

19. Fale w ośrodkach sprężystych

19-1. Fale mechaniczne

Ruch falowy jest zjawiskiem, z którym stykamy się niemal w każdej gałęzi fizyki. Wszyscy dobrze znamy fale na powierzchni wody. Istnieją również fale dźwiękowe, a także fale świetlne, fale radiowe oraz inne fale elektromagnetyczne. Jedną z teorii mechaniki atomów i cząstek elementarnych nosi nazwę *mechaniki falowej*. Widzimy więc, że własności i zachowanie się fal są ważnym przedmiotem zainteresowania fizyków.

W tym oraz następnym rozdziale skupimy naszą uwagę na falach powstających w ośrodkach sprężystych. Fale te, których przykładem są fale dźwiękowe rozchodzące się w powietrzu, nazywamy *falami mechanicznymi*. Powstają one w wyniku wychylenia jakiegoś fragmentu ośrodka sprężystego z normalnego położenia, będącego położeniem równowagi, co w następstwie powoduje drgania fragmentu wokół tego położenia. Dzięki sprężystym właściwościom ośrodka drgania te są przekazywane kolejno do coraz dalszych jego części i w ten sposób zaburzenie, inaczej mówiąc fala, przechodzi przez cały ośrodek. Należy tu podkreślić, że sam ośrodek, jako całość, nie przesuwa się wraz z falą; różne jego części wykonują jedynie drgania w ograniczonych obszarach przestrzeni. Na przykład, w przypadku fal na powierzchni wody, pływające na tej powierzchni małe przedmioty, takie jak kawałek korka, wskazują, że rzeczywiste ruchy cząsteczek wody polegają na niewielkich wychyleniach do góry i na dół, a także w przód i w tył. Natomiast same fale przesuwały się ruchem jednostajnym. Gdy dobiegną one do pływającego przedmiotu, wprawiają go w ruch, przekazując mu tym samym energię*. W ten sposób energia może być przekazywana za pośrednictwem ruchu falowego na znaczne odległości. Energia fal — to kinetyczna i potencjalna energia cząstek materii. Przenoszenie energii odbywa się drogą przekazywania jej kolejno do coraz to dalszych części ośrodka, a nie przez długozasięgowy ruch samej materii. Cechą charakterystyczną fal mechanicznych jest więc to, że przenoszą one energię poprzez materię dzięki przesuwaniu się zaburzenia w tej materii, a nie na skutek postępowego ruchu samej materii.

Do rozchodzenia się fal mechanicznych niezbędny jest ośrodek materialny. Natomiast do przenoszenia fal elektromagnetycznych taki ośrodek nie jest potrzebny; na przykład, światło gwiazd biegnie swobodnie przez prawie próżną przestrzeń międzygwiazdową.

* Patrz artykuł: Willard Bascom, Ocean Waves, *Scientific American*, August 1959.

Właściwościami ośrodka decydującymi o prędkości rozchodzenia się w nim fal są (o czym przekonamy się w paragrafie 19-5) jego bezwładność i sprężystość. Wszystkie ośrodki materialne, włączając w to takie ośrodki jak powietrze i woda, ale także takie jak stal, mają te właściwości i w związku z tym mogą przenosić fale. Czynnikiem, który powoduje pojawienie się sił przywracających stan pierwotny, gdy jakaś część ośrodka zostanie wychylona z położenia równowagi, jest właśnie sprężystość, natomiast bezwładność jest cechą, która decyduje o tym, jak będzie się zachowywała wychylona część ośrodka pod działaniem tych sił. Oba te czynniki łącznie określają prędkość fali.

19-2. Rodzaje fal

Mówiąc o falach na wodzie, falach świetlnych oraz falach dźwiękowych, jako przykładach ruchu falowego, rozróżniamy je na podstawie najbardziej rzucających się w oczy cech fizycznych. Znamy również inne sposoby klasyfikacji fal.

Fale możemy rozróżniać obserwując, jaki kąt tworzy kierunek ruchu cząstek materii z kierunkiem rozchodzenia się samych fal. Gdy ruchy cząstek materii przenoszącej falę są prostopadłe do kierunku rozchodzenia się tej fali, wówczas mamy do czynienia z falą *poprzeczną*. Na przykład, gdy jeden koniec pionowej, napiętej liny wprawiamy w drgania, poruszając nim w prawo i w lewo, wtedy wzdłuż liny przebiega fala poprzeczna; zaburzenie porusza się wzdłuż liny, natomiast cząstki liny drgają prostopadłe do kierunku rozchodzenia się tego zaburzenia (rys. 19-1a).

