracamy uwagę, że x , y , v_x , v_y i a_x są dodatnie, ale a_y jest ujemne. Porównać ten rysunek z rys. 3-3

Wektory $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ i $\mathbf{a}$ są wzajemnie zależne od siebie [patrz równanie (3-4), (3-5) i (3-10)] i dadzą się przedstawić za pomocą składowych w postaci

$$\mathbf{r} = ix + jy, \quad (4-1)$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = iv_x + jv_y, \quad (4-2)$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = ia_x + ja_y. \quad (4-3)$$

Równania te można łatwo rozszerzyć na przypadek przestrzeni trójwymiarowej, dodając

do nich odpowiednio wyrazy kz , kv_z oraz ka_z , gdzie k jest jednostkowym wektorem o kierunku osi z .

W rozdziale 3 rozważaliśmy szczególny przypadek ruchu — ruch jednowymiarowy. Jeżeli punkt materialny poruszał się, powiedzmy, wzdłuż osi x , wektory $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ oraz $\mathbf{a}$ miały kierunek zgodny z kierunkiem dodatnim lub ujemnym osi x . Składowe v_x i a_x były wówczas równe zero i ruch można było opisać za pomocą skalarnych równań wiążących v_x i a_x . Natomiast jeśli punkt poruszał się wzdłuż osi y , składowe v_x i a_x były równe zero, a ruch był opisany za pomocą równań wiążących skalarne wielkości v_y i a_y . W tym rozdziale będziemy rozważać ruch na płaszczyźnie xy ; tutaj więc, ogólnie biorąc, oba zespoły składowych będą miały niezerowe wartości.

4-2. Ruch na płaszczyźnie ze stałym przyspieszeniem

Rozważmy najpierw specjalny przypadek ruchu na płaszczyźnie, ruch ze stałym przyspieszeniem. W czasie tego ruchu nie zmienia się ani kierunek, ani wartość przyspieszenia. Nie będą się również zmieniać składowe przyspieszenia, tzn. $a_x = \text{const}$ i $a_y = \text{const}$. Mamy więc do czynienia z ruchem, który można przedstawić w postaci sumy dwóch ruchów składowych, odbywających się jednocześnie, ze stałymi przyspieszeniami, wzdłuż dwóch wzajemnie prostopadłych kierunków. Punkt materialny będzie się, ogólnie biorąc, poruszał wzdłuż pewnej krzywej leżącej na płaszczyźnie. Tak będzie również wtedy, gdy jedna ze składowych przyspieszenia, powiedzmy a_x , jest równa zero, gdyż wówczas odpowiednia składowa prędkości, powiedzmy v_x , może być różna od zera. Przykładem tego ostatniego ruchu jest ruch pocisku, który porusza się wzdłuż linii krzywej w płaszczyźnie pionowej i, jeżeli pominiemy opór powietrza, ma stałe przyspieszenie, skierowane w dół wzdłuż osi y .

Ogólne równanie opisujące ruch ze stałym przyspieszeniem $\mathbf{a}$ na płaszczyźnie możemy otrzymać przyjmując po prostu, że

$$a_x = \text{const}, \quad a_y = \text{const}.$$

Wówczas równania dla stałego przyspieszenia zebrane w tablicy 3-1 można zastosować zarówno do składowej x wektora położenia $\mathbf{r}$, wektora prędkości $\mathbf{v}$ i wektora przyspieszenia $\mathbf{a}$, jak i do składowej y tych wektorów (patrz tablica 4-1).

W obu zespołach równań podanych w tablicy 4-1 występuje ten sam parametr czasu t , ponieważ t określa chwilę czasu, w której punkt poruszający się wzdłuż linii krzywej na płaszczyźnie xy zajmuje położenie opisane składowymi x i y wektora $\mathbf{r}$.

Tablica 4-1

Ruch ze stałym przyspieszeniem na płaszczyźnie xy

Numer równania	Równanie opisujące ruch wzdłuż osi x	Numer równania	Równanie opisujące ruch wzdłuż osi y
4-4a	$v_x = v_{x0} + a_x t$	4-4a'	$v_y = v_{y0} + a_y t$
4-4b	$x = v_0 + \frac{1}{2}(v_{x0} + v_x)t$	4-4b'	$y = y_0 + \frac{1}{2}(v_{y0} + v_y)t$
4-4c	$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$	4-4c'	$y = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2$
4-4d	$v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0)$	4-4d'	$v_y^2 = v_{y0}^2 + 2a_y(y - y_0)$

Równania kinematyczne podane w tablicy 4-1 można również przedstawić w postaci wektorowej. Na przykład podstawiając równania (4-4a) i (4-4a') do równania (4-2) otrzymujemy

$$\mathbf{v} = i\mathbf{v}_x + j\mathbf{v}_y = i(v_{x0} + a_x t) + j(v_{y0} + a_y t) = (i\mathbf{v}_{x0} + j\mathbf{v}_{y0}) + (ia_x + ja_y)t.$$

W pierwszym nawiasie mamy wektor prędkości początkowej $\mathbf{v}_0$ [patrz równanie (4-2)], a w drugim nawiasie wektor przyspieszenia $\mathbf{a}$ [patrz równanie (4-3)]. Równanie wektorowe

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t \quad (4-5a)$$

jest więc równoważne dwóm równaniom skalarnym (4-4a) i (4-4a') podanym w tablicy 4-1. Z równania tego jasno widać, że prędkość $\mathbf{v}$ w dowolnej chwili jest sumą prędkości początkowej $\mathbf{v}_0$, jaką miałby punkt materialny, gdyby nie występowało przyspieszenie, oraz wektorowej zmiany prędkości $\mathbf{a}t$, uzyskanej w przedziale czasu od 0 do t , dzięki stałemu przyspieszeniu $\mathbf{a}$. Podobnie równania skalarnie (4-4c) i (4-4c') są równoważne pojedynczemu równaniu wektorowemu

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{a}t^2, \quad (4-5b)$$

które można równie łatwo zinterpretować. Udowodnienie tej i pozostałych zależności odkładamy do zadania 3.

4-3. Rzut ukośny

Przykładem ruchu krzywoliniowego ze stałym przyspieszeniem jest rzut ukośny. Jest to dwuwymiarowy ruch ciała rzuconego pod kątem do poziomu. Przykładem tego ruchu jest idealny — z pominięciem oporu powietrza — ruch piłki do gry w golfa, czy w baseball.*

Rzut ukośny ciała jest ruchem o stałym przyspieszeniu $\mathbf{g}$ skierowanym w dół; jest on więc opisany przez równania podane w tablicy 4-1. Przyspieszenie nie ma składowej poziomej. Jeżeli więc wybierzemy taki układ współrzędnych, w którym oś y jest skierowana w górę, będziemy mogli przyjąć, że $a_y = -g$ oraz $a_x = 0$.

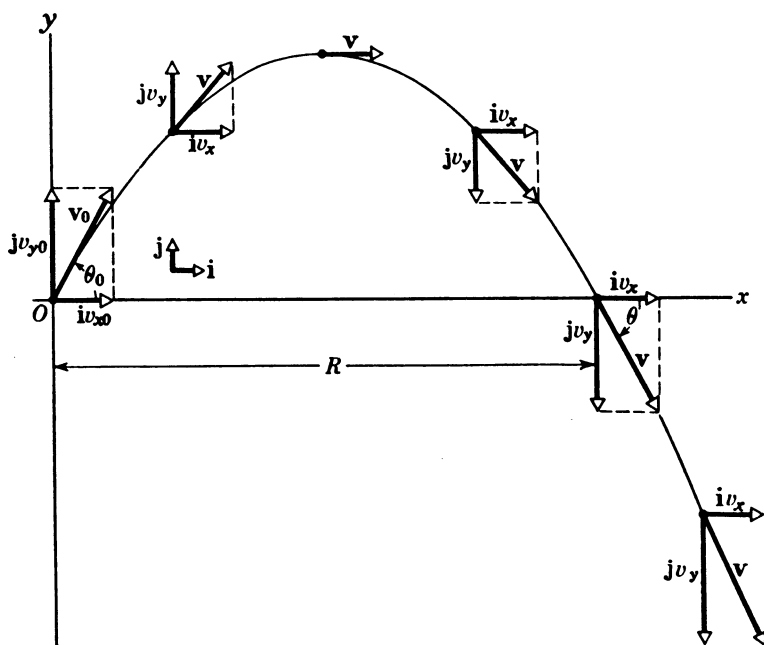
Przyjmijmy ponadto, że początek naszego układu współrzędnych pokrywa się z punktem, z którego wylatuje ciało (patrz rys. 4-2). Początek ten może więc znajdować się w punkcie, w którym piłka odrywa się od ręki lub paliwo wybucha w rakiecie. Przy takim wyborze początku układu w równaniach podanych w tablicy 4-1 mamy $x_0 = y_0 = 0$. Prędkość w chwili $t = 0$, tzn. w chwili gdy ciało zaczyna swój lot, jest równa $\mathbf{v}_0$ i tworzy kąt θ_0 z dodatnim kierunkiem osi x . Składowe x i y prędkości $\mathbf{v}_0$ (patrz rys. 4-2) są więc równe

$$v_{x0} = v_0 \cos \theta_0 \quad \text{ i } \quad v_{y0} = v_0 \sin \theta_0.$$

Ponieważ nie ma poziomej składowej przyspieszenia, pozioma składowa prędkości zachowuje swoją wartość podczas całego lotu (jest stała). Jeżeli w równaniu (4-4a) podstawimy $a_x = 0$ i $v_{x0} = v_0 \cos \theta_0$, otrzymamy

$$v_x = v_0 \cos \theta_0. \quad (4-6a)$$

* Patrz Galileo Galilei, *Dialogues Concerning Two New Sciences*, the „Fourth Day”, gdzie opisana jest fascynująca dyskusja o badaniach Galileusza nad rzutami ukośnymi.



Rys. 4-2. Tor pocisku. Przedstawiono prędkość początkową v_0 oraz jej składowe wektorowe, a także prędkość v oraz jej składowe wektorowe w pięciu innych późniejszych chwilach czasu. Zwracamy uwagę, że podczas całego lotu $v_x = v_{x0}$. Odległość R nazywamy zasięgiem poziomym

Pozioma składowa prędkości zachowuje swoją początkową wartość w ciągu całego lotu. Pionowa składowa prędkości zmienia się z czasem zgodnie z równaniem (4-4a') opisującym ruch pionowy do góry ze stałym przyspieszeniem skierowanym w dół. Jeżeli w równaniu tym podstawimy $a_y = -g$ oraz $v_{y0} = v_0 \sin \theta_0$, otrzymamy

$$v_y = v_0 \sin \theta_0 - gt \quad (4-6a')$$

Pionowa składowa prędkości jest taka sama przy spadku swobodnym. Rzeczywiście, gdybyśmy rozpatrywali ruch przedstawiony na rys. 4-2 z punktu widzenia układu odniesienia poruszającego się w prawo z prędkością v_{x0} , byłby to ruch ciała rzuconego pionowo w górę z prędkością początkową $v_0 \sin \theta_0$.

