

3. Ruch jednowymiarowy

3-1. *Mechanika*

Mechanika — najstarsza z nauk fizycznych — zajmuje się badaniem ruchów ciał. Wśród wielu problemów mechaniki spotykamy takie, jak obliczanie toru piłki do gry w baseball, czy sondy kosmicznej wysyłanej z Ziemi na Marsa. Należy do niej również analiza śladów pozostawionych w komorze pęcherzykowej i śladów po zderzeniu, rozpadu i oddziaływania cząstek elementarnych (patrz rys. 10-11 oraz dodatek F).

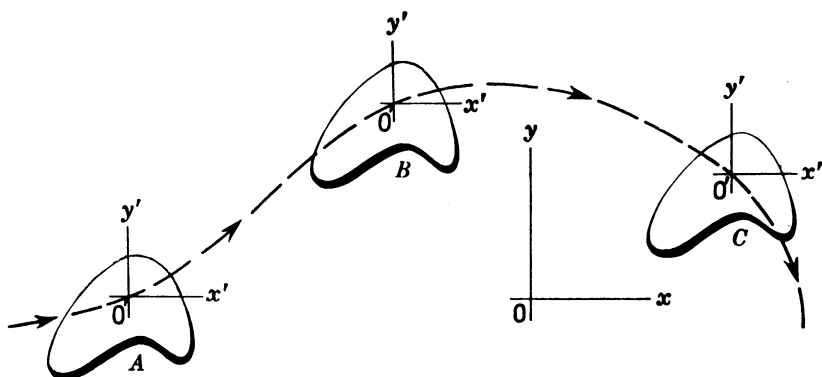
Opisem samego ruchu ciał zajmuje się część mechaniki nazywana *kinematyką*. Jeżeli ruch wiążemy z siłami działającymi na ciała i z właściwościami tych ciał, to mamy do czynienia z *dynamiką*. W tym rozdziale zdefiniujemy pewne wielkości kinematyczne i przeanalizujemy je szczegółowo dla specjalnego przypadku ruchu; mianowicie ruchu jednowymiarowego. W rozdziale 4 omówimy pewne przykłady ruchu dwu- i trójwymiarowego. Rozdział 5 poświęcony jest zagadnieniom dynamiki.

3-2. *Kinematyka punktu materialnego*

Rzeczywiste ciała będące w ruchu mogą się obracać. Na przykład piłka lecąca wzdłuż jakiegoś toru może jednocześnie wirować wokół swojej osi. Poruszające się ciała mogą także wykonywać drgania, jak np. spadająca kropla wody. Tych komplikacji możemy uniknąć rozważając nieskończenie małe ciała, które można traktować jak punkty materialne. *Punktem materialnym* nazywamy ciało obdarzone masą, lecz nie mające objętości, a więc takie, które nie może obracać się, ani wykonywać drgań własnych.

W przyrodzie nie ma ciał, które nie miałyby skończonej objętości. Mimo to pojęcie punktu materialnego jest pojęciem bardzo użytecznym, ponieważ rzeczywiste ciała często, z dobrym przybliżeniem, zachowują się tak, jak gdyby były punktami materialnymi. Aby ciało można było traktować jak punkt materialny, nie musi ono być „małe” w zwykłym znaczeniu tego słowa. Jeżeli na przykład rozważamy odległość Ziemi od Słońca, to w stosunku do tej odległości zarówno Ziemia, jak i Słońce mogą być uważane za punkty. Możemy, nie popełniając dużych błędów, traktując Słońce i planety jako punkty materialne, bardzo wiele dowiedzieć się o ruchu tych ciał. Jako punkty materialne mogą być często traktowane piłki do gry, cząsteczki chemiczne, protony i elektrony. A jeśli nawet ciało jest

zbyt duże na to, aby je w jakimś szczególnym zagadnieniu traktować jak punkt materialny, zawsze możemy wyobrazić sobie, że jest ono utworzone z dużej ilości takich punktów i rozważanie ruchów tych punktów może być bardzo pomocne przy analizie tego zagadnienia. Dla uproszczenia ograniczymy więc nasze rozważania do ruchu punktów materialnych.



Rys. 3-1. Ruch postępowy przedmiotu. Ruch postępowy może odbywać się w przestrzeni trójwymiarowej, na rysunku jednakże dla uproszczenia pokazaliśmy jedynie przypadek dwuwymiarowy

Wszystkie ciała poruszające się jedynie ruchem postępowym zachowują się jak punkty materialne. Obserwator znajdujący się w jakimś układzie odniesienia, powiedzmy xyz , nazwie ruch ciała *postępowym* (*translacyjnym*), jeżeli osie pewnego układu odniesienia, sztywno związanego z tym ciałem, powiedzmy układu $x'y'z'$, podczas ruchu pozostają w każdej chwili równoległe do osi jego własnego układu odniesienia. Na rys. 3-1, na przykład, przedstawiliśmy ruch postępowy ciała poruszającego się od położenia A do B i C . Zauważmy, że droga przebyta przez ciało nie musi być linią prostą. Zauważmy również, że w czasie ruchu wszystkie punkty ciała doznają takiego samego przemieszczenia. Możemy więc przyjąć, że ciało to jest punktem, ponieważ opisując ruch jednego z jego punktów opisujemy jednocześnie ruch wszystkich innych punktów, a więc i samego ciała jako całości.

3-3. Prędkość średnia

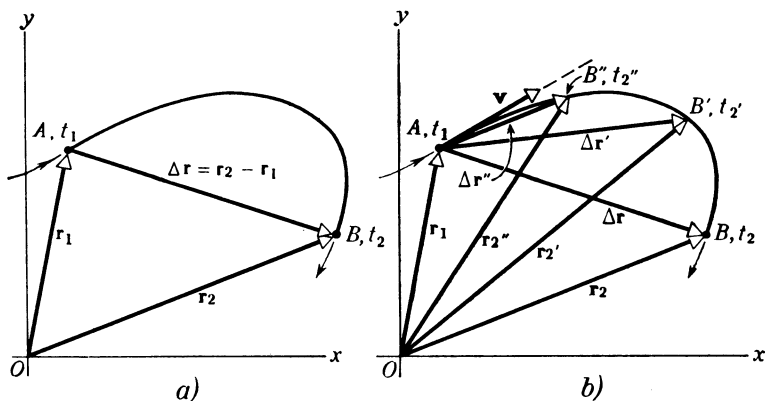
Przemieszczenie, prędkość i przyspieszenie punktu są wielkościami wektorowymi. Ponieważ w tym rozdziale rozpatrujemy tylko ruch jednowymiarowy, nie musimy korzystać tu z wszystkich możliwości metody wektorowej. Jednakże wygodnie będzie zacząć od rozważania ruchu dwuwymiarowego (przejście do trzech wymiarów nie jest trudne), a następnie przejdziemy do rozważania ruchu jednowymiarowego jako szczególnego przypadku. Przyjęty sposób podejścia pozwoli nam pamiętać o wektorowym charakterze wszelkich ruchów.

Prędkość punktu materialnego jest wielkością, która określa, jak szybko zmienia się położenie tego punktu w czasie. Położenie punktu w jakimś szczególnym układzie odniesienia określone jest za pomocą *wektora położenia* (*promienia wodzącego*) poprowadzonego z początku układu do tego punktu. Niech punkt materialny w chwili t_1 zajmuje położenie A na rys. (3.2a), przy czym jego położenie na płaszczyźnie xy dane jest wektorem $\mathbf{r}_1$.

W chwili późniejszej t_2 punkt zajmuje położenie B dane wektorem $\mathbf{r}_2$. Wektor *przemieszczenia* opisujący zmianę *położenia* punktu materialnego podczas ruchu od punktu A do punktu B jest równy $\Delta \mathbf{r} (= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$, a czas, jaki upłynął podczas tego ruchu, wynosi $\Delta t (= t_2 - t_1)$. Średnia prędkość punktu w tym przedziale czasu jest zdefiniowana jako

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\text{przemieszczenie (wektor)}}{\text{przedział czasu (skalar)}}. \quad (3-1)$$

Pozioma kreska umieszczona nad symbolem oznacza wartość średnią.



Rys. 3-2. (a) Punkt materialny poruszający się od A do B w czasie $\Delta t (= t_2 - t_1)$ doznaje przemieszczenia $\Delta \mathbf{r} (= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$. Prędkość średnia $\bar{\mathbf{v}}$ na drodze od A do B ma kierunek taki jak $\Delta \mathbf{r}$. (b) Jeśli zbliżamy punkt B do punktu A , prędkość średnia dąży do prędkości chwilowej $\mathbf{v}$ w punkcie A ; $\mathbf{v}$ jest styczny do toru w punkcie A .

Prędkość $\bar{\mathbf{v}}$ jest wektorem, ponieważ została ona otrzymana z podzielenia wektora $\Delta \mathbf{r}$ przez skalar Δt . Prędkość ma zatem określoną zarówno wartość liczbową, jak i kierunek. Jej kierunek jest zgodny z kierunkiem $\Delta \mathbf{r}$, a wielkość $|\Delta \mathbf{r} / \Delta t|$. Wartość prędkości wyrażona jest w jednostkach długości podzielonych przez jednostki czasu, np. m/s lub km/h.

Prędkość określona równaniem (3-1) została nazwana *prędkością średnią*, ponieważ pomiar wypadkowego przemieszczenia między położeniami A i B w pewnym przedziale czasu nie mówił nam nic o samym ruchu między tymi położeniami. Tor punktu materialnego może być zarówno linią prostą, jak i krzywą; ruch może być jednostajny lub zmienny. Prędkość średnia zależy jedynie od całkowitego przemieszczenia i całkowitego przedziału czasu, w którym nastąpiło to przemieszczenie. Przypuśćmy na przykład, że jakiś człowiek wychodzi z domu, jedzie autobusem i wraca po upływie Δt od chwili opuszczenia domu. Jego średnia prędkość podczas całej tej drogi jest równa zero, ponieważ jego przemieszczenie w przedziale czasu Δt jest równe zero.

Gdybyśmy mierzyli czas przybycia punktu materialnego do różnych punktów na drodze między położeniami A i B na rys. 3-2a, moglibyśmy opisać ruch bardziej szczegółowo. Jeżeli średnia prędkość punktu między dowolnymi dwoma punktami drogi jest wszędzie taka sama co do wartości i kierunku, możemy wyciągnąć wniosek, że punkt porusza się ze *stałą prędkością*, tzn. wzdłuż linii prostej (stały kierunek) oraz jednostajnie (stała wartość).

3-4. Prędkość chwilowa

Przypuśćmy, że punkt materialny porusza się w taki sposób, że jego prędkość średnia mierzona w różnych przedziałach czasu nie jest jednakowa. Mówimy wówczas, że punkt porusza się ze zmienną prędkością. W takich przypadkach konieczne jest określenie prędkości punktu w dowolnej chwili czasu, czyli *prędkości chwilowej*.

Prędkość może się zmienić na skutek zmian jej wartości, zmian kierunku lub jednego i drugiego. Dla ruchu przedstawionego na rys. 3-2a średnia prędkość w przedziale czasu $t_2 - t_1$ może różnić się zarówno wartością, jak i kierunkiem od średniej prędkości w innym przedziale czasu $t'_2 - t_1$. Zilustrowaliśmy to na rys. 3-2b, przesuując punkt B kolejno coraz to bliżej do punktu A . Punkty B' i B'' przedstawiają dwa pośrednie położenia punktu materialnego, odpowiadające chwilom czasu t'_2 i t''_2 i określone odpowiednio wektorami położenia równymi $\mathbf{r}'_2$ i $\mathbf{r}''_2$. Wektorowe przemieszczenia $\Delta\mathbf{r}$, $\Delta\mathbf{r}'$ i $\Delta\mathbf{r}''$ różnią się od siebie kierunkami i kolejno stają się coraz to mniejsze. Podobnie, kolejno maleją odpowiednie przedziały czasu $\Delta t (= t_2 - t_1)$, $\Delta t' (= t'_2 - t_1)$ oraz $\Delta t'' (= t''_2 - t_1)$.