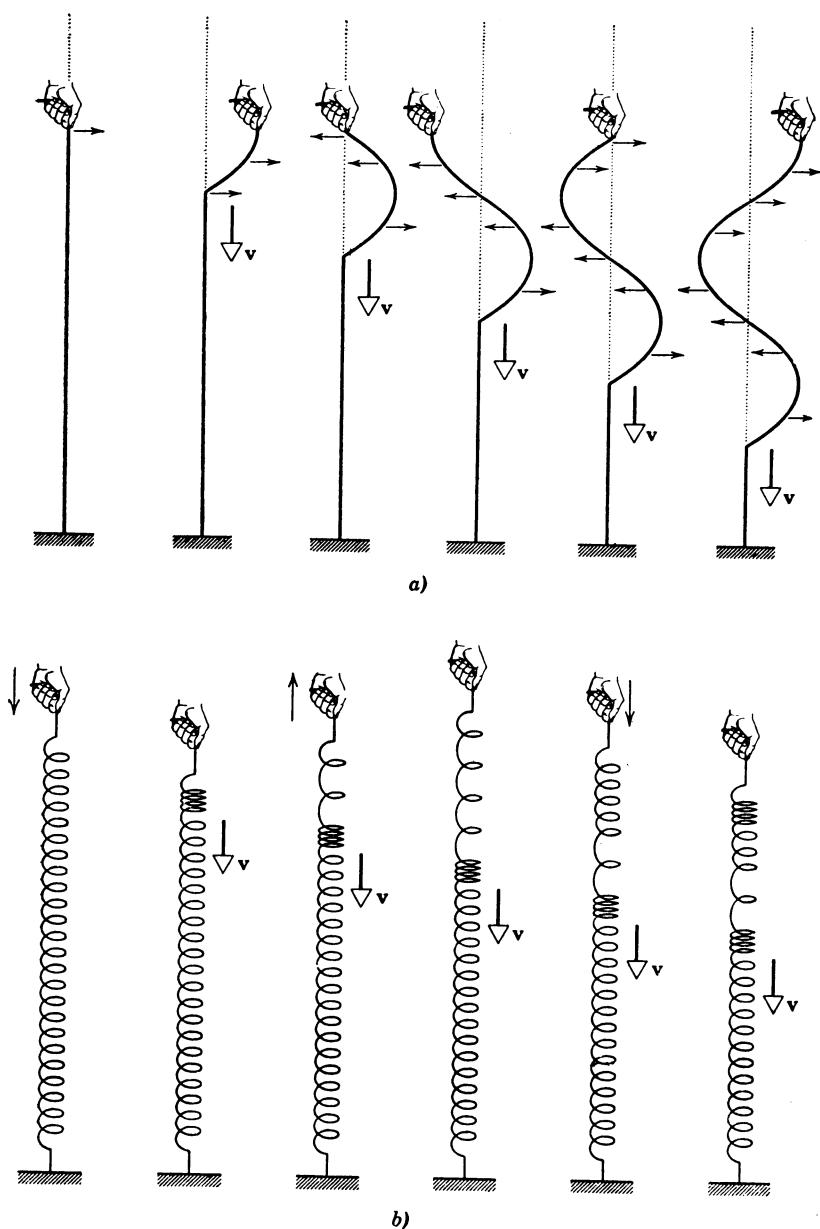
Fale świetlne nie są falami mechanicznymi. Przemieszczające się zaburzenie nie jest tu związane z ruchem materii, lecz ze zmianami natężenia pola elektromagnetycznego (rozdział 41). Jednak ze względu na to, że kierunki pola elektrycznego i magnetycznego są prostopadłe do kierunku rozchodzenia się światła, fale świetlne są również falami poprzecznymi.

Jeżeli cząstki przenoszące falę mechaniczną poruszają się do przodu i do tyłu wzdłuż kierunku rozchodzenia się fali, wówczas mamy do czynienia z falą *podłużną*. Na przykład, gdy pionową, napiętą sprężynę na przemian rozciągamy i ściskamy na jednym końcu, wówczas wzdłuż sprężyny rozchodzi się fala podłużna; poszczególne zwoje sprężyny oscylują do góry i na dół — wzdłuż kierunku ruchu zaburzenia (rys. 19-1b). Falami podłużnymi są np. fale dźwiękowe w ośrodku gazowym, omawiane dokładnie w rozdziale 20.