Wartość wypadkowego wektora prędkości w dowolnej chwili czasu wynosi

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad (4-7)$$

a kąt θ , jaki tworzy ten wektor z poziomem, w tej samej chwili czasu jest określony równaniem

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_y}{v_x}.$$

Wektor prędkości, jak widać na rys. 4-2, jest w każdym punkcie styczny do toru.

Składowa x wektora położenia ciała w dowolnej chwili czasu, otrzymana z równania (4-4c), w którym przyjęliśmy $x_0 = 0$, $a_x = 0$ i $v_{x0} = v_0 \cos \theta_0$, jest równa

$$x = (v_0 \cos \theta_0)t. \quad (4-6c)$$

Natomiast składowa y , otrzymana z równania (4-4c'), w którym przyjęliśmy $y_0 = 0$, $a_y = -g$ oraz $v_{y0} = v_0 \sin \theta_0$, wynosi

$$y = (v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (4-6c')$$

Równania (4-6c i c') przedstawiają x i y jako funkcje wspólnego parametru t , czasu lotu. Łącząc te równania i eliminując z nich czas, otrzymujemy zależność

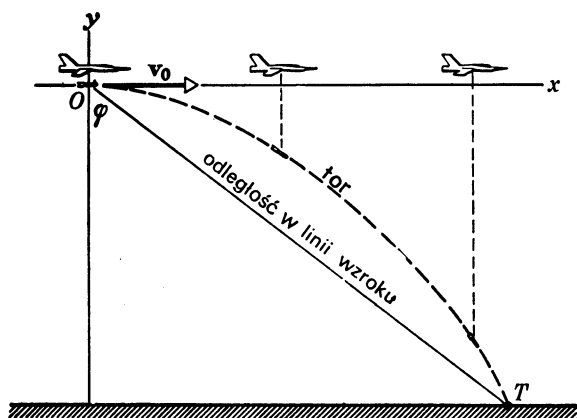
$$y = (\tan \theta_0)x - \frac{g}{2(v_0 \cos \theta_0)^2}x^2, \quad (4-8)$$

która wiąże ze sobą x i y , i jest równaniem toru pocisku. Ponieważ v_0 , θ_0 i g są wielkościami stałymi, jest to równanie typu

$$y = bx - cx^2,$$

czyli równanie paraboli. Tor pocisku jest więc parabolą*.

Przykład 1. Samolot leci ze stałą poziomą prędkością 500 km/h na wysokości 5000 m, w kierunku punktu znajdującego się dokładnie nad jego celem. Pod jakim kątem φ względem pionu powinien być widoczny cel w chwili zrzucenia paczki żywnościowej, aby trafiła ona w ten cel (patrz rys. 4-3)?



Rys. 4-3. Przykład 1. Z samolotu upuszczono paczkę żywnościową z prędkością poziomą v_0

Wybieramy układ odniesienia nieruchomy względem Ziemi, o początku umieszczonym w punkcie zrzutu. Ruch paczki w chwili oderwania się od samolotu jest taki jak ruch tego samolotu, a więc jej prędkość początkowa v_0 ma kierunek poziomy, a wartość jej wynosi 500 km/h. Kąt rzutu jest równy zero, $\theta_0 = 0$.

Czas spadania otrzymamy z równania (4-6c'). Podstawiając $\theta_0 = 0$ i $y = -5000$ m mamy

$$t = \sqrt{-\frac{2y}{g}} = \sqrt{-\frac{2(-5 \cdot 10^3 \text{ m})}{9,8 \text{ m/s}^2}} = 31,9 \text{ s}.$$

Zauważmy, że przy ruchu poziomym samolotu czas spadania paczki nie zależy od prędkości samolotu. (Porównać zadanie 11.)

Odległość w kierunku poziomym przebyta w tym czasie przez paczkę dana jest równaniem (4-6c), $x = (v_0 \cos \theta_0)t$, czyli

$$x = 500 \text{ km/h} \cdot 10^3 \text{ m/km} \cdot 1 \text{ h/3600 s} \cdot 31,9 \text{ s} = 4430 \text{ m}.$$

Kąt, pod jakim powinien być widoczny cel, jest więc równy (rys. 4-3)

$$\varphi = \arctg \frac{x}{|y|} = \arctg \frac{4430 \text{ m}}{5000 \text{ m}} = 42^\circ.$$

Czy tor paczki widziany z układu odniesienia związanego z samolotem jest parabolą?

* Patrz: „Galileo's Discovery of the Parabolic Trajectory”, Stillman Drake i James MacLachlan, *Scientific American*, Marzec 1975.

Przykład 2. Grający w piłkę nożną kopnął piłkę pod kątem 37° do poziomu, z prędkością początkową 15 m/s. (Boki trójkąta prostokątnego, w którym jeden z kątów jest równy 37° , mają się do siebie jak 3:4:5 lub 6:8:10.) Zakładając, że piłka porusza się w płaszczyźnie pionowej:

(a) Obliczyć, po jakim czasie t_1 piłka osiągnie najwyższy punkt swojego toru.

W najwyższym punkcie pionowa składowa prędkości piłki jest równa zero, $v_y = 0$. Rozwiązując równanie (4-6a') względem czasu otrzymujemy

$$t = \frac{v_0 \sin \theta_0 - v_y}{g},$$

dla wartości $v_y = 0$, $v_0 = 15$ m/s, $\theta_0 = 37^\circ$ i $g = 9,8$ m/s², mamy więc

$$t_1 = \frac{(15 \cdot \frac{6}{10} - 0) \text{ m/s}}{9,8 \text{ m/s}^2} = \frac{45}{49} \text{ s} = 0,9 \text{ s}.$$

(b) Jak wysoko wzniesie się piłka?

Piłka osiągnie maksymalną wysokość po upływie czasu $t = 45/49$ s. Korzystając z równania (4-6c')

$$y = (v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2,$$

mamy

$$y_{\max} = 15 \text{ (m/s)} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{45}{49} \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \text{ (m/s}^2\text{)} \cdot \left(\frac{45}{49}\right)^2 \text{ s}^2 = 4,1 \text{ m}.$$

(c) Jaki jest poziomy zasięg piłki i jak długo znajduje się ona w powietrzu?

Odległość w kierunku poziomym od punktu wyjściowego do punktu, w którym piłka upadnie na ziemię, nazywamy *zasięgiem* $x_{\max}$. Podstawiając w równaniu (4-6c') $y = 0$ możemy znaleźć czas t_2 potrzebny na przebycie tej odległości. Mianowicie

$$t_2 = \frac{2v_0 \sin \theta_0}{g} = \frac{2 \cdot 15 \text{ m/s} \cdot \frac{6}{10}}{9,8 \text{ m/s}^2} = \frac{90}{49} \text{ s} = 1,8 \text{ s}.$$

Zauważmy, że $t_2 = 2t_1$, co wynika z faktu, że czas wznoszenia się piłki (na maksymalną wysokość) równy jest czasowi jej spadania (z tej samej wysokości).

Zasięg $x_{\max}$ możemy znaleźć podstawiając w równaniu (4-6c) $x = (v_0 \cos \theta_0)t$, zamiast t wartość t_2 . Otrzymamy wówczas

$$x_{\max} = (v_0 \cos \theta_0)t_2 = 15 \text{ (m/s)} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{90}{49} \text{ s} = 22 \text{ m/s}.$$

(d) Jaka jest prędkość piłki w chwili, gdy uderza ona w ziemię? Z równania (4-6a) otrzymujemy

$$v_x = v_0 \cos \theta_0 = 15 \text{ (m/s)} \cdot \frac{8}{10} = 12 \text{ m/s}.$$

Z równania (4-6a') dla $t = t_2 = \frac{90}{49}$ s otrzymujemy

$$v_y = v_0 \sin \theta_0 - gt = 15 \text{ (m/s)} \cdot \frac{6}{10} - 9,8 \text{ (m/s}^2\text{)} \cdot \frac{90}{49} = -9 \text{ m/s}.$$

Ostatecznie z równania (4-7) mamy

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(12 \text{ m/s})^2 + (-9 \text{ m/s})^2} = 15 \text{ m/s}$$

oraz

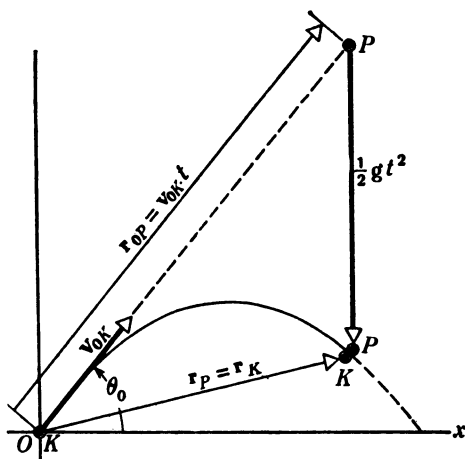
$$\tan \theta = v_y/v_x = -9/12 = -3/4,$$

skąd $\theta = -37^\circ$ (37° licząc od osi x w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara). Zauważmy, że zgodnie z warunkami symetrii, $\theta = -\theta_0$ (rys. 4-2).

Przykład 3. Bardzo ciekawe jest następujące doświadczenie. Wiatrówka jest wycelowana w przedmiot umieszczony na pewnej wysokości. W chwili gdy kula wylatuje z lufy, przedmiot ten za pomocą specjalnego mechanizmu zostaje uwolniony i zaczyna spadać swobodnie. Okazuje się, że niezależnie od tego, jaka była początkowa prędkość kuli, zawsze zderzy się ona ze spadającym przedmiotem.

Zjawisko to możemy wytłumaczyć najprościej w następujący sposób. Gdyby nie było przyspieszenia grawitacyjnego, przedmiot byłby nieruchomy, a kula poruszałaby się prosto w jego kierunku (rys. 4-4). Na skutek istnienia przyspieszenia grawitacyjnego oba ciała spadają na dół z takimi samymi prędkościami. Po upływie czasu t kula opadnie więc o odległość równą $\frac{1}{2}gt^2$ poniżej punktu, do którego doleciałaby, gdyby nie było grawitacji, a przedmiot przebędzie taką samą odległość w dół od swojego początkowego położenia. W chwili gdy tor kuli przetnie się z torem przedmiotu, oba ciała będą się znajdowały na tej

samej wysokości nad ziemią, a więc nastąpi zderzenie. Gdyby kula poruszała się z prędkością większą, niż przedstawiono na rysunku (większe v_0), zasięg jej byłby większy i tor jej przeciąłby się wyżej z torem przedmiotu. Ale wówczas do chwili przecięcia upłynęłoby mniej czasu i kula przebywałaby mniejszą odległość w dół, a więc również nastąpiłoby zderzenie. Takie samo rozważanie słuszne jest dla prędkości mniejszych niż przedstawiono na rysunku.