Postępując dalej w ten sposób, tzn. zbliżając punkt B do punktu A stwierdzimy, że stosunek przemieszczeń do odpowiednich przedziałów czasu zbliża się do określonej wartości granicznej. Chociaż przemieszczenia stają się krańcowo małe, odpowiadające im przedziały czasu również stają się małe, tak że stosunek tych dwu wielkości może mieć wartość skończoną. Podobnie, wraz ze zmniejszeniem się wartości liczbowej wektora przemieszczenia, jego kierunek zbliża się coraz bardziej do pewnego kierunku granicznego, mianowicie kierunku stycznego do toru cząstki w punkcie A . Otrzymana w ten sposób graniczna wartość $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ nazywana jest *prędkością chwilową* punktu materialnego w punkcie A lub prędkością punktu materialnego w chwili t_1 .

Jeżeli $\Delta\mathbf{r}$ określa przemieszczenie punktu materialnego w małym przedziale czasu Δt między t i $t + \Delta t$, prędkość tego punktu w chwili t jest granicą stosunku $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$, gdy zarówno $\Delta\mathbf{r}$, jak i Δt dążą do zera. Jeżeli więc prędkość chwilową oznaczmy przez $\mathbf{v}$, to

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}.$$

Kierunek $\mathbf{v}$ jest granicznym kierunkiem, jaki przyjmuje $\Delta\mathbf{r}$, gdy B zbliża się do A lub gdy Δt dąży do zera. Jak widzieliśmy, kierunek ten jest styczny do toru punktu materialnego w punkcie A .

W matematyce granicę stosunku $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ przy Δt dążącym do zera oznaczamy symbolem $d\mathbf{r}/dt$ i nazywamy *pochodną wektora $\mathbf{r}$ względem czasu t* . Mamy więc

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (3-2)$$

Wartość prędkości chwilowej jest równa po prostu wartości bezwzględnej wektora $\mathbf{v}$. Znaczy to, że

$$v = |\mathbf{v}| = |d\mathbf{r}/dt|. \quad (3-3)$$

Wartość prędkości jest zawsze liczbą dodatnią.

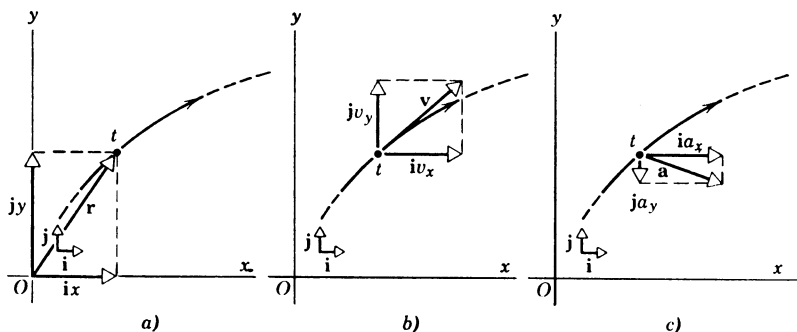
Podobnie jak punkt materialny jest pojęciem fizycznym związanym z matematycznym pojęciem punktu, tak prędkość jest pojęciem fizycznym związanym z matematyczną

operacją różniczkowania. W istocie rachunek różniczkowy został wynaleziony, aby być wygodnym narzędziem matematycznym przy rozważaniu podstawowych zagadnień mechaniki.

W następnym paragrafie zbadamy dokładniej pojęcie prędkości chwilowej dla specjalnego przypadku ruchu, ruchu jednowymiarowego (prostoliniowego).

3-5. Ruch jednowymiarowy. Prędkość zmienna

W rozdziale tym ponownie zajmiemy się ruchem jednowymiarowym, najpierw rozważając ruch dwuwymiarowy, a następnie rozpatrując szczególny przypadek, w którym występuje tylko jeden wymiar.



Rys. 3-3. Punkt materialny ma w chwili t (a) położenie opisane przez wektor $\mathbf{r}$, (b) prędkość chwilową $\mathbf{v}$ i (c) przyspieszenie chwilowe $\mathbf{a}$. Na rysunku pokazano również wektorowe składowe i_x i j_y z równania (3-4), $i v_x$ i $j v_y$ z równania (3-5) oraz $i a_x$ i $j a_y$ z równania (3-10) w układzie określonym przez wektory jednostkowe $\mathbf{i}$ i $\mathbf{j}$

Na rysunku 3-3 pokazano punkt materialny zakreślający pewien tor w płaszczyźnie xy . W chwili t położenie tego punktu względem początku układu dane jest wektorem $\mathbf{r}$ (patrz rys. 3-3a) i ma on prędkość $\mathbf{v}$ (patrz rys. 3-3b) styczną do toru. Możemy napisać [patrz równanie (2-8)]

$$\mathbf{r} = i x + j y, \quad (3-4)$$

gdzie $\mathbf{i}$ i $\mathbf{j}$ są wektorami jednostkowymi o kierunku odpowiednio osi x i osi y , a x i y (skalarne) składowymi wektora $\mathbf{r}$. Ponieważ $\mathbf{i}$ i $\mathbf{j}$ są wektorami stałymi, łącząc równania (3-2) i (3-4) otrzymujemy

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} \frac{dx}{dt} + \mathbf{j} \frac{dy}{dt},$$

co możemy zapisać jako

$$\mathbf{v} = i v_x + j v_y \quad (\text{ruch dwuwymiarowy}), \quad (3-5)$$

gdzie $v_x (= dx/dt)$ i $v_y (= dy/dt)$ są (skalarne) składowymi wektora $\mathbf{v}$.

Rozważmy obecnie jedynie ruch jednowymiarowy o kierunku osi x (dla wygody). W tym przypadku $v_y = 0$ i równanie (3-5) redukuje się do postaci

$$\mathbf{v} = i v_x \quad (\text{ruch jednowymiarowy}). \quad (3-6)$$

Ponieważ i wskazuje kierunek dodatni osi x , v_x będzie dodatnie (i równe $+v$), gdy wektor $\mathbf{v}$ będzie tak samo skierowany, a ujemne (i równe $-v$) — gdy $\mathbf{v}$ będzie skierowane przeciwnie. Ponieważ w ruchu jednowymiarowym możliwe są jedynie dwa różne kierunki $\mathbf{v}$, nie musimy przy omawianiu tego ruchu korzystać z notacji wektorowej; możemy rozważać po prostu składową prędkości v_x (skalar).

Przykład 1. Znajdowanie granicy. Jako ilustrację znajdowania granicy w przypadku jednowymiarowym rozważmy następującą tabelę danych dla ruchu wzdłuż osi x . Pierwsze cztery kolumny podają dane doświadczalne. Symbole odnoszą się do rys. 3-4, przedstawiającego punkt materialny poruszający się z lewa na prawo, tzn. w kierunku dodatnim osi x . W chwili t_1 (1,00 s) punkt znajdował się w położeniu x_1 (100 cm od początku układu). W chwili t_2 znajdował się w położeniu x_2 . Rozważając różne wartości x_2 i różne odpowiadające im wartości t_2 otrzymujemy

x_1 , cm	t_1 , s	x_2 , cm	t_2 , s	$x_2 - x_1 =$ $= \Delta x$, cm	$t_2 - t_1 =$ $= \Delta t$, s	$\Delta x / \Delta t$, cm/s
100,0	1,00	200,0	11,00	100,0	10,00	+10,0
100,0	1,00	180,0	9,60	80,0	8,60	+9,3
100,0	1,00	160,0	7,90	60,0	6,90	+8,7
100,0	1,00	140,0	5,90	40,0	4,90	+8,2
100,0	1,00	120,0	3,56	20,0	2,56	+7,8
100,0	1,00	110,0	2,33	10,0	1,33	+7,5
100,0	1,00	105,0	1,69	5,0	0,69	+7,3
100,0	1,00	103,0	1,42	3,0	0,42	+7,1
100,0	1,00	101,0	1,14	1,0	0,14	+7,1

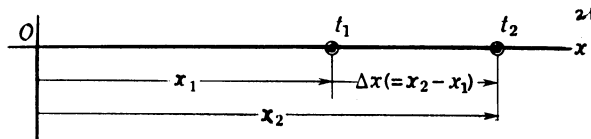
Równanie (3-2) słuszne również dla ruchu trójwymiarowego, ma postać

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Dla ruchu jednowymiarowego wzdłuż osi x mamy podobną, skalarną zależność, w której każda wielkość wektorowa została zastąpiona odpowiadającą jej składową, mianowicie

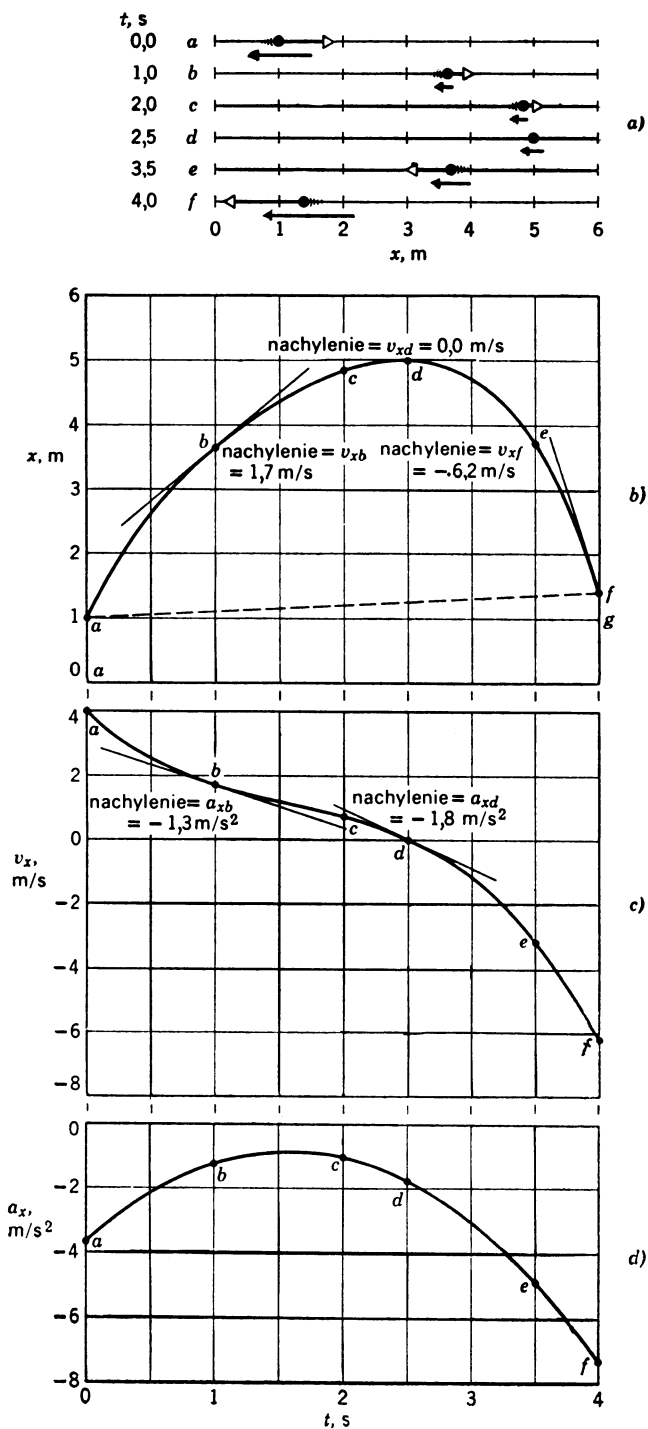
$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \quad (3-7)$$

Z podanej tabeli widać, że w miarę jak kolejne wartości x_2 zbliżają się do wartości x_1 , Δt staje się coraz bliższe zeru, a stosunek $\Delta x / \Delta t$ dąży do granicznej wartości +7,1 cm/s. W chwili t_1 prędkość $v_x = +7,1$ cm/s, z taką dokładnością, z jaką jesteśmy w stanie to ustalić na podstawie zebranych danych. Ponieważ v_x jest dodatnie, prędkość $\mathbf{v}$ [= iv_x ; patrz równanie (3-6)] na rys. 3-4 jest skierowane w prawo. A więc, jak być powinno, ma ona kierunek styczny do toru i zgodny z kierunkiem ruchu.