Niektóre fale nie są ani wyłącznie poprzeczne, ani wyłącznie podłużne. Na przykład, w falach na powierzchni wody cząsteczki wody poruszają się zarówno do góry i na dół, jak i do przodu i do tyłu, zakreślając tory eliptyczne, podczas rozchodzenia się fali.

Można również rozróżniać fale jedno-, dwu- oraz trójwymiarowe, w zależności od liczby wymiarów niezbędnych do opisu kierunku rozchodzenia się energii. Fale biegnące wzdłuż liny lub sprężyny z rys. 19-1, są jednowymiarowe. Fale powierzchniowe, albo zmarzszki na wodzie, wywołane np. wrzuceniem kamienia do spokojnego stawu, są dwuwymiarowe. Fale dźwiękowe oraz fale wybiegające radialnie z małego źródła są trójwymiarowe.

Jeszcze inna jest klasyfikacja fal ze względu na zachowanie się cząstek materii przenoszącej falę w okresie czasu, w którym ta fala rozchodzi się w ośrodku. Możemy na przykład wytworzyć *impuls* przebiegający wzdłuż napiętej liny, odchylając jeden raz w bok

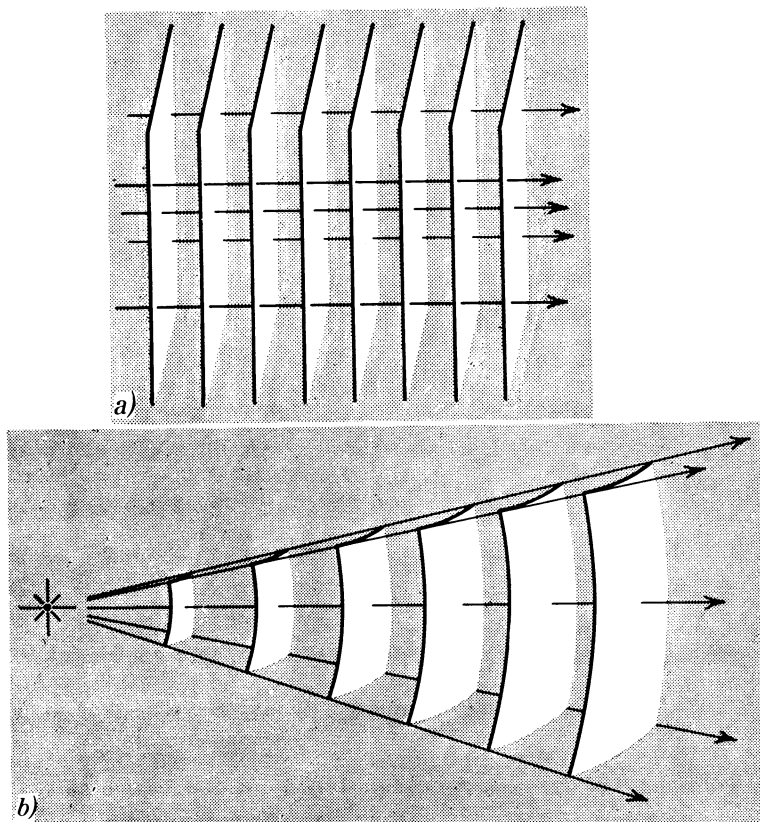


Rys. 19-1. W przypadku fali poprzecznej cząsteczki ośrodka (napiętej liny) drgają w kierunku prostopadłym do kierunku rozchodzenia się samej fali. (b) W przypadku fali podłużnej punkty materialne ośrodka (rozciągniętej sprężyny) drgają w tym samym kierunku, w jakim rozchodzi się fala

koniec tej liny. Każda cząstka liny pozostaje w spoczynku dopóty, dopóki nie dobiegnie do niej impuls; następnie porusza się przez krótki czas, i ostatecznie znów osiąga stan bezruchu. Jeżeli wielokrotnie wychylamy koniec liny na przemian w obie strony (rys. 19-1a), to wytwarzamy *ciąg fal* poruszających się wzdłuż liny. Jeżeli nasze ruchy są periodyczne, to tworzymy *periodyczny ciąg falowy*, w którym każda cząsteczka liny porusza się

okresowo. Najprostszym specjalnym przypadkiem fali periodycznej jest *fala harmoniczna prosta*, która pobudza cząstki do drgań harmoniczných prostych.