Rys. 4-4. Przykład 3. W ruchu balistycznym przemieszczenie kuli względem początku układu w dowolnej chwili t można traktować jako sumę dwóch wektorów: wektora $v_{0K}t$ mającego kierunek prędkości v_{0K} oraz wektora $gt^2/2$ skierowanego w dół

Pokażemy to przy pomocy wzorów. Położenie kuli i przedmiotu w dowolnej chwili t można określić za pomocą równania (4-5b),

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2.$$

Dla kuli K , $\mathbf{r}_0 = 0$ i $\mathbf{a} = \mathbf{g}$, a więc

$$\mathbf{r}_K = \mathbf{v}_{0K} t + \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2.$$

Dla przedmiotu P , $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_{0P}$, $\mathbf{v}_0 = 0$ i $\mathbf{a} = \mathbf{g}$, co daje

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_{0P} + \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2.$$

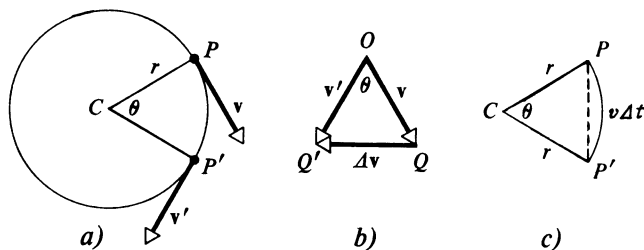
Aby nastąpiło zderzenie, musi być $\mathbf{r}_K = \mathbf{r}_P$. Równość ta jest spełniona w chwili t określonej równaniem $\mathbf{r}_{0P} = \mathbf{v}_{0K} t$, tzn. dla czasu $t (= r_{0P}/v_{0K})$ potrzebnego na to, aby kula dobiegała do przedmiotu (gdyby nie było grawitacji i gdyby oba ciała miały stałe prędkości równe prędkościom początkowym).

4-4. Ruch jednostajny po okręgu

W paragrafie 3-6 stwierdziliśmy, że przyspieszenie jest wynikiem zmian prędkości. W przypadku spadku swobodnego prędkość zmienia się jedynie co do wartości, natomiast kierunek jej pozostaje stały. Dla ruchu punktu materialnego poruszającego się tzw. *ruchem jednostajnym po okręgu* zmienia się ciągle kierunek prędkości, natomiast wartość jej pozostaje stała. Spróbujemy znaleźć przyspieszenie punktu materialnego w ruchu jednostajnym po okręgu.

Rozważamy rysunek 4-5a. Niech P będzie położeniem punktu materialnego w chwili t , a P' położeniem tego samego punktu w chwili $t + \Delta t$. Prędkość $\mathbf{v}$ w punkcie P jest wektorem stycznym do krzywej w tym punkcie. Prędkość $\mathbf{v}'$ w punkcie P' jest wektorem stycznym do krzywej w punkcie P' . Wektory $\mathbf{v}$ i $\mathbf{v}'$ mają równe długości — wartość prędkości jest stała — różnią się one jednak kierunkiem. Droga przebyta przez punkt materialny w przedziale czasu Δt jest równa długości łuku PP' , tzn. wynosi $v \Delta t$, gdzie v jest stałą wartością prędkości.

Przerysujemy teraz wektory $\mathbf{v}$ i $\mathbf{v}'$ (jak na rys. 4-5b) tak, aby miały one wspólny początek. Korzystamy tu z faktu, że wektory można dowolnie przesunąć, byleby ich wartość i kierunek nie zostały zmienione. Na podstawie otrzymanego rysunku (rys. 4-5b) możemy łatwo określić *zmianę prędkości* przy ruchu punktu materialnego od P do P' . Zmiana ta, wynosząca $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}$, jest wektorem, jaki należy dodać do prędkości $\mathbf{v}$, aby otrzymać prędkość $\mathbf{v}'$. Zauważmy, że wektor ten jest skierowany do wnętrza okręgu, w przybliżeniu w kierunku środka okręgu.



Rys. 4-5. Ruch jednostajny po okręgu. Punkt materialny obiega okrąg ze stałą prędkością (co do wartości bezwzględnej). Przedstawiono jego prędkości w położeniach P i P' . Zmiana prędkości przy przejściu od P do P' wynosi $\Delta \mathbf{v}$

Trójkąt OQQ' utworzony przez wektory $\mathbf{v}$ i $\mathbf{v}'$ i $\Delta \mathbf{v}$ oraz trójkąt CPP' utworzony przez cięciwę PP' i promienie CP i CP' (rys. 4-5c) są trójkątami podobnymi, ponieważ są to trójkąty równoramienne o takim samym kącie wierzchołkowym. Kąt θ zawarty między wektorami $\mathbf{v}$ i $\mathbf{v}'$ jest równy kątowi PCP' , ponieważ $\mathbf{v}$ jest prostopadły do CP , a $\mathbf{v}'$ — prostopadły do CP' . Możemy więc napisać

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{v \Delta t}{r} \quad (\text{w przybliżeniu}),$$

przyjmując, że długość łuku PP' jest w przybliżeniu równa długości cięciwy PP' . Zależność ta jest tym lepiej spełniona, im bardziej zmniejszamy przedział Δt , ponieważ wówczas długość łuku staje się coraz bliższa długości cięciwy. Jednocześnie kierunek $\Delta \mathbf{v}$ staje się wtedy coraz dokładniej skierowany do środka okręgu. Z podanej zależności wynika, że

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r} \quad (\text{w przybliżeniu}).$$

Gdy $\Delta t \rightarrow 0$, ostatnie wyrażenie staje się ściśle. Otrzymaliśmy więc następujące wyrażenie na wartość przyspieszenia:

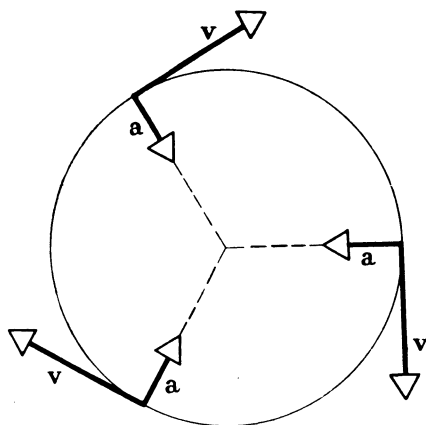
$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}. \quad (4-9)$$

Kierunek chwilowego przyspieszenia pokrywa się z kierunkiem promienia i zwrócony jest do środka okręgu.

Na rysunku 4-6 przedstawiono związek między $\mathbf{v}$ i $\mathbf{a}$ w różnych chwilach czasu. Wartość prędkości $\mathbf{v}$ jest stała, ale kierunek jej ciągle się zmienia. Powoduje to powstanie (różnego od zera) przyspieszenia $\mathbf{a}$, również stałego co do wartości i zmieniającego się nieustannie co do kierunku. Prędkość $\mathbf{v}$ jest zawsze styczna do okręgu i ma kierunek zgodny z kierun-

kiem ruchu; przyspieszenie a jest zawsze skierowane radialnie do wewnątrz. Dlatego przyspieszenie to nazywamy *przyspieszeniem radialnym* lub *dośrodkowym*.

Zarówno w przypadku spadku swobodnego, jak i rzutu ukośnego przyspieszenie a jest stałe co do wartości i kierunku. Możemy więc do tych ruchów stosować równania podane w tablicy 4-1. Z równań tych nie możemy korzystać przy ruchu jednostajnym po okręgu, ponieważ tutaj zmienia się kierunek przyspieszenia, a więc nie jest ono stałe.



Rys. 4-6. W ruchu jednostajnym po okręgu przyspieszenie a jest zawsze skierowane do środka okręgu, a więc jest prostopadłe do prędkości v

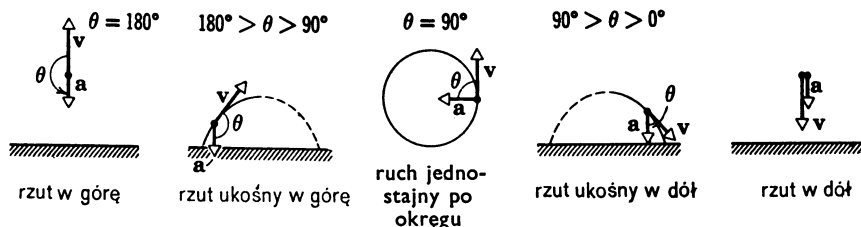
Jednostki przyspieszenia dośrodkowego są oczywiście takie same jak jednostki przyspieszenia spowodowanego zmianami wartości liczbowej prędkości. Mianowicie

$$\frac{v^2}{r} = \left(\frac{\text{długość}}{\text{czas}} \right)^2 \Bigg| \text{długość} = \frac{\text{długość}}{\text{czas}^2}, \quad \text{inaczej} \quad \frac{L}{T^2}.$$

Możemy więc wyrażać je np. w m/s^2 , cm/s^2 itd.

Przyspieszenie spowodowane zmianami kierunku prędkości jest równie realne, jak przyspieszenie spowodowane zmianami wartości liczbowej prędkości. Według definicji bowiem przyspieszenie informuje o szybkości zmian prędkości w czasie, a prędkość, która jest wektorem, może zmieniać się zarówno co do wartości, jak i co do kierunku. Jeżeli jakaś wielkość fizyczna jest wektorem, należy zawsze pamiętać o jej kierunku, ponieważ zmiany kierunku mogą być równie ważne jak zmiany wartości liczbowej wektora.

Podkreślamy jeszcze raz, że — ogólnie biorąc — kierunek ruchu nie musi się pokrywać z kierunkiem przyspieszenia i że nie ma żadnego stałego związku między kierunkiem przyspieszenia i kierunkiem prędkości. Na rysunku 4-7 pokazaliśmy przykład ruchu, w którym kąt między a i v zmienia się od 0° do 180° . Jedynie w przypadku gdy $\theta = 0^\circ$, kierunek ruchu jest zgodny z kierunkiem przyspieszenia a .



Rys. 4-7. Związki między prędkością v i przyspieszeniem a dla różnych rodzajów ruchu

Przykład 4. Księżyc krąży dookoła Ziemi, przy czym czas trwania jednego pełnego obrotu (okres) wynosi 27,3 dnia. Zakładamy, że orbita Księżyca jest okręgiem o promieniu 385 000 km. Jaka jest wartość przyspieszenia dośrodkowego w tym ruchu?

Promień okręgu $r = 385\,000\text{ km} = 3,85 \cdot 10^8\text{ m}$, a okres obrotu $T = 27,3\text{ d} = 2,36 \cdot 10^6\text{ s}$. Prędkość Księżyca na orbicie (z założenia stała) jest więc równa

$$v = 2\pi r/T = 1020\text{ m/s}.$$

Stąd wartość przyspieszenia dośrodkowego

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(1020\text{ m/s})^2}{3,85 \cdot 10^8\text{ m}} = 0,00273\text{ m/s}^2,$$

czyli wynosi zaledwie $2,78 \cdot 10^{-4}\text{ g}$.