Rys. 3-4. Punkt materialny poruszający się w prawo wzdłuż osi x

Przykład 2. Na rysunku 3-5a pokazano sześć kolejnych „zjęć migawkowych” punktu materialnego poruszającego się ze zmienną prędkością wzdłuż osi x . W chwili $t = 0$ punkt znajduje się w położeniu $x = +1,00$ m, na prawo od początku układu; w chwili $t = 2,5$ s spoczywa on w odległości $x = 5,00$ m; w chwili $t = 4,0$ s punkt wrócił do położenia $x = 1,40$ m. Na rysunku 3-5b przedstawiono wykres położenia punktu materialnego w zależności od czasu dla tego ruchu. Średnia prędkość punktu w całkowitym przedziale czasu równym 4,0 s jest równa wypadkowemu przemieszczeniu punktu (+0,40 m) podzielono-



Rys. 3-5. (a) Sześć kolejnych „zdjęć migawkowych” punktu materialnego poruszającego się wzdłuż osi x . Wektor związany z punktem materialnym oznacza jego chwilową prędkość; wektor umieszczony poniżej punktu materialnego określa chwilowe przyspieszenie punktu. (b) Wykres zależności x i t dla omawianego ruchu punktu materialnego. (c) Wykres zależności v_x od t . (d) Wykres zależności a_x od t

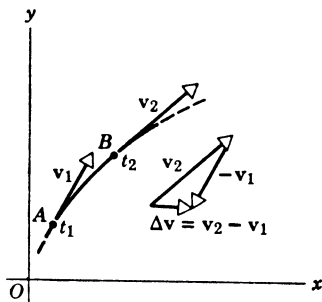
nemu przez wielkość tego przedziału (4,0 s), a więc $\bar{v}_x = +0,10$ m/s. (Składowe $\bar{v}_x$ i v_x nazywamy odpowiednio prędkością średnią i prędkością chwilową punktu w ruchu jednowymiarowym, mimo że prędkość jest wielkością wektorową, a nie skalarną. Takie nazwy przyjęły się i nie powinny powodować nieporozumień. Mogą one mieć zarówno dodatnią, jak i ujemną wartość liczbową.) Wektor prędkości średniej ma kierunek dodatni osi x (skierowany jest w prawo na rys. 3-5a), ponieważ wypadkowe przemieszczenie ma taki kierunek. Wartość liczbową $\bar{v}_x$ można otrzymać bezpośrednio z nachylenia linii przerywanej af na rys. 3-5b, przy czym przez nachylenie rozumiemy stosunek wypadkowego przemieszczenia gf do odpowiadającego mu przedziału czasu ga . (Nachylenie nie jest równe tangensowi kąta fag , którego wartość można zmierzyć za pomocą kątomierza. Wartość tego kąta jest umowna, ponieważ zależy ona od wyboru skali dla x i t .)

Prędkość v_x w pewnej chwili czasu znajdujemy z nachylenia krzywej przedstawionej na rys. 3-5b, obliczonego dla tej chwili. Równanie (3-7) jest bowiem matematyczną definicją nachylenia krzywej. W naszym przykładzie nachylenie krzywej w punkcie b , równe wartości v_x w tym punkcie, wynosi $+1,7$ m/s; nachylenie w punkcie d jest równe zero, a w punkcie f wynosi $-6,2$ m/s. Jeżeli określimy nachylenie krzywej, dx/dt , we wszystkich chwilach czasu t , będziemy mogli zrobić wykres zależności v_x od czasu t (rys. 3-5c). Zauważmy, że w przedziale $0 < t < 2,5$ s prędkość v_x jest dodatnia, tak że wektor prędkości $\mathbf{v}$ na rys. 3-5a skierowany jest w prawo; natomiast w przedziale $2,5 \text{ s} < t < 4,0$ s prędkość v_x jest ujemna, a więc wektor $\mathbf{v}$ na rys. 3-5a jest skierowany w lewo.

3-6. Przyspieszenie

W czasie ruchu prędkość poruszającego się ciała często zmienia się co do wartości bądź kierunku, lub i co do wartości i co do kierunku. Mówimy wówczas, że ciało porusza się z przyspieszeniem. *Przyspieszenie punktu materialnego informuje o szybkości zmian jego prędkości w czasie.* Przypuśćmy, że w chwili t_1 punkt materialny znajduje się w położeniu A (rys. 3-6) i porusza się na płaszczyźnie xy z prędkością chwilową $\mathbf{v}_1$, a później w chwili t_2 znajduje się w położeniu B i porusza się z prędkością chwilową $\mathbf{v}_2$. Średnie przyspieszenie $\bar{\mathbf{a}}$ w czasie ruchu punktu od A do B zdefiniowane jest jako stosunek zmiany prędkości do odpowiadającego jej przedziału czasu, czyli

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}. \quad (3-8)$$



Rys. 3-6. Punkt materialny mający w położeniu A prędkość $\mathbf{v}_1$ porusza się do położenia B , w którym jego prędkość wynosi $\mathbf{v}_2$. Z narysowanego trójkąta widać, jaka jest wektorowa zmiana prędkości $\Delta \mathbf{v} (= \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)$ punktu materialnego poruszającego się od A do B .

Przyspieszenie $\bar{\mathbf{a}}$ jest wektorem, ponieważ otrzymujemy je dzieląc wektor $\Delta \mathbf{v}$ przez skalar Δt . Przyspieszenie ma więc określoną wartość liczbową i kierunek. Jego kierunek jest taki, jak kierunek wektora $\Delta \mathbf{v}$, a wartość jest równa $|\Delta \mathbf{v}/\Delta t|$. Wartość przyspieszenia jest wyrażana w jednostkach prędkości dzielonych przez jednostki czasu, a więc np. m/s², cm/s².

Przyspieszenie $\bar{\mathbf{a}}$, określone równaniem (3-8), nazywamy *przyspieszeniem średnim*, ponieważ nie mówi ono nic o zmianach prędkości wewnątrz przedziału Δt . Gdyby

zmiana prędkości (wektorowa) podzielona przez odpowiadający jej przedział czasu, $\Delta v/\Delta t$, była stała niezależnie od długości tego przedziału, otrzymalibyśmy *stałe* przyspieszenie. Stałość przyspieszenia oznacza więc, że prędkość *zmienia się* jednostajnie w czasie zarówno co do wartości, jak i kierunku. Jeżeli *nie ma żadnej zmiany* prędkości, tzn. jeżeli zarówno wartość, jak i kierunek prędkości są stałe, to w dowolnym przedziale czasu Δv jest równe zero i przyspieszenie jest równe zero.

Jeżeli ruch punktu materialnego jest taki, że średnie przyspieszenie mierzone w wielu różnych przedziałach czasu nie jest jednakowe, mówimy, że punkt ten porusza się ze *zmiennym* przyspieszeniem. Przyspieszenie może zmienić się co do wartości, kierunku lub obu tych cech. W takich przypadkach musimy określić przyspieszenie punktu materialnego w dowolnej chwili czasu, czyli przyspieszenie chwilowe.

Przyspieszenie chwilowe zdefiniowane jest następująco:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (3-9)$$

Przyspieszenie punktu materialnego w chwili t jest więc równe *granicy stosunku* $\Delta \mathbf{v}/\Delta t$, gdy zarówno $\Delta \mathbf{v}$, jak i Δt dążą do zera. Kierunek przyspieszenia chwilowego $\mathbf{a}$ pokrywa się z granicznym kierunkiem wektorowej zmiany prędkości $\Delta \mathbf{v}$. Wartość przyspieszenia chwilowego wynosi po prostu $a = |\mathbf{a}| = |\Delta \mathbf{v}/\Delta t|$. Gdy przyspieszenie jest stałe, przyspieszenie chwilowe równa się przyspieszeniu średniemu. Zauważmy, że zależność między $\mathbf{a}$ i $\mathbf{v}$ określona równaniem (3-9) jest taka sama, jak zależność między $\mathbf{v}$ i $\mathbf{r}$ w równaniu (3-2).

Podamy obecnie dwa przykłady świadczące o tym, że przyspieszenie powstaje wskutek zmiany wartości albo kierunku prędkości. W pierwszym przykładzie rozważmy ruch wzdłuż linii prostej, z prędkością zmieniającą się jednostajnie (jak w paragrafie 3-8). Tutaj kierunek prędkości pozostaje stały, a zmienia się jedynie jej wartość (jednostajnie z czasem). Jest to przypadek ruchu ze stałym przyspieszeniem. W drugim przykładzie rozważmy ruch po okręgu ze stałą wartością liczbową prędkości (paragraf 4-4). Tutaj kierunek wektora prędkości ciągle się zmienia, lecz wartość jej pozostaje stała. Ten ruch jest również ruchem przyspieszonym, ale kierunek wektora przyspieszenia nie jest w tym przypadku ustalony. Później rozpatrzmy jeszcze inne ważne przykłady ruchu przyspieszonego.

3-7. Ruch jednowymiarowy. Przyspieszenie zmienne

Na podstawie równań (3-5) i (3-9), dla ruchu dwuwymiarowego, takiego jak pokazano na rys. 3-3, możemy napisać

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{i} \frac{dv_x}{dt} + \mathbf{j} \frac{dv_y}{dt},$$

czyli

$$\mathbf{a} = \mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y, \quad (3-10)$$

gdzie $a_x (= dv_x/dt)$ i $a_y (= dv_y/dt)$ są skalarnymi składowymi wektora przyspieszenia $\mathbf{a}$ (patrz rys. 3-3c).

Ograniczmy się znowu jedynie do ruchu jednowymiarowego, przyjmując dla wygody, że odbywa się on wzdłuż osi x . Ponieważ v_x dla takiego ruchu nie zmienia się w czasie (jest równe zero), $a_x (= dv_x/dt)$ musi także być równe zero, czyli

$$\mathbf{a} = i a_x. \quad (3-11)$$

Ponieważ i ma kierunek dodatni osi x , więc a_x jest dodatnie, gdy $\mathbf{a}$ ma ten sam kierunek, a ujemne, gdy $\mathbf{a}$ ma kierunek przeciwny niż i .

Przykład 3. Na rysunku 3-5a pokazany jest ruch ze zmiennym przyspieszeniem wzdłuż osi x . Aby znaleźć przyspieszenie a_x w dowolnej chwili czasu, musimy określić dla dowolnej chwili dv_x/dt . Jest to po prostu nachylenie krzywej przedstawiającej zależność prędkości od czasu w danej chwili. Nachylenie tej krzywej, jak widać na rys. 3-5c, w punkcie b wynosi $-1,3 \text{ m/s}^2$, a w punkcie d wynosi $-1,8 \text{ m/s}^2$. Wykres przedstawiający szukane nachylenie krzywej dla wszystkich chwil czasu podany jest na rys. 3-5d. Zauważmy, że a_x jest ujemne w każdej chwili, co oznacza, że wektor przyspieszenia $\mathbf{a}$ ma kierunek ujemny osi x . Dalej oznacza to, że v_x ciągle maleje z czasem, co widać jasno na rys. 3-5c. Podany ruch jest przykładem ruchu z przyspieszeniem stałym co do kierunku, lecz o zmiennej wartości (patrz rys. 3-5a).

3-8. Ruch jednowymiarowy. Przyspieszenie stałe

W dalszym ciągu ograniczymy nasze rozważania nie tylko do przypadku ruchu jednowymiarowego (wzdłuż osi x), ale ponadto do ruchu, dla którego $a_x = a = \text{const}$. Dla takiego stałego przyspieszenia średnie przyspieszenie w dowolnym przedziale czasu jest równe (stałemu) przyspieszeniu chwilowemu a_x . Przyjmijmy, że $t_1 = 0$, a $t_2 = t$, gdzie t jest dowolną chwilą czasu. Niech v_{x0} będzie wartością v_x w chwili $t = 0$, a v_x wartością prędkości w ustalonej chwili t . Przy tych oznaczeniach a_x [patrz równanie (3-8)] jest równe

$$a_x = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_x - v_{x0}}{t - 0},$$

czyli

$$v_x = v_{x0} + a_x t. \quad (3-12)$$

Równanie to wykazuje, że prędkość v_x w chwili t jest sumą prędkości v_{x0} w chwili $t = 0$ i zmiany prędkości w przedziale czasu od 0 do t równej $a_x t$.