Przykład 5. Znaleźć prędkość satelity ziemskiego krążącego po orbicie kołowej na wysokości 230 km nad powierzchnią Ziemi, przyjmując, że przyspieszenie ziemskie na tej wysokości wynosi $g = 920\text{ cm/s}^2$. Promień Ziemi R jest równy 6370 km.

Podobnie jak każde swobodne ciało znajdujące się w pobliżu powierzchni Ziemi, satelita ma przyspieszenie grawitacyjne g skierowane do środka Ziemi. Dzięki temu przyspieszeniu może on poruszać się po orbicie kołowej. Przyspieszenie dośrodkowe satelity wynosi więc $a = v^2/r = g$, skąd

$$g = v^2/(R+h),$$

czyli

$$v = \sqrt{(R+h)g} = \sqrt{(6370\text{ km} + 230\text{ km})10^5\text{ cm/km} \cdot 920\text{ cm/s}^2} = 78 \cdot 10^4\text{ cm/s} = 28100\text{ km/h}.$$

Wyprowadźmy teraz równanie (4-9) posługując się metodą wektorową. Na rysunku 4-8a widzimy punkt materialny poruszający się ruchem jednostajnym po okręgu O umieszczonym w początku układu odniesienia. Do opisu takiego ruchu znacznie wygodniejsze od współrzędnych kartezjańskich x i y są współrzędne biegunowe r i θ , ponieważ r jest stałe, a θ zmienia się liniowo z czasem; zmiany współrzędnych x i y są bardziej skomplikowane. Te dwa układy współrzędnych są ze sobą związane w następujący sposób:

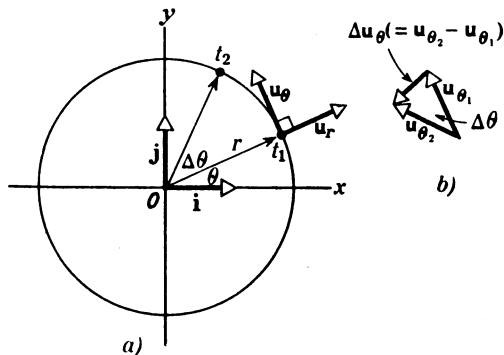
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{ i } \quad \theta = \arctg(y/x) \quad (4-10a)$$

lub zależnością odwrotną:

$$x = r \cos \theta \quad \text{ i } \quad y = r \sin \theta. \quad (4-10b)$$

W prostokątnych układach współrzędnych, przy opisie ruchu na płaszczyźnie xy , używaliśmy wektorów jednostkowych $\mathbf{i}$ i $\mathbf{j}$. Tutaj wygodniej jest wprowadzić nowe wektory jednostkowe $\mathbf{u}_r$ i $\mathbf{u}_\theta$. Wektory te, podobnie jak $\mathbf{i}$ i $\mathbf{j}$, mają jednostkową długość i są bezwymiarowe, wyznaczają one jedynie kierunek.

Wektor jednostkowy $\mathbf{u}_r$ w dowolnym punkcie wskazuje kierunek wzrostu r w tym punkcie; jest on zawsze skierowany radialnie na zewnątrz od środka układu. Wektor



Rys. 4-8. (a) Punkt materialny poruszający się w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara po okręgu o promieniu r . (b) Wektory jednostkowe $\mathbf{u}_{\theta 1}$ oraz $\mathbf{u}_{\theta 2}$ w chwilach odpowiednio, t_1 i t_2 , a także $\Delta \mathbf{u}_\theta (= \mathbf{u}_{\theta 2} - \mathbf{u}_{\theta 1})$

jednostkowy $\mathbf{u}_\theta$ w pewnym punkcie wskazuje kierunek wzrostu θ w tym punkcie: jest on zawsze styczny do okręgu przechodzącego przez dany punkt i ma kierunek przeciwny do kierunku ruchu wskazówek zegara. Jak widać na rys. 4-8a, wektory $\mathbf{u}_r$ i $\mathbf{u}_\theta$ są do siebie nawzajem prostopadłe. Wektory jednostkowe $\mathbf{u}_r$ i $\mathbf{u}_\theta$ różnią się od wektorów jednostkowych $\mathbf{i}$ i $\mathbf{j}$ tym, że kierunki $\mathbf{u}_r$ i $\mathbf{u}_\theta$ zmieniają się od punktu do punktu; wektory jednostkowe $\mathbf{u}_r$ i $\mathbf{u}_\theta$ nie są więc wektorami stałymi.

Ruch punktu materialnego poruszającego się ze stałą prędkością $\mathbf{v}$ (w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara) po okręgu o środku umieszczonym w początku układu współrzędnych (patrz rys. 4-8a), można opisać za pomocą wektorów $\mathbf{u}_r$ i $\mathbf{u}_\theta$ równaniem wektorowym:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_\theta v. \quad (4-11)$$

Z zależności tej widać, że kierunek wektora $\mathbf{v}$ (pokrywający się z kierunkiem $\mathbf{u}_\theta$) jest styczny do okręgu, a wartość v jest stała i równa v (ponieważ wartość wektora $\mathbf{u}_\theta$ jest równa jedności).

Aby znaleźć przyspieszenie, łączymy równania (4-3) i (4-11) otrzymując

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} v. \quad (4-12)$$

Zauważmy, że w równaniu (4-11) v jest stałe ($v = \text{const}$), natomiast $\mathbf{u}_\theta$ nie jest stałe, ponieważ kierunek $\mathbf{u}_\theta$ zmienia się wraz z ruchem cząstki. Aby obliczyć $d\mathbf{u}_\theta/dt$, spójrzmy na rysunek 4-8b, który przedstawia wektory jednostkowe $\mathbf{u}_{\theta_1}$ i $\mathbf{u}_{\theta_2}$ na końcach przedziału $\Delta t (= t_2 - t_1)$. Wektor $\Delta\mathbf{u}_\theta (= \mathbf{u}_{\theta_2} - \mathbf{u}_{\theta_1})$ w granicznym przypadku, gdy $\Delta t \rightarrow 0$, jest skierowany radialnie do środka koła. Innymi słowy, $d\mathbf{u}_\theta$ ma w dowolnym punkcie kierunek taki, jak $-\mathbf{u}_r$. Kąt zawarty między wektorami $\mathbf{u}_{\theta_2}$ i $\mathbf{u}_{\theta_1}$ jest równy kątowi, jaki zakreśla w czasie Δt promień łączący początek układu z poruszającym się punktem. Wartość wektora $\Delta\mathbf{u}_\theta$ jest równa po prostu $\Delta\theta$; pamiętajmy, że wartości wektorów $\mathbf{u}_{\theta_1}$ i $\mathbf{u}_{\theta_2}$ na rys. 4-8b są równe jedności. Stąd

$$\frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} = -\mathbf{u}_r \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = -\mathbf{u}_r \frac{d\theta}{dt}$$

i z równania (4-12)

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} v = -\mathbf{u}_r \frac{d\theta}{dt} v. \quad (4-13)$$

Ale $d\theta/dt$ jest prędkością kątową punktu materialnego i wynosi

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi}{\text{okres obrotu}} = \frac{2\pi}{2\pi r/v} = \frac{v}{r}.$$

Podstawiając tę wartość do równania (4-13) otrzymujemy ostatecznie

$$\mathbf{a} = -\mathbf{u}_r \frac{v^2}{r}, \quad (4-14)$$

skąd widać, że wartość przyspieszenia w ruchu jednostajnym po okręgu wynosi v^2/r (patrz równanie 4-9); jest ono skierowane radialnie do środka okręgu ($-\mathbf{u}_r$). Zależność wektorowa (4-14) określa więc zarówno wartość jak i kierunek przyspieszenia dośrodkowego $\mathbf{a}$. Zauważmy, że zgodnie z tym, czego oczekiwaliśmy, $\mathbf{a}$ ma stałą wartość, lecz zmienia ciągle kierunek, ponieważ wektor $\mathbf{u}_r$ zmienia kierunek.

4-5. Przyspieszenie styczne w ruchu po okręgu

Rozważmy teraz bardziej ogólny przypadek ruchu po okręgu, w którym wartość prędkości v poruszającego się punktu materialnego nie jest stała. Będziemy korzystać z notacji wektorowej i ze współrzędnych biegunowych. Podobnie jak poprzednio, wektor prędkości jest określony równaniem (4-11),

$$\mathbf{v} = u_\theta \mathbf{e}_\theta,$$

ale teraz nie tylko u_θ , lecz i $\mathbf{e}_\theta$ zmienia się z czasem. Korzystając ze wzoru na pochodną iloczynu otrzymujemy

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = u_\theta \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} + \mathbf{e}_\theta \frac{du_\theta}{dt}. \quad (4-15)$$

W równaniu (4-12) nie występował pierwszy wyraz tego równania, ponieważ tam v było stałe, a więc dv/dt było równe zero. Drugi wyraz równania (4.15) jest równy, jak widzieliśmy w poprzednim paragrafie, $-\mathbf{u}_r v^2/r$. Równanie (4.15) możemy przepisać w postaci

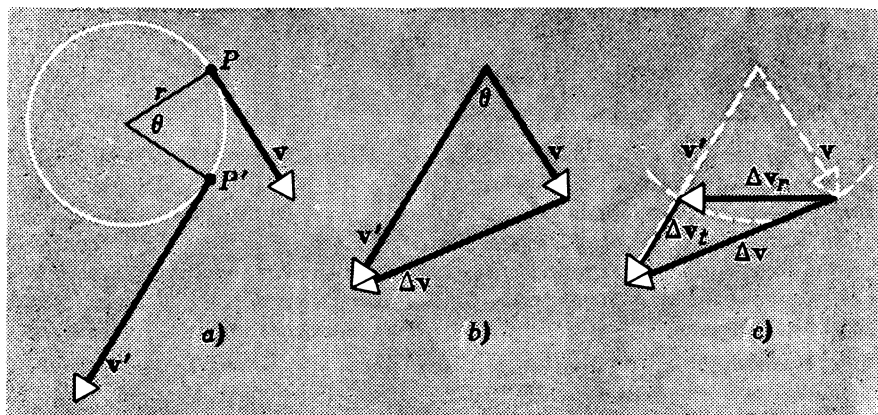
$$\mathbf{a} = u_\theta a_t - u_r a_r, \quad (4-16)$$

gdzie $a_t = dv/dt$, a $a_r = v^2/r$. Pierwszy wyraz, $u_\theta a_t$, będący wektorową składową $\mathbf{a}$ o kierunku stycznym do toru, związany jest ze zmianami wartości prędkości w ruchu po okręgu (patrz rys. 4-9). Wyraz ten, a również samo a_t , nazywamy *przyspieszeniem stycznym*. Drugi wyraz $-u_r a_r$, będący wektorową składową $\mathbf{a}$ skierowaną radialnie do środka okręgu, powstaje na skutek zmian kierunku prędkości w ruchu po okręgu (patrz rys. 4-9). Wyraz ten oraz samo a_r nazywamy *przyspieszeniem dośrodkowym*.