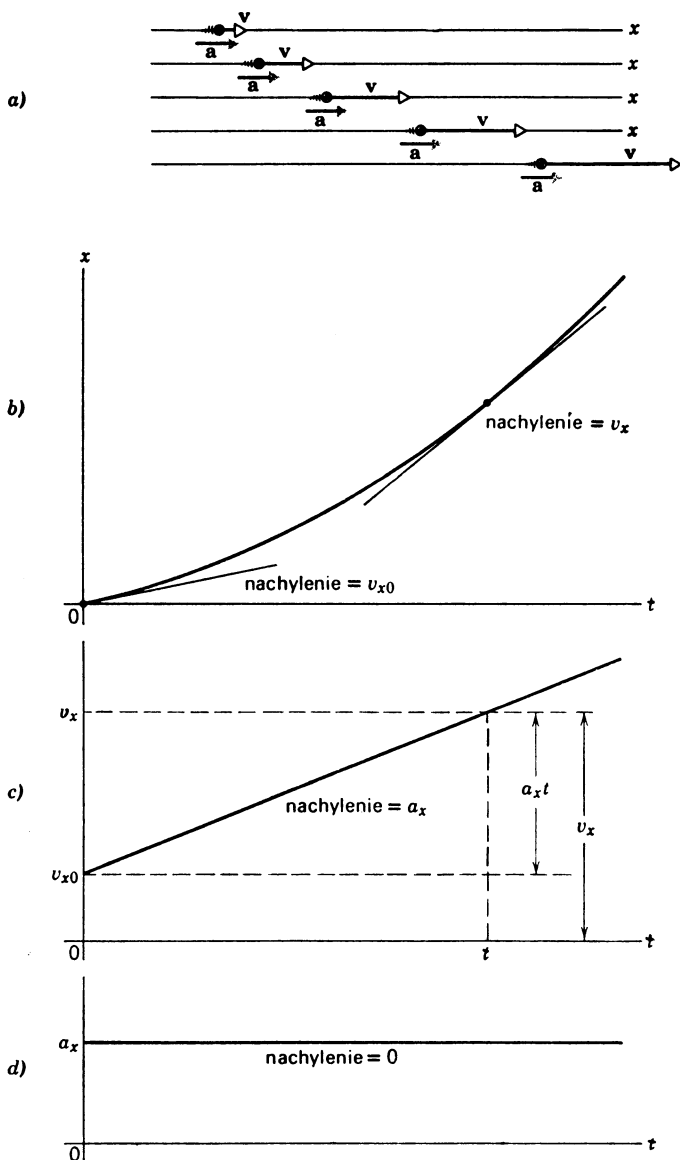
Na rysunku 3-7c przedstawiono wykres v_x w zależności od czasu t w przypadku stałego przyspieszenia: jest to wykres równania (3-12). Zauważmy, że nachylenie krzywej przedstawiającej prędkość jest stałe, jak być powinno ze względu na założoną stałość przyspieszenia $a_x (= dv_x/dt)$ (patrz rys. 3-7d).

Jeśli prędkość v_x zmienia się jednostajnie w czasie, jej wartość średnia w dowolnym przedziale czasu równa jest połowie sumy jej wartości na początku i na końcu tego przedziału. Prędkość średnia $\bar{v}_x$ w przedziale między $t = 0$ i $t = t$ wynosi więc

$$\bar{v}_x = \frac{1}{2}(v_{x0} + v_x). \quad (3-13)$$

Zależność ta nie byłaby prawdziwa, gdyby przyspieszenie było zmienne, ponieważ krzywa przedstawiająca zależność v_x od t nie byłaby linią prostą.

* Podobnie jak w przypadku prędkości dla ruchu jednowymiarowego, a_x nazywamy zwykle przyspieszeniem, mimo że naprawdę przyspieszenie jest wektorem, a a_x tylko jego składową. W ruchu jednowymiarowym, jeżeli jedna z osi jest wybrana wzdłuż kierunku ruchu, istnieje tylko jedna różna od zera składowa przyspieszenia.



Rys. 3-7. (a) Pięć kolejnych „zdjęć migawkowych” ruchu prostoliniowego ze stałym przyspieszeniem. Strzałki związane z kuleczkami reprezentują prędkość v ; strzałki umieszczone poniżej kuleczek — przyspieszenie a . (b) Przemieszczenie rośnie zgodnie z równaniem $x = v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$. Nachylenie krzywej reprezentującej przemieszczenie wzrasta jednostajnie i w każdej chwili ma wartość prędkości v_x . (c) Prędkość v_x wzrasta jednostajnie zgodnie z równaniem $v_x = v_{x0} + a_x t$. Nachylenie krzywej reprezentującej prędkość jest stałe i w każdej chwili ma wartość przyspieszenia a_x . (d) Przyspieszenie a_x ma stałą wartość; nachylenie odpowiedniej krzywej jest równe zero. Na rysunku 3-5 przedstawiono podobne wykresy dla ruchu jednowymiarowego, w którym przyspieszenie nie jest stałe

Jeżeli położenie punktu materialnego w chwili $t = 0$ jest x_0 , jego położenie w chwili t można znaleźć z zależności

$$x = x_0 + \bar{v}_x t,$$

która w połączeniu z równaniem (3-13) daje

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_{x0} + v_x)t. \quad (3-14)$$

Przemieszczenie punktu materialnego w czasie od 0 do t jest równe $x - x_0$. Często początek układu wybieramy tak, aby $x_0 = 0$.

Zauważmy, że jeżeli nie bierzemy pod uwagę warunków początkowych, tzn. wartości x i v_x w chwili $t = 0$ (równych odpowiednio x_0 i v_{x0}), istnieją cztery parametry ruchu. Są nimi przemieszczenie x , prędkość v_x , przyspieszenie a_x oraz czas t . Znając dowolne dwa z tych parametrów i wiedząc, że przyspieszenie jest stałe, lecz nie znając jego wartości, możemy obliczyć pozostałe dwa. Na przykład, jeżeli znamy a_x i t , to z równania (3-12) wyliczamy v_x , a mając v_x , z równania (3-14) znajdujemy x .

W większości zagadnień dotyczących ruchu jednostajnie przyspieszonego znane są dwa parametry, a szukany jest trzeci. Wygodnie jest więc mieć gotowy układ równań przedstawiających zależności między dowolnymi trzema z czterech parametrów. Równanie (3-12) zawiera v_x , a_x i t , lecz nie zawiera x ; równanie (3-14) zawiera x , v_x i t , lecz nie zawiera a_x . Aby skompletować nasz układ równań, potrzebujemy jeszcze dwóch zależności, z których jedna zawierałaby x , a_x i t , a nie zawierałaby v_x , a druga zawierała x , v_x , i a_x , lecz nie zawierałaby t . Zależności te można łatwo otrzymać łącząc równanie (3-12) z równaniem (3-14).

Jeżeli do równania (3-14) podstawimy wartość v_x z równania (3-12), to wyeliminujemy v_x i otrzymamy

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2. \quad (3-15)$$

Jeżeli równanie (3-12) rozwiążemy względem t i otrzymaną wartość t podstawimy do równania (3-14), dostaniemy

$$v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0). \quad (3-16)$$

Równania (3-12), (3-14), (3-15) i (3-16) (patrz tablica 3-1) stanowią kompletny układ równań opisujących ruch wzdłuż linii prostej, ze stałym przyspieszeniem.

Tablica 3-1

Układ równań opisujących ruch prostoliniowy ze stałym przyspieszeniem. (Polożenie x_0 oraz prędkość v_{x0} w chwili początkowej $t = 0$ są danymi warunkami początkowymi)

Numer równania	Równanie	Występujące wielkości			
		x	v_x	a_x	t
(3-12)	$v_x = v_{x0} + a_x t$	—	+	+	+
(3-14)	$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_{x0} + v_x)t$	+	+	—	+
(3-15)	$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$	+	—	+	+
(3-16)	$v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0)$	+	+	+	—

Specjalnym przypadkiem ruchu ze stałym przyspieszeniem jest ruch, w którym przyspieszenie wynosi zero, tzn. $a_x = 0$. W tym przypadku cztery równania z tablicy 3-1 upraszczają się, dając oczekiwany wynik $v_x = v_{x0}$ (prędkość się nie zmienia) oraz $x = x_0 + v_{x0}t$ (przemieszczenie zmienia się liniowo z czasem).

Przykład 4. Krzywa na rys. 3-7b przedstawia zależność przemieszczenia od czasu dla ruchu ze stałym przyspieszeniem; jest to więc wykres równania (3-15), w którym $x_0 = 0$. Nachylenie stycznej do krzywej w chwili t równe jest prędkości v_x w tej chwili. Zauważmy, że nachylenie wzrasta z czasem w sposób ciągły, počawszy od wartości v_{x0} w chwili $t = 0$. Szybkość wzrostu tego nachylenia określa przyspieszenie a_x , które w tym przypadku jest *stałe*. Krzywa pokazana na rys. 3-7b jest parabolą, ponieważ równanie (3-15) jest równaniem paraboli mającej w chwili $t = 0$ nachylenie v_{x0} . Wykonując kolejne różniczkowanie równania (3-15)

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_xt^2$$

otrzymujemy

$$dx/dt = v_{x0} + a_xt, \quad \text{czyli} \quad v_x = v_{x0} + a_xt,$$

co daje nam prędkość v_x w chwili t [porównaj równanie [(3-12)] oraz

$$dv_x/dt = a_x,$$

stałe przyspieszenie. Wykres przedstawiający zależność przemieszczania od czasu dla ruchu prostoliniowego jednostajnie przyspieszonego będzie więc zawsze parabolą.

3-9. Zgodność jednostek i wymiarów

Czytelnik nie powinien mechanicznie uczyć się na pamięć wzorów takich, jak podano w tablicy 3-1. Najważniejszą rzeczą jest dokładne prześledzenie sposobu ich wyprowadzania. Podane wzory Czytelnik przyswoi sobie automatycznie, stosując je do rozwiązywania zadań, częściowo wskutek wielokrotnego ich powtarzania, ale głównie dlatego, że dzięki zastosowaniom staną się one bardziej zrozumiałe.

W podanych równaniach możemy stosować *dowolne jednostki czasu i odległości*. Jeżeli jednak zdecydujemy się np. czas podawać w sekundach, a odległość w metrach, konsekwentnie będziemy musieli prędkość wyrazić w m/s, a przyspieszenie w m/s². Gdyby w danych zadaniach jednostki pewnej wielkości, np. prędkości, nie były zgodne z jednostkami innej wielkości, np. przyspieszenia, wówczas powinniśmy tak przekształcić dane przed podstawieniem tych wielkości do naszych równań, aby wszystkie jednostki były zgodne. Ustalając jednostki wielkości podstawowych automatycznie określamy zgodne z nimi jednostki wielkości pochodnych. Przy wszystkich obliczeniach należy pamiętać o określeniu jednostek końcowego wyniku, ponieważ bez podania jednostek wynik nie ma znaczenia.

Przykład 5. Przypuśćmy, że chcemy znaleźć prędkość punktu materialnego poruszającego się ze stałym przyspieszeniem 5,00 cm/s², po upływie $\frac{1}{2}$ h od początku ruchu, jeżeli jego prędkość początkowa wynosiła 10,0 m/s. Decydujemy się jako jednostki długości wybrać metry, a jako jednostki czasu sekundy. Wówczas

$$a_x = 5,00 \text{ cm/s}^2 = 5,00 \text{ cm/s}^2 \cdot (1 \text{ m}/100 \text{ cm}) = 0,05 \text{ m/s}^2,$$

natomiast przedział czasu

$$\Delta t = t - t_0 = \frac{1}{2} \text{ h} \cdot (60 \text{ s}/1 \text{ min}) \cdot (60 \text{ min}/1 \text{ h}) = 1800 \text{ s}.$$

Zauważmy, że współczynniki przeliczeniowe jednostek znajdujących się w nawiasach są równe jedności. Przyjmując, że w chwili początkowej $t_0 = 0$, podobnie jak w równaniu (3-12), mamy

$$v_x = v_{x0} + a_xt = 10,0 \text{ m/s} + 0,05 \text{ m/s}^2 \cdot 1800 \text{ s} = 100 \text{ m/s}.$$

Jednym ze sposobów na upewnienie się, że otrzymane równanie jest poprawne, jest sprawdzenie *wymiarów* wszystkich jego wyrazów. Wymiary dowolnej wielkości fizycznej można zawsze przedstawić w postaci kombinacji wymiarów odpowiednich wielkości podstawowych, takich jak masa, długość i czas. Wymiarem prędkości jest długość [L]

dzielona przez czas $[T]$; wymiarem przyspieszenia jest długość dzielona przez kwadrat czasu itd. W każdym poprawnym równaniu fizycznym wymiary wszystkich jego wyrazów muszą być jednakowe. Nie możemy na przykład przyrównywać do siebie dwóch wyrazów, z których jeden ma wymiar prędkości, a drugi przyspieszenia. Symbole wymiarów związane z odpowiednimi wielkościami fizycznymi należy traktować jak wielkości algebraiczne; można łączyć, upraszczać, itd., tak jakby były one zwykłymi wyrazami równania. Na przykład, aby sprawdzić czy równanie (3-15) $x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$ jest poprawne pod względem wymiarów, zauważmy, że x i x_0 mają wymiar długości. Pozostałe dwa wyrazy muszą więc również mieć wymiar długości. Wymiar wyrazu $v_{x0}t$ jest następujący:

$$\frac{\text{długość}}{\text{czas}} \cdot \text{czas} = \text{długość}, \quad \text{czyli} \quad \frac{L}{T} \cdot T = L,$$

natomiast wymiarem wyrazu $\frac{1}{2}a_x t^2$ jest

$$\frac{\text{długość}}{\text{czas}^2} \cdot \text{czas}^2 = \text{długość}, \quad \text{czyli} \quad \frac{L}{T^2} T^2 = L.$$

Omawiane równanie jest więc poprawne pod względem wymiarów. Należy pamiętać o sprawdzeniu wymiarów każdego stosowanego równania.