Całkowita wartość przyspieszenia chwilowego w ruchu po okręgu jest więc równa

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2}. \quad (4-17)$$

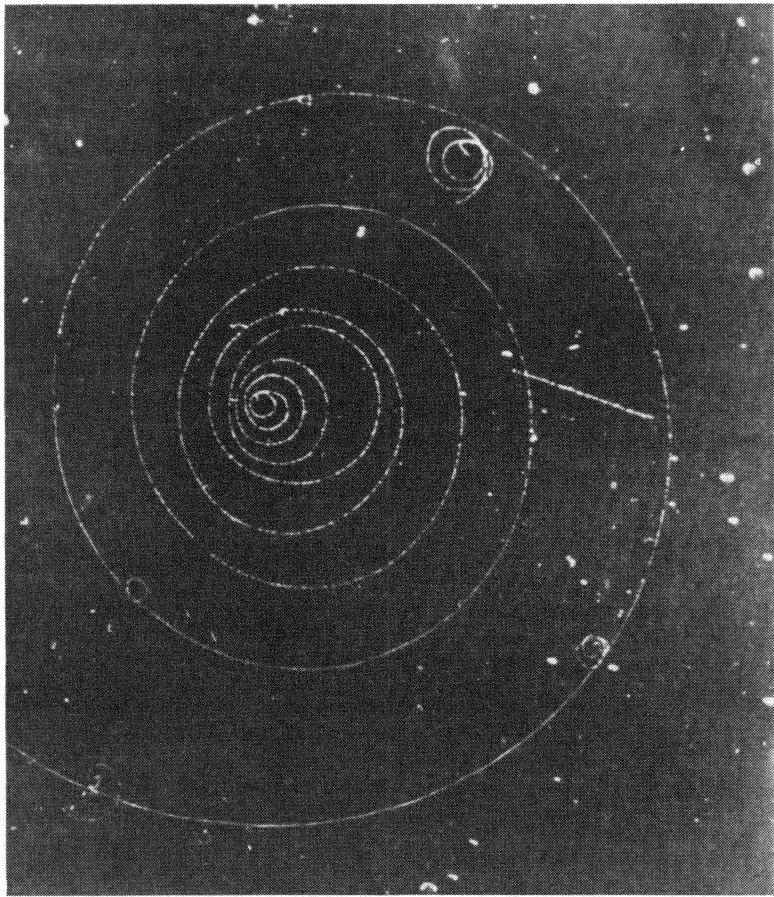
Jeżeli wartość prędkości v jest stała, to $a_t = dv/dt = 0$ i równanie (4-16) redukuje się do równania (4-14). Gdy wartość prędkości jest zmienna, a_t jest różne od zera i a_r zmienia



Rys. 4-9. (a) W ruchu niejednostajnym po okręgu wektor prędkości zmienia swoją wartość bezwzględną. (b) Zmiana prędkości $\Delta \mathbf{v}$ przy przejściu od położenia P do położenia P' składa się z dwóch części: (c) zmiany $\Delta \mathbf{v}_t$, spowodowanej zmianą kierunku prędkości $\mathbf{v}$ oraz zmiany $\Delta \mathbf{v}_r$, spowodowanej zmianą wartości bezwzględnej prędkości v . W granicy, gdy $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta \mathbf{v}_r$ jest skierowane do środka okręgu C, a $\Delta \mathbf{v}_t$ — styczne do tego okręgu

się od punktu do punktu. Gdyby wartość prędkości zmieniała się niejednostajnie, również a_t zmieniałoby się od punktu do punktu.

Wzory na $a_t (= dv/dt)$ i $a_r (= v^2/r)$ można stosować do ruchu po dowolnej krzywej, nie będącej okręgiem, pod warunkiem, że jako r podstawimy promień krzywizny krzywej w miejscu, w którym w danej chwili znajduje się punkt materialny. Wówczas a_t jest skła-



Rys. 4-10. Ślad pozostawiony w 10-calowej komorze pęcherzykowej wypełnionej ciepłym wodorem przez poruszający się spiralnie elektron. (Dzięki uprzejmości Lawrence Radiation Laboratory). Zdjęcie to jest jednym z wielu zdjęć przeznaczonych do oglądania stereoskopowego i opublikowanym, wraz z omówieniem, jako *Introduction to the Detection of Nuclear Particles in a Bubble chamber*, The Ealing Press, Cambridge, Massachusetts (1964). Przy oglądaniu stereoskopowym można zauważyć, że elektron porusza się po spirali w stronę patrzącego. Wektor prędkości elektronu nie leży więc w płaszczyźnie rysunku, lecz wystaje przed nią; ruch jego jest więc trójwymiarowy, a nie dwuwymiarowy, jak zakładaliśmy w innych przykładach tego rozdziału

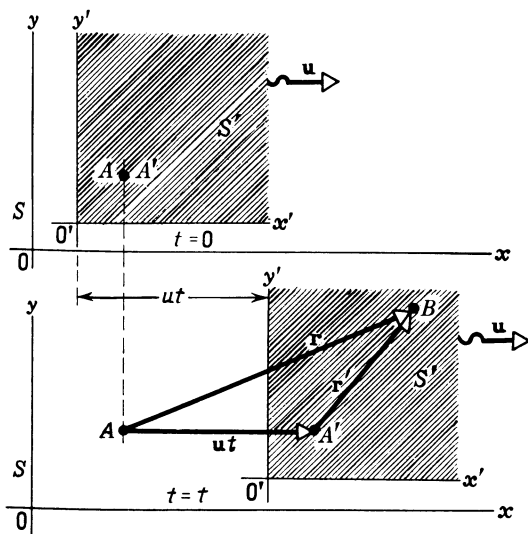
dową przyspieszenia styczną do krzywej w tym punkcie, a a_r składową normalną. Na rysunku 4-10 pokazano ślad pozostawiony w komorze pęcherzykowej napełnionej ciepłym wodorem przez poruszający się po spiralnej krzywej wysokoenergetyczny elektron. Przechodząc przez ciecz znajdującą się w komorze elektron traci energię, przy czym wartość jego prędkości jednostajnie maleje. W każdym punkcie toru istnieje więc *przyspieszenie*

styczne $a_t = dv/dt$. Przyspieszenie dośrodkowe a_r w dowolnym punkcie jest równe v^2/r , gdzie r jest promieniem krzywizny toru w omawianym punkcie w miarę jak cząstka traci energię, maleje zarówno v , jak i r . Do ruchu po spirali zmusza elektron obecne w komorze pole magnetyczne o kierunku prostopadłym do płaszczyzny rysunku (rys. 4-10) (patrz rozdział 33).

4-6. Prędkość względna i przyspieszenie względne

W poprzednich paragrafach rozważaliśmy dodawanie prędkości w szczególnym wybranym układzie odniesienia. Obecnie rozważymy zależność między prędkością przedmiotu określoną przez jednego obserwatora S (układ odniesienia S) a prędkością tego samego przedmiotu określoną przez innego obserwatora S' (układ odniesienia S') poruszającego się względem pierwszego.

Przypuśćmy, że obserwator S jest związany z Ziemią, a więc jego układem odniesienia jest Ziemia. Drugi obserwator S' porusza się względem Ziemi; może to być na przykład pasażer jadącego pociągu. Jego układem odniesienia jest więc pociąg. Obaj obserwują ruch tego samego przedmiotu, powiedzmy samochodu jadącego po szosie, czy człowieka spacerującego po wagonie. Każdy obserwator notuje przemieszczenie, prędkość i przyspieszenie obserwowanego przedmiotu, mierzone *względem swojego własnego układu odniesienia*. Jak można porównać te pomiary? W tym paragrafie rozważymy jedynie przypadek, gdy drugi układ porusza się względem pierwszego ze *stałą* prędkością u .



Rys. 4-11. Dwa układy odniesienia S ($= x, y$) oraz S' ($= x', y'$); S' przesuwa się względem S w prawo z prędkością u

Na rysunku 4-11 układ odniesienia S nieruchomy względem Ziemi reprezentują osie x i y . Obszar zacieniony należy do drugiego układu odniesienia S' reprezentowanego przez osie x' i y' . Układ S' porusza się wzdłuż osi x ze stałą, mierzoną względem układu S prędkością u ; można sobie wyobrazić na przykład, że jest on narysowany na podłodze wagonu towarowego.

W chwili początkowej przedmiot (powiedzmy piłka leżąca na podłodze wagonu) zajmuje położenie oznaczone w układzie S literą A , a w układzie S' literą A' . Po upływie

czasu t wagon i związany z nim układ S' oddalił się na odległość ut w prawo, a przedmiot przesunął się do punktu B . W układzie S przemieszczenie przedmiotu z jego początkowego położenia dane jest wektorem $\mathbf{r}$, narysowanym od punktu A do B . W układzie S' przemieszczenie przedmiotu z jego początkowego położenia przedstawia wektor $\mathbf{r}'$ łączący punkt A' z punktem B . Wektory te różnią się od siebie, ponieważ punkt odniesienia A' w poruszającym się układzie w czasie ruchu przedmiotu przesunął się na odległość ut wzdłuż osi x . Z rysunku widać, że wektor $\mathbf{r}$ jest sumą wektorów $\mathbf{r}'$ i ut :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + ut. \quad (4-18)$$

Różniczkując równanie (4-18) otrzymujemy

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \mathbf{u}.$$

Ale $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$ jest prędkością chwilową przedmiotu mierzoną w układzie S , a $d\mathbf{r}'/dt = \mathbf{v}'$ prędkością chwilową tego samego przedmiotu mierzoną w układzie S' , tak że

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{u}.$$

Stąd prędkość $\mathbf{v}$ przedmiotu względem układu S jest sumą geometryczną prędkości $\mathbf{v}'$ tego przedmiotu względem układu S' oraz prędkości $\mathbf{u}$ układu S' względem układu S .

Przykład 6. (a) Kompas znajdujący się w samolocie wskazuje, że samolot leci dokładnie na wschód. Informacje z Ziemi podają, że wiatr wieje prosto na północ. Przedstawić graficznie prędkość samolotu względem Ziemi.

Obserwowanym przedmiotem jest samolot. Układem odniesienia S jest Ziemia, a układem odniesienia S' poruszającym się względem Ziemi — powietrze. Wobec tego

$\mathbf{u}$ jest prędkością powietrza względem Ziemi,

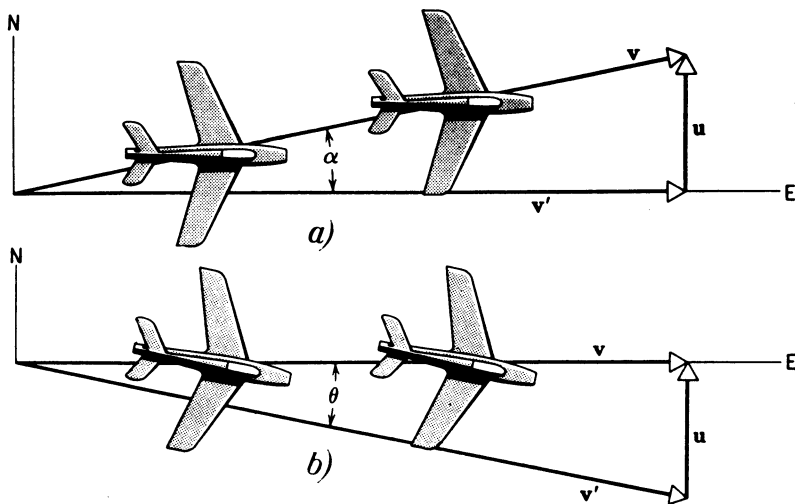
$\mathbf{v}'$ jest prędkością samolotu względem powietrza,

$\mathbf{v}$ jest prędkością samolotu względem Ziemi.