Przykład 6. Prędkość samochodu jadącego dokładnie na wschód maleje jednostajnie od wartości 45 km/h, na odcinku równym 50 m.

(a) Jaka jest wartość i kierunek stałego przyspieszenia samochodu?

Wybieramy umownie kierunek z zachodu na wschód jako kierunek dodatni osi x . Znamy x i v_x , a szukamy a_x . Czas nie występuje w zadaniu. Odpowiednim równaniem jest więc równanie (3-16) (patrz tablica 3-1). Mamy $v_x = +30$ km/h, $v_{x0} = +45$ km/h, $x - x_0 = +59$ m = 0,05 km. Z równania (3-16), $v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0)$ otrzymujemy

$$a_x = \frac{v_x^2 - v_{x0}^2}{2(x - x_0)},$$

czyli

$$a_x = \frac{(30,0 \text{ km/h})^2 - (45,0 \text{ km/h})^2}{2 \cdot 0,05 \text{ km}} = -1,13 \cdot 10^4 \text{ km/h}^2.$$

Przyspieszenie a jest skierowane dokładnie na zachód, tzn. w kierunku ujemnym osi x , ponieważ a_x jest ujemne; wobec tego samochód jadący na wschód hamuje. Jeżeli prędkość jakiegoś ciała maleje, mówimy, że jego ruch jest opóźniony.

(b) Jak długo jechał samochód ruchem opóźnionym?

Z tablicy 3-1 widać, że jeśli chcemy skorzystać jedynie z danych początkowych, musimy zastosować równanie (3-14)

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_{x0} + v_x)t;$$

otrzymujemy wtedy

$$t = \frac{2(x - x_0)}{v_{x0} + v_x},$$

czyli

$$t = \frac{2 \cdot 0,05 \text{ km}}{(45,0 + 30,0) \text{ km/h}} = \frac{1}{750} \text{ h} = 4,80 \text{ s}.$$

Jeżeli chcielibyśmy skorzystać z danych zawartych w części (a), musielibyśmy zastosować równanie (3-12). Otrzymane wyniki będziemy mogli porównać ze sobą. Z równania (3-12), $v_x = v_{x0} + a_x t$, mamy

$$t = \frac{v_x - v_{x0}}{a_x},$$

czyli

$$t = \frac{(30,0 - 45,0) \text{ km/h}}{-1,13 \cdot 10^4 \text{ km/h}} = 1,33 \cdot 10^{-3} \text{ h} = 4,80 \text{ s.}$$

(c) Ile czasu upłynie do chwili zatrzymania samochodu, jeżeli założymy, że hamuje on w dalszym ciągu z takim samym przyspieszeniem?

Skorzystamy z równania (3-12), które w tym wypadku jest najwygodniejsze. Mamy $v_{x0} = 45 \text{ km/h}$, $a_x = -1,13 \cdot 10^4 \text{ km/h}^2$ i prędkość końcową $v_x = 0$. Z równania (3-12), $v_x = v_{x0} + a_x t$, wyliczymy więc, że

$$t = \frac{v_x - v_{x0}}{a_x},$$

czyli

$$t = \frac{(0 - 45,0) \text{ km/h}}{-1,13 \cdot 10^4 \text{ km/h}^2} = 4,00 \cdot 10^{-3} \text{ h} = 14,4 \text{ s.}$$

(d) Jaką odległość przejedzie samochód do chwili zatrzymania? W tym przypadku należy skorzystać z równania (3-15). Dane są: $v_{x0} = 45,0 \text{ km/h}$, $a_x = -1,13 \cdot 10^4 \text{ km/h}^2$, $t = 4,00 \cdot 10^{-3} \text{ h}$. Z równania (3-15), $x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$, otrzymujemy

$$x - x_0 = v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 = 45,0 \text{ km/h} \cdot (4,00 \cdot 10^{-3} \text{ h}) + \frac{1}{2}(-1,13 \cdot 10^4 \text{ km/h}^2) \cdot (4,00 \cdot 10^{-3} \text{ h})^2 = 0,09 \text{ km} = 90 \text{ m.}$$

Przykład 7. Jądro atomu helu (cząstka α) porusza się wzdłuż linii prostej wewnątrz pustej rury o długości 2 m, stanowiącej odcinek akceleratora. (a) Jak długo cząstka będzie znajdowała się w rurze, przy założeniu, że porusza się ona ze stałym przyspieszeniem, jeżeli jej prędkość na początku rury wynosi $1 \cdot 10^4 \text{ m/s}$, a na końcu $5 \cdot 10^6 \text{ m/s}$. (b) Czemu równe jest przyspieszenie cząstki?

(a) Przyjmujemy, że oś x jest równoległa do rury, kierunek dodatni osi x pokrywa się z kierunkiem ruchu cząstki, a początek osi pokrywa się z początkiem rury. Znamy x i v_x , a szukamy t . Przyspieszeniem a_x nie interesujemy się. Najwygodniej będzie więc skorzystać z równania (3-14), $x = x_0 + \frac{1}{2}(v_{x0} + v_x)t$, w którym $x_0 = 0$. Przekształcając to równanie otrzymamy

$$t = \frac{2x}{v_{x0} + v_x},$$

czyli

$$t = \frac{2 \cdot 2,0 \text{ m}}{(500 + 1) \cdot 10^4 \text{ m/s}} = 8 \cdot 10^{-7} \text{ s} \quad (\text{lub } 0,8 \text{ } \mu\text{s}).$$

(b) Przyspieszenie znajdujemy z równania (3-12), $v_{x0} + a_x t = v_x$, skąd

$$a_x = \frac{v_x - v_{x0}}{t} = \frac{(500 - 1) \cdot 10^4 \text{ m/s}}{8 \cdot 10^{-7} \text{ s}} = +6,3 \cdot 10^{12} \text{ m/s}^2$$

(czyli 6 trylionów m/s^2). Jest to ogromne przyspieszenie, w porównaniu np. z przyspieszeniem z poprzedniego zadania, ale występuje ono jedynie przez krótki przeciąg czasu. Kierunek a jest taki, jak kierunek dodatni osi x , tzn. taki, jak kierunek ruchu cząstki, ponieważ a_x jest dodatnie.

3-10. Swobodny spadek ciał

Najlepiej znanym przykładem ruchu ze stałym (prawie) przyspieszeniem jest swobodny spadek ciał na Ziemi. Stwierdzono, że gdy nie występuje opór powietrza, wszystkie ciała, niezależnie od ich rozmiarów, ciężaru i składu chemicznego, w tym samym punkcie nad powierzchnią Ziemi spadają z takim samym przyspieszeniem. Ponadto, jeżeli odległość przebywana przez te ciała nie jest zbyt duża, to przyspieszenie nie zmieni swojej wartości wzdłuż całej tej odległości. Taki „idealny” ruch, w którym zaniedbujemy opór powietrza oraz zmiany przyspieszenia z wysokością, nazywamy *spadkiem swobodnym*.

Przyspieszenie swobodnie spadających ciał nazywamy przyspieszeniem ziemskim i oznaczamy symbolem g . W pobliżu powierzchni Ziemi jego wartość* wynosi w przybliżeniu $9,8 \cdot \text{m/s}^2$, jest ono skierowane do środka Ziemi. Zmiany rzeczywistej wartości przyspieszenia ziemskiego z szerokością geograficzną i wysokością nad powierzchnią Ziemi omówimy później (rozdział 16).

Natura ruchu spadających ciał już od bardzo dawna była przedmiotem zainteresowania filozofii przyrody. Arystoteles zapewniał, że „prędkość spadania (...) dowolnego ciała obdarzonego ciężarem jest proporcjonalna do jego rozmiarów”. Kilka wieków później Galileusz (Galileo Galilei, 1564—1642) podważył powszechnie uznany autorytet Arystotelesa w tych sprawach, odwołując się do doświadczenia, a następnie publicznie ogłaszając otrzymane wyniki. W ostatnich latach swojego życia Galileusz napisał traktat pod tytułem *Dialog o dwu najważniejszych układach świata: Ptolemeuszowym i Kopernikowym*, w którym opisał szczegółowo wyniki swoich badań nad ruchem ciał.

Głoszony przez Arystotelesa pogląd, że ciała cięższe spadają szybciej, jest poglądem dość powszechnym. Wydaje się, że jest on potwierdzony przez dobrze znany fakt, że jeżeli jednocześnie z tej samej wysokości upuścimy piłkę i kartkę papieru, piłka upadnie na podłogę znacznie wcześniej niż papier. Jednakże, jeżeli papier mocno zwiniemy w kulkę i powtórzymy doświadczenie, okaże się, że zarówno piłka, jak i papier spadną dokładnie w tym samym czasie. W pierwszym przypadku wolniejszy ruch papieru był spowodowany większym oporem powietrza. W drugim przypadku opór, jaki powietrze stawia papierowi, zostaje zmniejszony i jest prawie jednakowy dla obu ciał, dlatego spadają one z tą samą prędkością. Oczywiście najlepszym, bezpośrednim sprawdzianem jest umieszczenie obu ciał w próżni. Nawet w przypadku łatwej do otrzymania częściowej próżni możemy pokazać, że pióro ptasie oraz tysiąc razy cięższa kula ołowiana spadają z prędkościami praktycznie nierozróżnialnymi.

W czasach Galileusza nie znano jednak żadnego efektywnego sposobu otrzymywania nawet częściowej próżni, ani nie było przyrządów pozwalających mierzyć czas z dokładnością pozwalającą na otrzymanie odpowiednich danych liczbowych. Mimo to Galileusz udowodnił słuszność swojego poglądu, wykazując, że charakter ruchu swobodnie spadającej piłki** jest taki sam, jak piłki staczającej się po równi pochyłej, przy czym równia zmniejsza efektywną wartość przyspieszenia grawitacyjnego, czyli zwalnia ruch. Prędkość i przyspieszenie tego zwolnionego ruchu mógł on już zbadać mierząc odpowiednie przedziały czasu za pomocą ilości wody wypływającej ze zbiornika***. Galileusz udowodnił, że jeżeli przyspieszenie w ruchu po równi jest stałe, przyspieszenie grawitacyjne również musi być stałe, przyspieszenie na równi jest bowiem po prostu składową przyspieszenia grawitacyjnego i w przypadku równi o stałym nachyleniu stosunek tych dwu przyspieszeń jest stały. W przeprowadzonym doświadczeniu Galileusz stwierdził, że odcinki przebywane przez zsuwającą się piłkę w kolejnych, jednakowych przedziałach czasu są proporcjonalne do liczb nieparzystych 1, 3, 5, 7, ... itd. Całkowite odległości przebywane w kolej-

* Patrz: D. R. Tate, Absolute value of g at the National Bureau of Standards, *J. Res. NBS* 70 C, April—June, 1966.

** Patrz: Stillman Drake, Galileo's Discovery of the Law of Free Fall, *Scientific American*, May 1973.

*** Patrz: Stillman Drake, The Role of Music in Galileo's Experiments, *Scientific American*, June 1975.

nych przedziałach czasu są więc proporcjonalne do $1+3$, $1+3+5$, $1+3+5+7$, itd., a więc do kwadratów liczb całkowitych 1, 2, 3, 4, itd. Ale jeżeli przebyta odległość jest proporcjonalna do kwadratu czasu, jaki upłynął od początku ruchu, nabyta prędkość musi być proporcjonalna do tego czasu, co jest możliwe jedynie wówczas, gdy ruch jest jednostajnie przyspieszony. Ponadto stwierdził on, że otrzymany rezultat nie zależy od masy piłki używanej w doświadczeniu.