W tym przypadku $\mathbf{u}$ jest skierowane na północ, a $\mathbf{v}'$ na wschód. Prędkość samolotu względem Ziemi określa zależność $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{u}$ (patrz rys. 4-12a).

Kąt α określający odchylenie kursu samolotu od kierunku wschodniego na północ znajdujemy ze wzoru

$$\operatorname{tg} \alpha = u/v'.$$



Rys. 4-12. Przykład 6

Prędkość samolotu względem Ziemi jest dana równaniem

$$v = \sqrt{v'^2 + u^2}.$$

Na przykład, jeżeli prędkościomierz wskazuje, że samolot porusza się względem powietrza z prędkością 320 km/h i jeżeli prędkość wiatru względem Ziemi wynosi 64 km/h, to

$$v = \sqrt{(320)^2 + (64)^2} \text{ km/h} = 326 \text{ km/h}$$

jest prędkością samolotu względem Ziemi, a

$$\alpha = \arctg \frac{64}{320} = 11^\circ 20'$$

określa odchylenie kursu samolotu na północ.

(b) Znaleźć graficznie kierunek, w jakim powinien pilot prowadzić samolot względem powietrza, aby samolot leciał względem Ziemi dokładnie na wschód.

Teraz samolot będzie częściowo leciał „pod wiatr”. Jego prędkość względem Ziemi będzie więc mniejsza niż poprzednio. Związki między wektorami prędkości przedstawia rys. 4-12b. Korzystając z poprzednich danych: u i v' znaleźć liczbowe wartości θ i v .

Widzimy, że różni obserwatorzy, poruszający się względem siebie, przypisują temu samemu przedmiotowi różne prędkości. Prędkości te *zawsze różnią się o prędkość względną* tych dwóch obserwatorów, która tutaj jest *prędkością stałą*. Stąd wniosek, że jeżeli prędkość przedmiotu zmienia się, *zmiana prędkości jest taka sama dla obu obserwatorów*. Każdy z nich mierzy więc *to samo przyspieszenie* przedmiotu. Przyspieszenie przedmiotu jest takie samo we wszystkich układach odniesienia poruszających się względem siebie ze stałymi prędkościami; tzn. $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$. Wynik ten można otrzymać formalnie, jeżeli zróżniczkujemy równanie (4-19). Mianowicie $d\mathbf{v}/dt = d\mathbf{v}'/dt + d\mathbf{u}/dt$; ale gdy $\mathbf{u}$ jest stałe, $d\mathbf{u}/dt = 0$, a więc $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$.

Pytania

1. Czy przy rzucie ukośnym z pominięciem oporu powietrza powstaje kiedykolwiek konieczność rozważania ruchu trójwymiarowego zamiast dwuwymiarowego?

2. Czy przy skoku w dal odgrywa jakąś rolę wysokość skoku. Jakie czynniki określają długość skoku?

3. Rozważmy ruch strumienia elektronów w lampie elektronowej oraz strumienia wody wylatującego z ogrodniczego węża do polewania. Zakładamy, że prędkość początkowa w obu przypadkach jest pozioma. Dlaczego tor elektronów pod wpływem grawitacji nie odchyła się tak bardzo jak tor cząsteczek wody?

4. W którym punkcie toru pocisku osiąga on prędkość minimalną, a w którym maksymalną?

5. Przyjmując, że można by zmienić kąt równi pochyłej θ o gładkiej powierzchni, która jest przytwierdzona do poziomego blatu stołu za pomocą zawiasów, jaki należy wybrać kąt θ , aby spadające pionowo piłki po sprężystym odbiciu się od równi uzyskiwały maksymalny zasięg?

6. Dlaczego korzystniejsze jest (jeżeli w ogóle jest) mierzenie kątów w radianach niż w stopniach?

7. Podczas lotu nurkowego samolotu lotnik poruszający się po łuku koła doznaje przyspieszenia trzy razy większego od przyspieszenia ziemskiego. Jak należy rozumieć to stwierdzenie?

8. Opisz jakościowo przyspieszenie działające na koralik ślizgający się bez tarcia po spirali z drutu w kierunku jej środka ze stałą prędkością.

9. Czy przyspieszenie pocisku można w każdym punkcie toru przedstawić za pomocą składowej stycznej i radialnej? Jeżeli tak, to czy takie przedstawienie ma jakieś zalety?

10. Na krótkim odcinku łuku okręgu jest dobrym przybliżeniem łuku paraboli. Jaki jest więc promień r łuku okręgu zbliżonego do toru balistycznego pocisku o prędkości początkowej v_0 i kącie θ_0 w pobliżu szczytu toru?

11. Chłopiec siedzący na platformie drezyny poruszającej się ze stałą prędkością rzuca piłkę pionowo do góry. Czy piłka upadnie za nim, przed nim, czy spadnie do jego rąk? Jak zachowałaby się piłka, gdyby drezyna jechała naprzód z przyspieszeniem lub poruszała się po torze krzywoliniowym w czasie, gdy piłka jest w powietrzu?

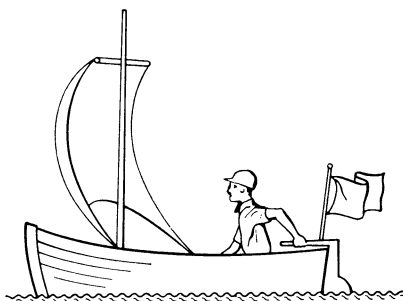
12. Człowiek stojący na platformie pociągu poruszającego się ze stałą prędkością, wychylając się poza platformę, upuścił monetę. Opisać, jak będzie wyglądał tor monety widziany przez (a) człowieka stojącego na platformie, (b) osobę stojącą na ziemi w pobliżu torów, (c) osobę jadącą w innym pociągu poruszającym się po równoległym torze w przeciwnym kierunku niż pierwszy pociąg.

13. Samochód jedzie w czasie gwałtownego deszczu ze stałą prędkością v_s . Krople deszczu spadają pionowo z prędkością końcową v_d . Pod jakim kątem krople deszczu uderzają w pionową przednią szybę samochodu?

14. Krople deszczu padają jednostajnie pionowo w dół. Z jaką prędkością możliwie najmniejszą, największą czy jakąś pośrednią, należy iść, przechodząc z jednego miejsca na drugie, aby jak najmniej zmoknąć (zetrąść się z najmniejszą ilością kropel deszczu)?

15. Co się nie zgadza na rys. 4-13? Żaglówka płynie z wiatrem.

16. Winda jedzie w dół ze stałą prędkością. Pasażer wyjmuje z kieszeni monetę i rzuca ją na podłogę. Jakie będzie przyspieszenie monety obserwowane przez (a) osobę jadącą w windzie i (b) osobę nieruchomą względem ścian budynku.



Rys. 4-13. Pytanie 15

Zadania

Paragraf 4-1

1. Dowieść, że wektor $\mathbf{a}$ zdefiniowany jako:

$$\mathbf{a} = i a_x + j a_y + k a_z$$

ma składowe skalarne dane następującymi wyrażeniami:

$$a_x = \mathbf{i} \cdot \mathbf{a}, \quad a_y = \mathbf{j} \cdot \mathbf{a}, \quad a_z = \mathbf{k} \cdot \mathbf{a}.$$

Paragraf 4-2

2. Punkt materialny porusza się w ten sposób, że jego położenie jest następującą funkcją czasu:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + 4t^2 \mathbf{j} + t \mathbf{k}.$$

(a) Wyrazić prędkość i przyspieszenie punktu materialnego jako funkcje czasu. (b) Jaki jest kształt drogi punktu materialnego?

3. Wykazać, że: (a) Równania (4-4b) i (4-4b') można wyrazić w postaci wektorowej jako

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \frac{1}{2}(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v})t.$$

(b) Równania (4-4c) i (4-4c') jako

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2.$$

Wykazać również, że (c) równania (4-4d) i (4-4d') można połączyć i utworzyć

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0 + 2\mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Paragraf 4-3

4. Pocisk znajduje się w najwyższym punkcie toru. (a) Jaka jest jego prędkość wyrażona za pomocą $\mathbf{v}_0$ i θ_0 ? (b) Jakie jest jego przyspieszenie? (c) Jaki kąt tworzy kierunek przyspieszenia z kierunkiem prędkości? (Patrz pytanie 10.)

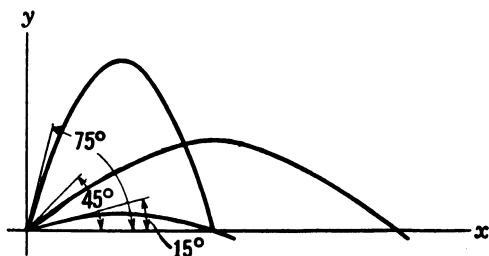
5. Piłka stacza się z poziomego stołu o wysokości 1,2 m. Jaka prędkość miała piłka w chwili odrywania się od krawędzi stołu, jeżeli upadła ona na podłogę w odległości 1,5 m od stołu.

Odp.: 3 m/s.

6. Strzelając z karabinu chcemy trafić w mały przedmiot znajdujący się w odległości 45 m. Jak wysoko ponad tym przedmiotem powinien znajdować się punkt, do którego należy wycelować karabin, jeżeli prędkość kuli przy wylocie z lufy wynosi 450 m/s?

7. (a) Pokazać, że zasięg pocisku wyrzuconego pod kątem θ_0 względem poziomu, z prędkością początkową v_0 , wynosi $x_{\max} = (v_0^2/g)\sin(2\theta_0)$. Następnie pokazać, że największy zasięg jest osiągany przy kącie wyrzutu 45° (patrz rys. 4-14). (b) Wykazać, że maksymalna wysokość osiągnięta przez pocisk wynosi $y_{\max} = (v_0 \sin \theta_0)^2 / (2g)$. (c) Znaleźć kąt rzutu, w którym zasięg poziomy i maksymalna wysokość pocisku są równe.

Odp.: (c) 76° .



Rys. 4-14. Zadania 7 i 15

8. Pocisk został wystrzelony poziomo z karabinu umieszczonego 44 m ponad płaszczyznę poziomą z prędkością przy wylocie z lufy 240 m/s. (a) Ile czasu będzie trwał lot pocisku w powietrzu? (b) W jakiej odległości poziomej uderzy w ziemię? (c) Jaka jest wartość pionowej składowej jego prędkości w momencie, gdy uderzy w ziemię?

9. Piłka została rzucona w powietrze. Na wysokości 9,1 m jej obserwowana prędkość wynosi $\mathbf{v} = (7,6\mathbf{i} + 6,1\mathbf{j})$ w m/s (pozioma oś x , pionowa oś y). (a) Do jakiej maksymalnej wysokości wzniesie się piłka? (b) Jaką odległość poziomą przebędzie piłka? (c) Jaka jest prędkość piłki (wartość i kierunek) tuż przed uderzeniem o ziemię?

Odp.: (a) 11 m; (b) 23 m; (c) 17 m/s, 63° poniżej kierunku poziomego.

10. Elektrony, jądra, atomy i cząsteczki chemiczne, podobnie jak wszystkie ciała materialne, spadają pod wpływem przyciągania grawitacyjnego. Przypuśćmy, że oddzielne wiązki elektronów, jąder atomów i cząsteczek chemicznych biegną w próżni z prędkościami początkowymi skierowanymi poziomo, przebywając (mierzoną w linii poziomej) odległości 1,0 m. Niech średnia prędkość wynosi dla elektronów $3,0 \cdot 10^7$ m/s, dla neutronów termicznych $2,2 \cdot 10^3$ m/s, dla atomów neonu $5,8 \cdot 10^2$ m/s, a dla cząsteczek tlenu $4,6 \cdot 10^2$ m/s. Obliczyć, o ile odchyliły się w próżni tory tych wiązek od linii poziomej wskutek przyciągania grawitacyjnego. Porównać otrzymane wyniki z odchyleniem wiązki piłeczek golfowych w podobnych warunkach (robiąc potrzebne założenia). Jaki czynnik należy uwzględnić przy takim porównaniu?

11. Lecący lotem nurkowym bombowiec zrzuca bombę na wysokości 730 m nad ziemią w momencie, gdy jego nachylenie względem pionu wynosi 53° . Bomba uderza w ziemię po 5 s od chwili uwolnienia. (a) Jaką prędkość miał bombowiec w chwili zrzucenia bomby? (b) Jaką odległość w kierunku poziomym przebędzie bomba w czasie spadania? (c) Jaka jest pionowa i pozioma składowa prędkości bomby w chwili, gdy uderza ona w ziemię?

Odp.: (a) 200 m/s; (b) 810 m; (c) $v_{\text{poz}} = 160$ m/s; $v_{\text{pion}} = 170$ m/s.

12. Podczas gry w amerykańską piłkę nożną, jeden z graczy kopnął piłkę z prędkością początkową 20 m/s, pod kątem 45° do poziomu. W tym momencie w kierunku piłki wybiegł inny gracz znajdujący się w odległości 54 m od kopiącego. Z jaką prędkością powinien on biec, jeśli chce złapać piłkę, zanim upadnie ona na ziemię? (Patrz: Seville Chapman, Catching a Baseball, *American Journal of Physics*, October 1968.)

13. Wiązka elektronów biegnących poziomo z prędkością $1,0 \cdot 10^9$ cm/s w lampie katodowej wpada w obszar pola elektrycznego zawartego pomiędzy dwiema poziomymi płytkami o długości 2,0 cm każda. Pole to nadaje elektronom skierowane w dół przyspieszenie o wartości $1,0 \cdot 10^{17}$ cm/s². Znaleźć (a) pionowe przemieszczenie wiązki po przejściu przez płytki oraz (b) prędkość wiązki (wartość i kierunek) w chwili, gdy wychodzi ona z przestrzeni zawartej pomiędzy płytkami.

Odp.: (a) 2 mm, (b) $v_x = 1 \cdot 10^9$ cm/s, $v_y = 0,2 \cdot 10^9$ cm/s w dół.

14. Piłka została rzucona ukośnie pod kątem 45° do poziomu, z wysokości 1,2 m nad ziemią, z prędkością początkową 33 m/s. W odległości 90 m od rzucającego, w kierunku, w którym leci piłka, znajduje się płotek o wysokości 7,2 m. Czy piłka może przelecieć ponad płotkiem, jeśli zasięg piłki wynosi 99 m?

15. W traktacie Galileusza *O dwóch systemach świata...*, autor stwierdza, że dla kątów nachylenia działa (kątów wyrzutu), większych lub mniejszych od 45° o tę samą wielkość, zasięgi są równe. Udowodnić to stwierdzenie. (Patrz: rys. 4-14.)

16. Piłka stacza się ze szczytu schodów z prędkością początkową (skierowaną poziomo) równą 1,5 m/s. Stopnie mają wysokość 20 cm i szerokość 20 cm. W który stopień najpierw uderzy piłka?

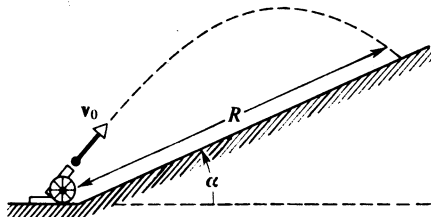
17. (a) Pokazać, że jeżeli przyspieszenie grawitacyjne zmienia się o dg , zasięg pocisku (patrz zadanie 7) o danej prędkości początkowej v_0 i kącie wyrzutu θ_0 zmienia się o $dx_{\max}/x_{\max} = -dg/g$. (b) Jeżeli przyspieszenie grawitacyjne zmienia się o małą wielkość Δg , na przykład ze zmianą szerokości geograficznej na Ziemi, zasięg dowolnego przedmiotu wyrzuconego ukośnie również się zmienia, powiedzmy o $\Delta x_{\max}$. Jeżeli Δg i $\Delta x_{\max}$ są dostatecznie małe, możemy napisać $\Delta x_{\max}/x_{\max} = -\Delta g/g$. W roku 1936 Jesse Owens (Stany Zjednoczone) na Igrzyskach Olimpijskich w Berlinie ($g = 9,8128 \text{ m/s}^2$) ustanowił światowy rekord długości w skoku w dal, wynikiem 8,09 m. O ile zmieniłby się ten wynik, gdyby skakał on w roku 1956 w Melbourne ($g = 9,7999 \text{ m/s}^2$)? (W związku z tym patrz: P. Kirkpatrick, Bad Physics in Athletic Measurements, *American Journal of Physics*, February 1944.)

Odp.: Jego skok byłby dłuższy o 1 cm.

18. Żonglerowi udaje się utrzymać pięć piłek w ciągłym ruchu, podrzucając jedną po drugiej do góry na wysokość 3 m. (a) Określić przedział czasu między kolejnymi podrzutami. (b) Ustalić położenie innych piłek w momencie, gdy jedna jest w ręku żonglera. (Pominąć czas potrzebny do przełożenia piłki z jednej ręki do drugiej.)

19. Działo zostało przygotowane do wystrzelenia pięciu pocisków, z prędkością początkową v_0 , na wprost zbocza wzgórza o kącie wzniesienia α , jak na rys. 4-15. Pod jakim kątem do poziomu powinno być wycelowane działo, aby pociski miały maksymalny zasięg R na zboczu?

Odp.: $\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\alpha$.



Rys. 4-15. Zadanie 19

20. Gracz podczas meczu piłki nożnej nadał piłce prędkość początkową 25 m/s. W jakim zakresie kątów musi kopnąć piłkę, jeżeli ma trafić do bramki, której pozioma poprzeczka jest na wysokości 3,44 m nad ziemią, z punktu znajdującego się 50 m naprzeciwko bramki.

21. Za pomocą radaru „obserwujemy” z ziemi zbliżający się pocisk. W pewnej chwili zanotowaliśmy następujące dane: pocisk osiągnął maksymalną wysokość i porusza się poziomo z prędkością v ; odległość pocisku mierzona w linii prostej wynosi l ; linia łącząca punkt obserwacji z pociskiem tworzy z poziomem kąt θ . Zakładamy, że Ziemia jest płaska i obserwator znajduje się w płaszczyźnie toru pocisku. (a) Znaleźć odległość D między obserwatorem a punktem, w którym upadnie pocisk. Wyrazić D za pomocą v , l , θ i znanej wartości przyspieszenia g . (b) Czy pocisk upadnie przed, czy za obserwatorem?

Odp.: (a) $D = v\sqrt{(2l/g)\sin\theta} - l\cos\theta$. (b) Pocisk upadnie za obserwatorem, jeżeli D jest dodatnie, i upadnie przed nim, jeżeli D jest ujemne.

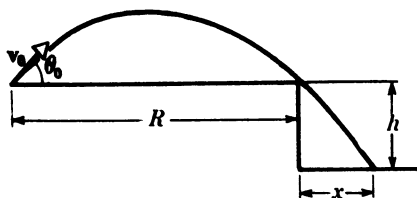
22. Pociski wyrzucone z punktu oddalonego o R (patrz rys. 4-16) od krawędzi stromej ściany o wysokości h spadają w odległości x od podstawy tej ściany. Jak należy dobrać θ_0 i v_0 , aby odległość x była możliwie najmniejsza? Zakładamy, że v_0 może zmieniać się od zera do pewnej skończonej maksymalnej wartości, a θ_0 może się zmieniać dowolnie. Zakładamy ponadto, że pociski nie odbijają się od ziemi.

Paragraf 4-4

23. Przypuszcza się, że pewne gwiazdy neutronowe (niezwykle gęste gwiazdy) obracają się z prędkością 1 obr/s. Jeżeli taka gwiazda ma promień 20 km, jakie jest przyspieszenie obiektu znajdującego się na równiku gwiazdy?

Odp.: $8 \cdot 10^5 \text{ m/s}^2$.

24. Pole magnetyczne odchyła naładowaną cząstkę w kierunku prostopadłym do kierunku jej ruchu. Elektron w takim polu uzyskuje przyspieszenie dośrodkowe $3,0 \cdot 10^{14} \text{ m/s}^2$. Jaka jest prędkość elektronu, jeżeli promień krzywizny krzywej, po której on się porusza, wynosi 0,15 m?



Rys. 4-16. Zadanie 22

25. W modelu Bohra atomu wodoru elektron krąży wokół protonu po kołowej orbicie o promieniu $5,28 \cdot 10^{-11} \text{ m}$, z prędkością $2,18 \cdot 10^6 \text{ m/s}$. Jakie jest przyspieszenie tego elektronu?

Odp.: $9 \cdot 10^{22} \text{ m/s}^2$.

26. Punkt materialny spoczywa na wierzchołku półkuli o promieniu R . Jaką najmniejszą poziomą prędkość należy nadać temu punktowi, aby spadł on z półkuli, nie ześlizgując się po niej w żadnym miejscu?

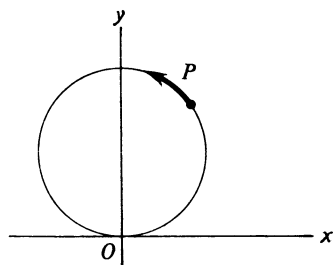
27. Jakie jest przyspieszenie obiektu (a) na równiku (b) na równoleżniku 60° dzięki obrotowi Ziemi? (c) O ile musiałaby się zwiększyć prędkość obrotu Ziemi dla ciała na równiku, aby przyspieszenie ziemskie g nie było w stanie utrzymać tego ciała na Ziemi?