3-11. Równania opisujące spadek swobodny

Wybieramy układ odniesienia sztywno związany z Ziemią taki, że oś y jest skierowana pionowo do góry. Przyspieszenie grawitacyjne g jest wektorem skierowanym pionowo w dół (w kierunku do środka Ziemi), a więc w kierunku ujemnym osi y . (Wybór ten jest wyborem umownym. W innych zadaniach może być wygodniej wybrać jako dodatni kierunek w dół.) Do spadku swobodnego stosują się równania opisujące ruch ze stałym przyspieszeniem (3-12), (3-14), (3-15), (3-16). W równaniach tych należy po prostu zastąpić x przez y i przyjąć, że $y_0 = 0$. Wówczas otrzymamy

$$\begin{aligned}v_y &= v_{y0} + a_y t, \\y &= \frac{1}{2}(v_{y0} + v_y) t, \\y &= v_{y0} t + \frac{1}{2} a_y t^2, \\v_y^2 &= v_{y0}^2 + 2 a_y y,\end{aligned}\tag{3-17}$$

przy czym zamiast a_y wstawiamy $-g$; g — wartość przyspieszenia grawitacyjnego. Zauważmy, że za początek układu przyjęliśmy początkowe położenie ciała, tzn. w chwili $t = 0$ mamy $y_0 = 0$.

Przykład 8. Ciało początkowo spoczywające spada swobodnie. Określić położenie i prędkość tego ciała, jego przyspieszenie oraz czas ruchu. Aby znaleźć położenie ciała w chwili t , korzystamy z równania

$$y = v_{y0} t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Wiemy, że $v_{y0} = 0$ i $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, a więc dla czasu $t = 1$ otrzymamy

$$y = 0 - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 1,0 \text{ s}^2 = -4,9 \text{ m}.$$

Aby znaleźć prędkość ciała w chwili $t = 1,0 \text{ s}$, korzystamy z równania $v_y = v_{y0} - g t$ i otrzymujemy

$$v_y = 0 - 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 1,0 \text{ s} = -9,8 \text{ m/s}.$$

Po upływie $1,0 \text{ s}$ od chwili rozpoczęcia ruchu z położenia spoczynkowego, ciało znajduje się $4,9 \text{ m}$ poniżej tego położenia i ma prędkość równą $9,8 \text{ m/s}$, skierowaną pionowo w dół.

Sprawdźcie sami, że wartości y , v_y i a_y dla czasów $t = 2,0$, $3,0$ i $4,0$ są takie, jak pokazane na rys. 3-8.

Przykład 9. Piłka została rzucona z ziemi pionowo do góry z prędkością początkową $24,5 \text{ m/s}$.

(a) Po jakim czasie osiągnie ona swoje najwyższe położenie?

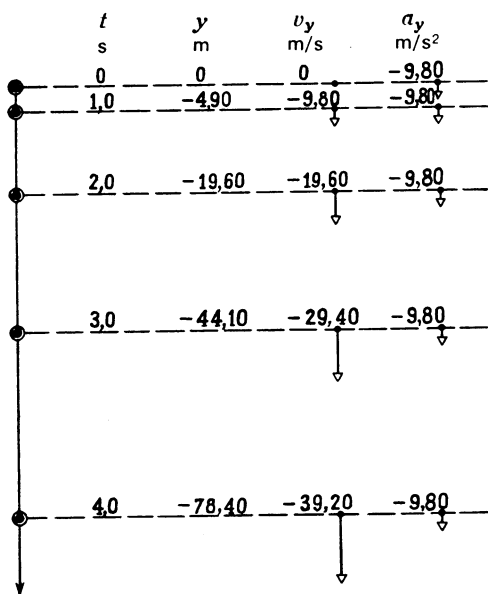
W najwyższym punkcie $v_y = 0$, a prędkość początkowa $v_{y0} = 24,5 \text{ m/s}$. Aby obliczyć czas t , korzystamy z równania $v_y = v_{y0} - g t$, skąd

$$\begin{aligned}t &= \frac{v_{y0} - v_y}{g}, \\t &= \frac{(24,5 - 0) \text{ m/s}}{9,8 \text{ m/s}^2} = 2,5 \text{ s}.\end{aligned}$$

(b) Jak wysoko wzniesie się piłka?

Korzystając jedynie z danych początkowych, wybieramy równanie $v_y^2 = v_{y0}^2 - 2 g y$, skąd

$$y = \frac{v_{y0}^2 - v_y^2}{2g} = \frac{(24,5 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2} = +30 \text{ m}.$$



Rys. 3-8. Ciało spadające swobodnie; pokazano y , v_y oraz a_y w poszczególnych chwilach czasu t

(c) Po jakim czasie piłka znajdzie się na wysokości 29,4 m nad Ziemią? Korzystając z zależności $y = v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$, mamy

$$\frac{1}{2}gt^2 - v_{y0}t + y = 0,$$

$$\frac{1}{2}9,8(m/s^2) \cdot t^2 - 24,5(m/s) \cdot t + 29,4 m = 0,$$

czyli

$$t^2 - 5,0t + 6,0 = 0,$$

skąd

$$t = 2,0 s, \quad t = 3,0 s.$$

W chwili $t = 2,0 s$ piłka porusza się do góry z prędkością 4,9 m/s, ponieważ

$$v_y = v_{y0} - gt = 24,5 m/s - 9,8 m/s^2 \cdot 2,0 s = 4,9 m/s.$$

W chwili $t = 3,0 s$ piłka porusza się w dół z taką samą prędkością, ponieważ

$$v_y = v_{y0} - gt = 24,5 m/s - 9,8 m/s^2 \cdot 3,0 s = -4,9 m/s.$$

Zauważmy, że w ciągu tej jednej sekundy prędkość piłki zmieniała się o $-9,8 m/s$, co odpowiada przyspieszeniu $-9,8 m/s^2$.

Spróbujcie udowodnić, że w przypadku gdy nie występuje opór powietrza, czas wznoszenia się piłki na pewną wysokość jest równy czasowi jej spadania z tej wysokości i że w każdym punkcie toru ma ona taką samą, co do wartości liczbowej, prędkość, niezależnie od tego czy spada, czy wznosi się.

Pytania

1. Czy znane jest jakieś zjawisko fizyczne związane z Ziemią, w którym Ziemi nie można by traktować jak punktu materialnego?

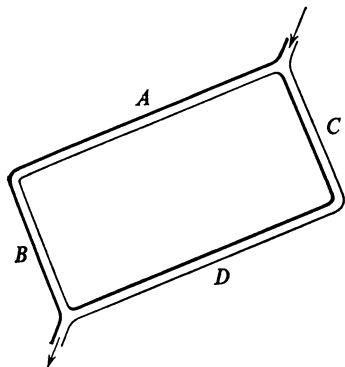
2. W ciągu każdej kolejnej sekundy królik przebywa połowę odległości, jaka dzieli go jeszcze od główki kapusty. Czy dotrze on kiedykolwiek do tej kapusty? Jaka jest graniczna wartość jego średniej prędkości? Zrobić wykres zmian prędkości i położenia królika z upływem czasu.

3. Średnia prędkość może oznaczać bezwzględną wartość wektora średniej prędkości. Inne znaczenie nadawane tej wielkości — to całkowita długość toru przebytego przez ciało, podzielona przez odpowiedni przedział czasu. Czy te znaczenia różnią się czymś? Jeśli tak, to podać jakiś przykład.

4. Czy w przypadku stałej prędkości prędkość średnia w jakimś przedziale czasu może różnić się od prędkości chwilowej w jakiejś chwili czasu?

5. Czy prędkość średnia ciała poruszającego się wzdłuż osi x może być równa $\frac{1}{2}(v_{x0} + v_x)$, jeżeli przyspieszenie nie jest jednostajne? Uzasadnić swoją odpowiedź posługując się odpowiednimi wykresami.

6. Czy szybkościomierz w samochodzie mierzy szybkość zdefiniowaną tak, jak my to robiliśmy?
7. (a) Czy ciało może mieć w pewnej chwili prędkość równą zeru, a przyspieszenie różne od zera? (b) Czy wektor prędkości ciała może być zmienny, jeżeli wartość tego wektora jest stała? (c) Czy wartość prędkości może się zmieniać, jeżeli wektor prędkości jest stały?
8. Czy ciało może mieć prędkość skierowaną na wschód, jeżeli przyspieszenie jest skierowane na zachód?
9. Czy kierunek prędkości ciała może się zmieniać, jeżeli przyspieszenie tego ciała jest stałe?
10. Czy prędkość ciała może rosnąć, jeżeli jego przyspieszenie maleje? Wyjaśnić.
11. Z podanych poniżej sytuacji, która jest możliwa? (a) ciało ma prędkość skierowaną na wschód i przyspieszenie na wschód, (b) ciało ma prędkość skierowaną na wschód i przyspieszenie na zachód, (c) ciało ma prędkość równą zeru, a przyspieszenie różne od zera, (d) ciało ma stałe przyspieszenie i zmienną prędkość, (e) ciało ma stałą prędkość i zmienne przyspieszenie.
12. Z równania (3-17) widać, że jeżeli ciało początkowo spoczywające ($v_{y0} = 0$) w położeniu $y = 0$, w chwili $t = 0$, zaczyna się poruszać ze stałym przyspieszeniem, może ono znajdować się w dowolnych położeniach y w dwóch różnych chwilach czasu, mianowicie $+\sqrt{2y/a}$, oraz $-\sqrt{2y/a}$. Jakie jest znaczenie ujemnego pierwiastka kwadratowego tego równania?
13. Co dzieje się z podanymi równaniami kinematycznymi, jeżeli dokonujemy operacji odwrócenia czasu, tzn. zastępujemy t przez $-t$? Wyjaśnić to.
14. Piłkę rzucono pionowo do góry. Czy w przypadku gdy uwzględnimy opór powietrza, czas wznośnienia się piłki będzie krótszy, czy dłuższy niż jej czas spadania?
15. (a) Ciało zostało rzucone do góry z pewną prędkością, na planecie, gdzie przyspieszenie ciała swobodnie spadającego jest dwukrotnie większe niż przyspieszenie ziemskie. Jak wysoko wzniesie się to ciało w porównaniu z wysokością, na jaką wzniosłoby się na Ziemi? (b) Jeżeli prędkość początkowa byłaby dwukrotnie większa, jakie by to miało znaczenie?
16. Czy w ruchu dwuwymiarowym przyspieszenie może mieć stały kierunek?
17. Mężczyzna stojący na krawędzi stromej ściany skalnej, na pewnej wysokości nad Ziemią, rzuca jedną piłkę pionowo do góry z prędkością początkową u , a drugą pionowo w dół z taką samą prędkością początkową. Czy i która piłka będzie miała większą prędkość w chwili upadku na Ziemię? Opór powietrza pomijamy.
18. Rurkę o kształcie prostokąta z zaokrąglonymi rogami umieszczono w pionowej płaszczyźnie jak na rys. 3-9. Przez górny prawy róg wprowadzamy do rurki dwa łożyska kulkowe. Jedno przebywa drogę AB , drugie CD . Które z nich szybciej przybędzie do dolnego, lewego rogu?



Rys. 3-9. Pytanie 18

19. Oczekujemy, że prawdziwe ogólne zależności, powinny być zawsze ważne bez względu na wybór układu współrzędnych; żądając aby ogólne równania były zgodne wymiarowo, zapewniamy ważność równań bez względu na wybór jednostek. Czy potrzebne są zatem jednostki i układy współrzędnych?
20. Korzystając z wiadomości o pomiarze kąta, jakie wymiary można przypisać kątowi płaskiemu? Czy wielkość nie mająca wymiarów może mieć jednostki?
21. Zgodnie z poglądem Arystotelesa, jeżeli lżejszy kamień ma masę m , a cięższy M , kamień M powinien spadać szybciej niż m . Galileusz próbował udowodnić, że rozumowanie Arystotelesa było logicznie sprzeczne, argumentując w następujący sposób. Zwiążmy razem oba kamienie, tak aby utworzyły jeden podwójny kamień. Wówczas przy spadaniu kamień m będzie opóźniał ruch kamienia M , ponieważ ruch

kamienia m jest wolniejszy i całość powinna spadać szybciej niż sam kamień m , ale wolniej niż sam kamień M ; natomiast według Arystotelesa ciało złożone o masie $m + M$ powinno spadać szybciej od samego ciała M , ponieważ jest cięższe.

Czy jeżeli uznamy rozumowanie Galileusza za poprawne, to możemy wyciągnąć wniosek, że ciała M i m muszą spadać z taką samą prędkością? Czy trzeba w tym przypadku przeprowadzić jakieś doświadczenie?

Jeżeli Czytelnik sądzi, że rozumowanie Galileusza było niepoprawne, powinien uzasadnić dlaczego.

Zadania

Paragraf 3-3

1. Jaką odległość przebędzie samochód, poruszający się z prędkością 88 km/h, podczas jednej sekundy, podczas której kierowca patrzy na wypadek drogowy po drugiej stronie drogi?

Odp.: 24 m.

2. Dopuszczalna prędkość na autostradzie została zmniejszona ze 105 km/h do 88,5 km/h w związku z oszczędzaniem paliwa. O ile dłużej teraz będzie trwała podróż autostradą z Buffalo do Nowego Jorku, dla kogoś, kto będzie chciał pokonać ten 700 km odcinek z dopuszczalną prędkością?

3. Porównać swoją średnią prędkość w następujących dwóch przypadkach. (a) Odcinek 72 m przebywa się z prędkością $\frac{1}{2}$ m/s, a następnie biegnie wzdłuż takiego samego odcinka drogi po tej samej linii prostej z prędkością 3 m/s. (b) Po torze prostoliniowym idzie się przez 1,0 min z prędkością $\frac{1}{2}$ m/s, a następnie biegnie tak samo długo z prędkością 3,0 m/s.

Odp.: (a) 1,7 m/s, (b) 2,1 m/s.

4. Pociąg jedzie z praktycznie stałą prędkością równą 60 km/h, najpierw dokładnie na wschód przez 40 min, następnie w kierunku północno-wschodnim pod kątem 45° do poprzedniego przez 20 min, a w końcu na zachód przez 50 min. Jaki jest średni wektor prędkości pociągu w czasie tego ruchu?

5. Dwa pociągi o jednakowych prędkościach 40 km/h jadą naprzeciw siebie po tym samym torze prostoliniowym. Z jednego z tych pociągów, w chwili gdy znajdują się one w odległości 80 km, wyfruwa ptak poruszający się z prędkością 60 km/h i dolatuje do drugiego pociągu, następnie zawraca i leci z powrotem w kierunku pierwszego pociągu itd. (a) Ile razy zdąży on przelecieć drogę od jednego pociągu do drugiego, zanim pociągi się zderzą? Wyjaśnić. (b) Jaka jest całkowita droga przebyta przez ptaka w chwili zderzenia?

Odp.: (a) liczba nieskończona; (b) 60 km.

Paragraf 3-6

6. Punkt materialny poruszający się wzdłuż dodatniego kierunku osi x w kolejnych chwilach czasu znajduje się w następujących położeniach:

t s =	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
x m =	0,080	0,050	0,040	0,050	0,080	0,13	0,20

(a) Zrobić wykres przemieszczenia (nie położenia) tego punktu względem czasu. (b) Znaleźć średnią prędkość punktu w przedziałach czasu: $0,0 \div 1,0$ s; $0,0 \div 2,0$ s; $0,0 \div 3,0$ s; $0,0 \div 4,0$ s. (c) Znaleźć nachylenie krzywej omówionej w punkcie (a) dla $t = 0,0$; 1,0; 2,0; 3,0; 4,0 i 5,0 s. (d) Zrobić wykres nachylenia (jednostki?) względem czasu. (e) Na podstawie krzywej otrzymanej w punkcie (d) określić przyspieszenie punktu materialnego w chwilach czasu $t = 2,0$; 3,0 i 4,0 s.

Paragraf 3-7

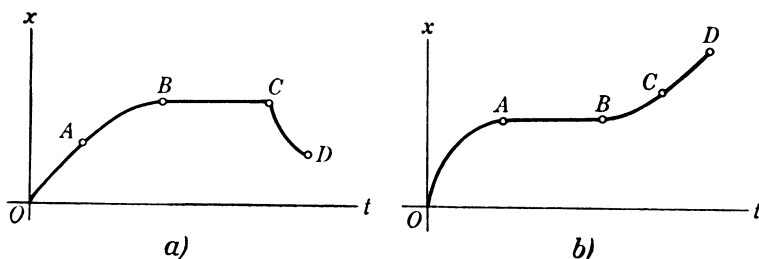
7. Na rys. 3-10a pokazano wykres położenia x względem czasu t , dla punktu materialnego poruszającego się wzdłuż linii prostej. (a) Określić dla każdego z podanych przedziałów OA , AB , BC , CD czy prędkość v_x ma znak +, -, czy jest równa zero. Zrobić to samo dla przyspieszenia. (b) Czy na rysunku widać jakiś przedział, w którym przyspieszenie w sposób oczywisty *nie jest stałe*? (Nie brać pod uwagę końców przedziałów.)

Odp.: (a)	v_x	a_x	
OA	+	0	(b) Nie.
AB	+	-	
BC	0	0	
CD	-	+	

8. Odpowiedzieć na poprzednie pytania w przypadku ruchu przedstawionego na wykresie z rys. 3-10b.

9. Elektron początkowo spoczywający ma przyspieszenie wzrastające liniowo z czasem, $a = kt$ przy czym stała $k = 1,5 \text{ (m/s}^2\text{)/s}$ opisuje szybkość zmian przyspieszenia. (a) Zrobić wykres zależności a od t dla pierwszych 10 s. (b) Korzystając z krzywej otrzymanej w punkcie a wykonać odpowiedni wykres przedstawiający zależność v od t i ocenić, jaka jest prędkość elektronu po upływie 5 s od chwili startu. (c) Na podstawie krzywej otrzymanej w punkcie b narysować odpowiednią krzywą przedstawiającą zależność x od t i ocenić, jak daleko oddalił się elektron od punktu spoczynku w czasie pierwszych 5,0 s swego ruchu.

Odp.: (b) 19 m/s; (c) 31 m.



Rys. 3-10. Zadanie 7(a). Zadanie 8 (b)

10. Położenie punktu materialnego poruszającego się wzdłuż osi x zależy od czasu według równania

$$x = \frac{v_{x0}}{k} (1 - e^{-kt}),$$

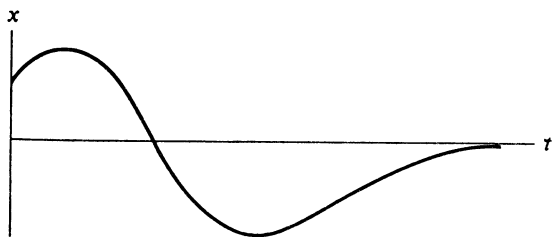
w którym v_{x0} oraz k są wielkościami stałymi. (a) Zrobić wykres zależności x od t . Zauważyć, że w chwili $t = 0$ położenie $x = 0$, a w chwili $t = \infty$ położenie $x = v_{x0}/k$, co znaczy, że całkowita odległość, jaką przebywa punkt, jest równa v_{x0}/k . (b) Pokazać, że prędkość v_x jest dana równaniem

$$v_x = v_{x0} e^{-kt},$$

czyli maleje wykładniczo z czasem od wartości początkowej v_{x0} i staje się równa zero po czasie nieskończonym. (c) Pokazać, że przyspieszenie a_x dane jest równaniem

$$a_x = -kv_x,$$

co znaczy, że jest ono skierowane przeciwnie niż prędkość, a jego wartość jest proporcjonalna do prędkości. (d) Opisany ruch jest ruchem o zmiennym przyspieszeniu. Spróbować wyjaśnić fizycznie, jak to jest możliwe, że potrzeba nieskończonego czasu na to, aby zatrzymać punkt, który przebywa skończoną odległość.



Rys. 3-11. Zadanie 11

11. Punkt materialny porusza się wzdłuż osi x w zależności od czasu jak na rys. 3-11. Naszkicować krzywą obrazującą zależność prędkości od czasu i przyspieszenia od czasu dla tego ruchu.

Paragraf 3-8

12. Odrzutowiec musi osiągnąć prędkość 360 km/h na pasie startowym, aby wzbić się w powietrze. Przyjmując stałe przyspieszenie i długość toru startowego równą 1,8 km, jakie najmniejsze przyspieszenie (od momentu, gdy odrzutowiec znajduje się w stanie spoczynku) jest konieczne?

13. Samochód zwiększa swą prędkość jednostajnie z 25 do 55 km/h w pół minuty. Rower zwiększa swą prędkość również jednostajnie ze stanu spoczynku do 30 km/h w pół minuty. Porównać przyspieszenia.

Odp. Oba przyspieszenia są równe i wynoszą $0,28 \text{ m/s}^2$.

14. Do badania wpływu dużych przyspieszeń na organizm człowieka stosowane są specjalne sanie o napędzie raketowym. Jadąc po prostoliniowym torze sanie takie mogą osiągnąć prędkość 1600 km/h w czasie 1,8 s od chwili startu. (a) Założyć, że przyspieszenie san jest stałe i porównać jego wartość z wartością przyspieszenia ziemskiego g . (b) Jaką odległość przebędą sanie w omawianym czasie?

15. Rakieta porusza się w próżni ze stałym przyspieszeniem równym $9,8 \text{ m/s}^2$. (a) Po jakim czasie osiągnie ona prędkość równą $1/10$ prędkości światła, jeżeli w chwili początkowej znajdowała się w spoczynku? (b) Jaką odległość przebędzie rakieta w tym czasie?

Odp.: (a) 36 dni, (b) $4,6 \cdot 10^{10} \text{ km}$.

16. Przed oderwaniem się od łuku strzała, poruszając się z przyspieszeniem, przebyła odległość 0,6 m. Jakie było średnie przyspieszenie strzały, jeżeli jej prędkość w chwili oderwania wynosiła 60 m/s? Podać i uzasadnić założenia konieczne do rozwiązania tego zadania.

17. Pociąg w metrze rusza z jednej ze stacji z przyspieszeniem $1,20 \text{ m/s}^2$, a od środka odległości do następnej stacji zwalnia z opóźnieniem $1,20 \text{ m/s}^2$. Jeżeli stacje dzieli 1100 m, znaleźć (a) czas jazdy między stacjami (b) największą prędkość pociągu w metrze.

Odp.: (a) 60,6 s. (b) 36,4 m/s.

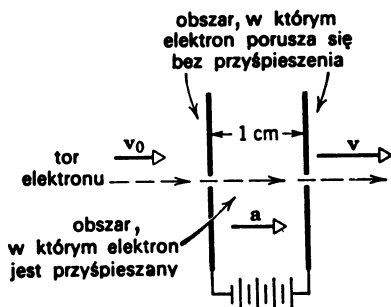
18. Przypuśćmy, że Czytelnik został wezwany do prawnika, aby jako ekspert w dziedzinie fizyki rozstrzygnął pewien problem. Chodzi o to, czy kierowca przekroczył dozwoloną prędkość 48 km/h, zanim awaryjnie zahamował, blokując hamulec i wpadając w poślizg, jeżeli długość śladu pozostawionego na drodze przy hamowaniu wynosiła 5,8 m. Policjant zrobił założenie, że maksymalne opóźnienie samochodu nie powinno być większe niż przyspieszenie ciała spadającego swobodnie i aresztował kierowcę za jazdę z nadmierną prędkością. Czy kierowca istotnie przekroczył dozwoloną granicę prędkości? Wyjaśnić.

19. Dwa pociągi, jeden o prędkości 90 km/h, a drugi o prędkości 120 km/h, jadą naprzeciw siebie po tym samym prostoliniowym torze. Maszyniści zauważają się nawzajem w chwili, gdy jeden pociąg znajduje się w odległości 3,0 km od drugiego i obaj jednocześnie włączają hamulce. Czy dojdzie do zderzenia pociągów, jeżeli hamulce opóźniają ruch każdego z pociągów o $0,9 \text{ m/s}^2$?

Odp.: Nie.

20. Pociąg znajdujący się początkowo w spoczynku porusza się ze stałym przyspieszeniem. W pewnej chwili jego prędkość wynosiła 9 m/s, a 48 m dalej 15 m/s. Obliczyć (a) przyspieszenie pociągu, (b) czas, w jakim pociąg przebył wskazane 48 m, (c) czas, po upływie którego pociąg osiągnął prędkość 9 m/s i (d) odległość, jaką przebył pociąg od miejsca spoczynku do miejsca, w którym osiągnął prędkość 9 m/s?