Odp.: (a) $3,4 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2$; (b) $1,7 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2$; (c) 17.

28. Chłopiec wiruje w koło kamieniem na sznurku o długości 1,2 m w płaszczyźnie poziomej, w odległości 1,8 m od podłoża. Sznurek pęka i kamień zostaje wyrzucony poziomo i uderza w ziemię w odległości 9,1 m. Jakie było przyspieszenie dośrodkowe podczas ruchu obrotowego?

29. Punkt materialny P , poruszający się ze stałą prędkością w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, po okręgu o promieniu 3 m, wykonuje jeden obrót w ciągu 20 s (rys. 4-17). Punkt materialny przechodzi przez punkt O w czasie $t = 0$. Wychodząc z punktu O znaleźć (a) wartość i kierunek wektorów położenia po upływie 5 s, 7,5 s i 10 s; (b) wartość i kierunek przemieszczenia w ciągu 5,0-sekundowego przedziału czasu między piątą i dziesiątą sekundą; (c) wektor prędkości średniej w tym przedziale; (d) wektory prędkości chwilowej na początku i na końcu tego przedziału; (e) wektor średniego przyspieszenia w tym przedziale i (f) wektory przyspieszenia chwilowego na początku i na końcu tego przedziału. (Mierzyć w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara od osi x na rys. 4-17.)

Odp.: (a) 4,2 m, 45° ; 5,5 m, 68° ; 6 m, 90° ; (b) 4,2 m, 135° ; (c) 0,85 m/s, 135° ; (d) 0,94 m/s, 90° ; 0,94 m/s, 180° ; (e) 0,27 m/s², 225° ; (f) 0,30 m/s², 180° ; 0,30 m/s², 270° .



Rys. 4-17. Zadanie 29

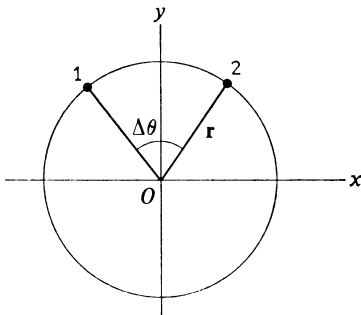
30. (a) Przedstawić promień wodzący r punktu materialnego, poruszającego się ruchem jednostajnym po okręgu, w prostokątnym, kartezjańskim układzie współrzędnych, korzystając z wektorów jednostkowych i oraz j . (b) Mając tak przedstawione r znaleźć odpowiednie wyrażenie wektorowe na prędkość v i przyspieszenie a punktu materialnego. (c) Udowodnić, że przyspieszenie jest skierowane do środka koła.

31. (a) Wyrazić wektory jednostkowe $\mathbf{u}_r$ i $\mathbf{u}_\theta$ za pomocą wektorów jednostkowych $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ i kąta θ z rys. 4-8. (b) Napisać, posługując się wektorami jednostkowymi $\mathbf{u}_\theta$ i $\mathbf{u}_r$, odpowiednie wyrażenie na promień wodzący r dla punktu materialnego poruszającego się ruchem jednostajnym po okręgu i korzystając z tego wyrażenia wyprowadzić równanie (4-11) $\mathbf{v} = \mathbf{u}_\theta v$.

32. Punkt materialny w jednostajnym ruchu po okręgu dookoła środka O ma prędkość v . (a) Wykazać, że czas Δt , w jakim dokonano on przemieszczenia o kąt $\Delta\theta$ jest dany następującym wzorem:

$$\Delta t = \frac{2\pi r}{v} \Delta\theta / 360^\circ,$$

gdzie $\Delta\theta$ podany jest w stopniach, a r jest promieniem okręgu. (b) Na rys. 4-18 zmierzyć składowe x i y prędkości w punktach 1 i 2 i wykazać, że $\bar{a}_x = 0$ i $\bar{a}_y = -0,9 v^2/r$, dla pary punktów symetrycznych względem osi y , tworzących kąt $\Delta\theta = 90^\circ$. (c) Wykazać, że jeżeli $\Delta\theta = 30^\circ$, to $\bar{a}_x = 0$ i $\bar{a}_y = 0,99 v^2/r$. (d) Pokazać, że dla $\Delta\theta \rightarrow 0$, $\bar{a}_y \rightarrow -v^2/r$ i że z symetrii okręgu wynika taka sama odpowiedź na to pytanie dla każdego punktu na okręgu.



Rys. 4-18. Zadanie 32

Paragraf 4-5

33. Punkt materialny porusza się na płaszczyźnie, przy czym położenie jego opisane jest równaniami

$$\begin{aligned} x &= R \sin \omega t + \omega R t, \\ y &= R \cos \omega t + R, \end{aligned}$$

gdzie ω i R są wielkościami stałymi. Przykładem takiego ruchu jest ruch punktu znajdującego się na brzegu koła, które toczy się bez poślizgu wzdłuż osi x . Krzywa opisana powyższymi równaniami nazywa się *cykloidą*. (a) Narysować tor punktu. (b) Obliczyć chwilową prędkość i chwilowe przyspieszenie punktu dla minimalnej i maksymalnej wartości y .

Odp.: (b) Dla minimalnej wartości y : $v_x = v_y = a_x = 0$; $a_y = +\omega^2 R$. Dla maksymalnej wartości y : $v_x = 2\omega R$; $v_y = a_x = 0$; $a_y = -\omega^2 R$.

Paragraf 4-6

34. Śnieg pada pionowo ze stałą prędkością 8 m/s. (a) Pod jakim kątem do pionu i (b) z jaką prędkością zdają się spadać płatki śniegu widziane przez kierowcę samochodu jadącego po prostej drodze z prędkością 50 km/h?

35. Pociąg jedzie w czasie deszczu z prędkością 24,5 m/s prosto na południe. Krople deszczu są spychane przez wiatr również w kierunku południowym, przy czym tor tych kropli mierzony przez obserwatora stojącego na ziemi tworzy z pionem kąt $21,6^\circ$. Obserwator siedzący w pociągu stwierdza natomiast, że ślady pozostawione przez krople na bocznych szybach wagonu są pionowe. Jaka jest prędkość kropeł względem ziemi?

Odp.: 66,6 m/s.

36. Helikopter leci po linii prostej nad płaskim obszarem ze stałą prędkością 4,9 m/s i na stałej wysokości 4,9 m. Paczka została rzucona poziomo z prędkością początkową 12 m/s względem helikoptera, w kierunku przeciwnym do kierunku jego lotu. (a) Znaleźć prędkość początkową paczki względem ziemi. (b) Jaka jest pozioma odległość między helikopterem i paczką w chwili, gdy paczka uderzyła w ziemię? (c) Jaki kąt tworzy wektor prędkości paczki z podłożem tuż przed uderzeniem paczki w ziemię?

37. Dwa ciała poruszają się ruchem jednostajnym wzdłuż tej samej linii prostej. Gdy zbliżają się do siebie, odległość między nimi maleje o 4,0 m w ciągu każdej sekundy. Gdy poruszają się w tym samym

kierunku, z takimi samymi prędkościami jak poprzednio. Odległość między nimi maleje o 4,0 m w ciągu każdych 10 s. Znaleźć prędkości tych ciał.

Odp.: 2,2 m/s; 1,8 m/s.

38. Wiosłując na stojącej wodzie chłopiec może płynąć z prędkością 6,4 km/h. (a) W jakim kierunku powinien zwrócić łódkę, jeżeli chce on przepłynąć rzekę w poprzek prądu płynącego z prędkością 3,2 km/h usiłując dostać się do punktu leżącego na przeciwnym brzegu, dokładnie na wprost jego początkowego położenia? (b) Po jakim czasie znajdzie się on na drugim brzegu, jeżeli szerokość rzeki wynosi 6,4 km? (c) Ile czasu zajęłoby mu przepłynięcie 3,2 km w dół rzeki i powrót do punktu wyjściowego? (d) Ile czasu zajęłoby mu przepłynięcie 3,2 km w górę rzeki i powrót do punktu wyjściowego? (e) W jakim kierunku powinien chłopiec zwrócić łódkę, jeżeli chciałby przepłynąć rzekę w możliwie najkrótszym czasie?

39. Samolot rozwijający w nieruchomym powietrzu prędkość 216 km/h leci na północ, przy czym przez cały czas lotu znajduje się dokładnie nad szosą prowadzącą w tym samym kierunku. Pilot otrzymał z ziemi drogą radiową informację, że wieje wiatr o prędkości 112 km/h, ale radiotelegrafista zapomniał podać mu kierunek wiatru. Pilot zauważył, że w ciągu godziny samolot przebywa ponad szosą odległość równą dokładnie 216 km, pomimo wiatru. (a) Jaki jest kierunek wiatru? (b) W jakim kierunku jest zwrócony samolot, tzn. jaki kąt tworzy oś samolotu z szosą?

Odp.: (a) Pod kątem 75° do kierunku południowego w kierunku wschodnim. (b) Pod kątem 30° do kierunku północnego w kierunku wschodnim. Drugie rozwiązanie otrzymujemy zastępując kierunek wschodni zachodnim.

40. Pilot ma lecieć na wschód, z punktu A do B , a następnie z powrotem na zachód. Prędkość samolotu względem powietrza jest stała i równa v' , a prędkość powietrza względem ziemi u . Odległość między punktami A i B wynosi l . (a) Pokazać, że jeżeli $u = 0$ (powietrze nieruchome), czas potrzebny na przebycie całej drogi jest określony wzorem $t_0 = 2l/v'$. (b) Przypuśćmy, że wiatr wieje na wschód (lub na zachód). Pokazać, że czas potrzebny na przebycie drogi wynosi

$$t_w = \frac{t_0}{1 - u^2/v'^2}.$$

(c) Przypuśćmy, że wiatr wieje na północ (lub południe). Pokazać, że w tym wypadku czas potrzebny na przebycie całej drogi wynosi

$$t_p = \frac{t_0}{\sqrt{1 - u^2/v'^2}}.$$

(d) W punktach (b) i (c) należy założyć, że $u < v'$. Dlaczego?

41. Chłopiec wchodzi na szczyt stojących w miejscu ruchomych schodów w ciągu 90 s. Stojąc na poruszających się schodach zostaje on wwieziony na górę w ciągu 60 s. Jak długo wchodziłby ten chłopiec po schodach jadących w górę?

Odp.: 36 s.

42. Chłopiec chce dostać się w możliwie najkrótszym czasie do punktu położonego na przeciwnym brzegu rzeki, mającej szerokość 500 m, dokładnie na wprost miejsca, w którym się aktualnie znajduje. Rzeka płynie z prędkością 2000 m/h. Chłopiec może iść po brzegu z prędkością 5000 m/h oraz płynąć łodzią z prędkością (względem wody) równą 3000 m/h. (a) Jaką drogę powinien on wybrać, łącząc płynięcie łodzią i marsz wzdłuż brzegu? (b) Jak długo trwałaby ta droga?