21. Elektron o prędkości początkowej $v_{x0} = 1,0 \cdot 10^4 \text{ m/s}$ wpada do obszaru, o szerokości 1 cm, w którym jest elektrycznie przyspieszany (rys. 3-12), i opuszcza ten obszar z prędkością $v_x = 4,0 \cdot 10^6 \text{ m/s}$.



Rys. 3-12. Zadanie 21

Jakie było przyspieszenie elektronu, zakładając, że jest ono stałe? (Z takimi procesami spotykamy się w lampach elektronowych stosowanych w telewizorach oraz oscyloskopach.)

Odp.: $8 \cdot 10^{14} \text{ m/s}^2$.

22. Mezon mający prędkość $5,00 \cdot 10^6 \text{ m/s}$ wpada do obszaru pola elektrycznego, które nadaje mu przyspieszenie $1,25 \cdot 10^{14} \text{ m/s}^2$, skierowane przeciwnie do jego prędkości początkowej. Jaką drogę przebędzie mezon do chwili zatrzymania się? Jak długo będzie znajdował się w spoczynku?

23. Samochód poruszający się ze stałym przyspieszeniem przebywa odległość między dwoma punktami oddalonymi o 54 m od siebie w czasie 6,0 s. Prędkość samochodu w chwili mijania drugiego punktu wynosiła 13,5 m/s. (a) Jaka była prędkość samochodu w pierwszym punkcie? (b) Jakie jest jego przyspieszenie? (c) W jakiej odległości od pierwszego punktu samochód spoczywał?

Odp.: (a) 4,5 m/s, (b) 1,5 m/s², (c) 6,9 m.

24. Prędkość samochodu jadącego na wschód jednostajnie zmniejsza się z 45 km/h do 30 km/h na odcinku drogi o długości 80 m. (a) Jaka jest wartość i kierunek stałego przyspieszenia? (b) W jakim przedziale czasu następuje opóźnienie? (c) Jeżeli samochód w dalszym ciągu będzie zwalniał z tym samym opóźnieniem, po jakim czasie się zatrzyma (od momentu, w którym jego prędkość wynosiła 45 km/h)? (d) Na jakim odcinku drogi samochód może z tym opóźnieniem wytracić swą prędkość z 45 km/h do zera. Patrz pytanie 8.

25. W chwili gdy sygnał świetlny na skrzyżowaniu staje się zielony, samochód rusza ze stałym przyspieszeniem a_x równym 1,8 m/s². W tej samej chwili dogania go i wyprzedza ciężarówka jadąca ze stałą prędkością 9 m/s. (a) Po przebyciu jakiej odległości samochód dogoni ciężarówkę? (b) Jaka będzie prędkość samochodu w tym momencie? (Wygodnie jest zrobić jakościowy wykres położenia x w zależności od czasu t dla każdego z pojazdów.)

Odp.: (a) 90 m, (b) 18 m/s.

26. Samochód jadący z prędkością 56 km/h znajduje się w odległości 35 m od bariery, gdy kierowca naciska hamulce. Cztery sekundy później samochód uderza w barierę. (a) Jakie opóźnienie miał samochód przed uderzeniem? (b) Jaką miał prędkość w momencie uderzenia?

27. Maszynista pociągu jadącego z prędkością v_1 spostrzega w odległości d od swojego pociągu pociąg towarowy jadący po tym samym torze, w tym samym kierunku, z mniejszą prędkością v_2 . Uruchamiając hamulce nadaje on swojemu pociągowi stałe opóźnienie a . Pokazać, że

$$\text{jeśli } d > \frac{(v_1 - v_2)^2}{2a}, \text{ nie dojdzie do zderzenia,}$$

$$\text{jeśli } d < \frac{(v_1 - v_2)^2}{2a}, \text{ nastąpi zderzenie.}$$

(Zrobić jakościowy wykres zależności położenia od czasu dla każdego z pociągów.)

28. Podręcznik kierowcy mówi, że samochód o dobrych hamulcach jadący z prędkością 80 km/h może wytracić prędkość na odcinku o długości 60 m. Analogiczna odległość dla 48 km/h wynosi 25 m. Przyjąć, że czas reakcji kierowcy, podczas którego przyspieszenie jest równe zeru, i przyspieszenie po użyciu hamulców są jednakowe dla obu prędkości. Obliczyć (a) czas reakcji kierowcy i (b) przyspieszenie.

Paragraf 3-9

29. Zależność położenia punktu materialnego poruszającego się wzdłuż osi x od czasu dana jest równaniem

$$x = at^2 - bt^3,$$

gdzie x jest mierzone w m, a t w s. (a) Jakie powinny być wymiary i jednostki stałych a i b ? Przyjmijmy, że liczbowe wartości tych stałych wynoszą odpowiednio 3,0 i 1,0. (b) Po jakim czasie punkt osiągnie maksymalną odległość w kierunku dodatnim osi x . (c) Jaka będzie całkowita długość drogi przebytej przez punkt w ciągu pierwszych 4,0 s? (d) Jakie jest przemieszczenie punktu po upływie tych 4,0 s? (e) Jaka jest prędkość punktu po upływie każdej z pierwszych czterech sekund?

Odp.: (a) a : LT⁻² m/s²; b LT⁻³ m/s³; (b) $t = 2$ s. (c) 24 m. (d) -16 m. (e) 3,0; 0,0; -9,0; -24,0 m/s.

Paragraf 3-11

30. (a) Z jaką prędkością należy rzucić piłkę pionowo do góry, aby osiągnęła ona wysokość 15 m? (b) Jak długo piłka będzie znajdowała się w powietrzu?

31. Piłka tenisowa spada na podłogę z wysokości 1,2 m i odbiła się na wysokość 0,9 m. Jakie było średnie przyspieszenie piłki w czasie jej zetknięcia z podłogą, jeżeli czas zetknięcia wynosił 0,010 s?

Odp.: 900 m/s².

32. Osoba stojąca na moście nad autostradą, myśli o Izaaku Newtonie i nieopatrznie upuszcza jabłko

przez balustradę, właśnie w momencie, gdy przód ciężarówki wjeżdża pod most. Jeśli pojazd porusza się z prędkością 55 km/h i jego długość wynosi 12 m, to na jakiej wysokości nad ciężarówką musi być balustrada, aby jabłko upadło zaraz za tyłem ciężarówki?

33. Z trampoliny znajdującej się 5 m nad wodą kula ołowiana służąca do sondowania głębokości została wpuszczona do jeziora. Uderza ona w wodę z pewną prędkością, a następnie opada na dno z tą samą stałą prędkością i zatrzymuje się po upływie 5,0 s od chwili upuszczenia. (a) Jak głębokie jest jezioro? (b) Jaka jest średnia prędkość kuli? (c) Przypuśćmy, że cała woda została wypuszczona z jeziora, a kulę rzucono z trampoliny w ten sposób, że spadła ona na dno również po upływie 5,0 s. Jaka musiałaby być w tym przypadku prędkość początkowa kuli?

Odp.: (a) 40 m; (b) 9 m/s; (c) 16 m/s do góry.

34. Rakieta wyrzeland pionowo do góry porusza się ze stałym przyspieszeniem $19,6 \text{ m/s}^2$ w ciągu 1 min. Po upływie tego czasu paliwo rakietę wyczerpuje się i dalej porusza się ona jak ciało rzucone swobodnie. (a) Jaką maksymalną wysokość osiągnie rakieta? (b) Ile czasu upłynie od chwili startu rakietę do chwili, gdy uderzy ona w Ziemię?

35. Z balonu wznoszącego się do góry z prędkością 12 m/s, na wysokości 80 m nad Ziemią upuszczono paczkę. Po jakim czasie paczka upadnie na Ziemię?

Odp.: 5,4 s.

36. Z mostu znajdującego się na wysokości 44 m nad wodą upuszczono kamień. Inny kamień rzucono pionowo w dół w sekundę potem. Oba kamienie uderzają w powierzchnię wody w tej samej chwili. (a) Jaka była prędkość początkowa drugiego kamienia? (b) Zrobić wykres zależności prędkości od czasu dla każdego z tych kamieni, przyjmując, że pierwszy kamień upuszczono w chwili równej zeru.

37. Winda bez sufitu wznosi się ze stałą prędkością v (10 m/s). Piłka jest podrzucona do góry przez chłopca znajdującego się w windzie, gdy winda jest na wysokości h (31 m) nad podłożem. Prędkość początkowa piłki względem windy wynosi v_0 (20 m/s). (a) Jaka jest maksymalna wysokość osiągnięta przez piłkę? (b) Po jakim czasie piłka wróci do windy?

Odp.: (a) 76 m; (b) 4 s.

38. Wyrzelando prosto do góry strzałę z prędkością początkową 75 m/s. Jeżeli strzałę uderzając w podłoże zagłębia się w nie na 15 cm, znaleźć (a) przyspieszenie (przyjąć stałe) konieczne do zatrzymania strzały i (b) czas, w którym wytraci ona swą prędkość. Pominąć opór powietrza podczas lotu strzały.

39. Wyskoczywszy z samolotu skoczek spadochronowy spadał 50 m nie napotykając na żaden opór. Gdy spadochron otworzył się, ruch jego był hamowany z przyspieszeniem $2,0 \text{ m/s}^2$. W chwili zetknięcia z ziemią skoczek miał prędkość 3,0 m/s. (a) Jak długo skoczek znajdował się w powietrzu? (b) Na jakiej wysokości wyskoczył on z samolotu?

Odp.: (a) 17 s; (b) 290 m.

40. Z działa wyrzelando pionowo do góry pocisk, w tej samej chwili zaczyna wznosić się pionowo nad Ziemią rakieta o napędzie spalinowym. Przyjmując, że pocisk opuszcza dział, a rakieta Ziemię w chwili $t = 0$, zrobić jakościowe wykresy (nie podając danych liczbowych) przedstawiające zależność czasową a , v , oraz y dla obu ciał, aż do chwili, gdy pocisk i rakieta wrócą na Ziemię. Pominąć opór powietrza. Założyć, że kierunek do góry jest dodatni, a w dół ujemny.

41. Ciało początkowo spoczywające, spada swobodnie, przebywając w ciągu ostatniej sekundy połowę swojej całkowitej drogi. Znaleźć (a) wysokość, z jakiej spadło to ciało oraz (b) czas spadania. (c) Wyjaśnić, dlaczego ze względów fizycznych odrzucamy jedno z rozwiązań równania kwadratowego na czas.

Odp.: (a) 57 m; (b) 3,4 s.

42. Dwa ciała spadają swobodnie z prędkością początkową równą zeru, z tej samej wysokości w odstępie jednej sekundy. Po jakim czasie od upuszczenia pierwszego ciała odległość między oboma ciałami będzie wynosiła 10 m?

43. Z dachu budynku spadła stalowa kula (z prędkością początkową równą zeru). Obserwator stojący koło okna o wysokości 1,2 m stwierdził, że kula minęła okno w czasie $1/8 \text{ s}$. Po pewnym czasie kula upadła na poziomy chodnik, odbiła się od niego idealnie sprężyście i po upływie 2 s ponownie pojawiła się koło parapetu okna. Jaka jest wysokość budynku? (Po idealnie sprężystym zderzeniu prędkość kuli w dowolnym punkcie przy wznoszeniu jest taka sama jak przy spadaniu.)

Odp.: 20,4 m.

44. Krople wody z prysznicza spadają w regularnych odstępach czasu na podłogę znajdującą się 180 cm pod nim, przy czym pierwsza kropla uderza o podłogę w chwili, gdy czwarta zaczyna spadać. Znaleźć położenie pozostałych kropel w chwili, gdy pierwsza kropla uderza o podłogę.

45. Winda wznosi się do góry z przyspieszeniem, $1,2 \text{ m/s}^2$. W momencie, gdy jej prędkość wynosi $2,4 \text{ m/s}$, obluźwana śruba spada z sufitu windy. Winda ma $2,7 \text{ m}$ wysokości. Obliczyć (a) czas, po jakim śruba spadnie z sufitu na podłogę i (b) odległość, którą pokona śruba względem ścian domu.

Odp.: (a) $0,71 \text{ s}$; (b) $0,69 \text{ m}$.

46. Pies siedzący w głębi pokoju widzi przedmiot przelatujący za oknem do góry, a następnie spadający w dół. Okno ma wysokość $1,5 \text{ m}$, a całkowity czas, w jakim przedmiot znajduje się w polu widzenia, wynosi 1 s . Obliczyć, na jaką wysokość ponad okno wzniósł się ten przedmiot?