Rozważmy impuls trójwymiarowy. Możemy wyobrazić sobie powierzchnię łączącą wszystkie punkty przestrzeni, w których w danej chwili zaburzenia są takie same. Powierzchnia ta przesuwa się w miarę upływu czasu; jej ruch obrazuje sposób rozchodzenia się impulsu. Analogiczne powierzchnie można wprowadzić dla następnych impulsów. Uogólniając to postępowanie dla dowolnej fali periodycznej, wprowadzamy powierzchnie, których wszystkie punkty mają tę samą fazę drgań. Powierzchnie takie nazywamy *powierzchniami falowymi* albo *czołami fali*. Gdy ośrodek jest jednorodny i izotropowy, kierunki rozchodzenia się fali są wszędzie prostopadłe do czoła fali. Każdą linię prostą prostopadłą do czoła fali i wskazującą kierunek ruchu fali nazywamy *promieniem fali*.



Rys. 19-2. (a) Fala płaska. Płaszczyzny reprezentują powierzchnie falowe (czoła fali) odległe od siebie o długość fali; strzałkami oznaczono promienie fali. (b) Fala kulista. Promienie fali układają się radialnie, a powierzchnie falowe, odległe od siebie o długość fali, tworzą wycinki powłok sferycznych. Daleko od źródła małe fragmenty powierzchni falowych stają się prawie płaskie

Powierzchnie falowe mogą mieć różne kształty. Jeżeli zaburzenie rozchodzi się tylko w jednym kierunku, fala jest nazywana *falą płaską*. W danej chwili we wszystkich punktach dowolnie wybranej płaszczyzny prostopadłej do kierunku rozchodzenia się tej fali warunki są takie same. Powierzchnie falowe są płaszczyznami, a promienie fali liniami prostymi równoległymi do siebie (rys. 19-2a). Innym przykładem fali jest *fala kulista*. Tutaj zabu-

zenie rozchodzi się we wszystkich kierunkach wychodzących z punktu będącego źródłem fali. Powierzchnie falowe są teraz kulami, a promienie fali — liniami prostymi wybiegającymi ze źródła we wszystkich kierunkach (rys. 19-2b). Daleko od źródła krzywizna kulistych powierzchni jest bardzo mała, tak że w ograniczonym obszarze powierzchnie te można uważać za płaskie. Istnieje oczywiście jeszcze wiele innych kształtów powierzchni falowych.

W miarę omawiania zjawisk falowych w fizyce będziemy się odwoływać do wszystkich wymienionych typów fal. W tym rozdziale dla zilustrowania ogólnych właściwości fal posłużymy się opisem poprzecznej fali wytworzonej na sznurze. W następnym rozdziale poznamy konsekwencje tych właściwości w odniesieniu do dźwięku jako mechanicznej fali podłużnej. Dalej omówimy właściwości fal niemechanicznych, takich jak światło czy fale materii.

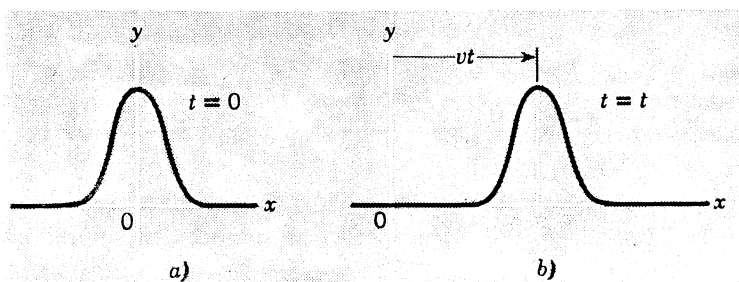
19-3. Fale rozchodzące się w przestrzeni

Rozważmy długi sznur, naciągnięty w kierunku osi x , wzdłuż którego biegnie fala poprzeczna. W pewnej chwili czasu, powiedzmy w chwili $t = 0$, kształt sznura można opisać wzorem

$$y = f(x), \quad t = 0, \quad (19-1)$$

gdzie y jest przemieszczeniem poprzecznym sznura w punkcie x . Na rysunku 19-3a przedstawiony jest jeden z możliwych kształtów fali (impuls) na sznurze w chwili $t = 0$. Doświadczenie wykazuje, że w miarę upływu czasu fala biegnie wzdłuż sznura bez zmiany swego kształtu, jeśli tylko wewnętrzne straty na tarcie są dostatecznie małe. Po czasie t fala przesuwa się na odległość vt w prawo, gdzie v jest stałą wartością prędkości rozchodzenia się fali. Zatem po czasie t równanie krzywej ma postać następującą:

$$y = f(x - vt), \quad t = t. \quad (19-2)$$



Rys. 19-3. (a) Kształt sznura (w tym przypadku impulsu na sznurze) w chwili $t = 0$. W chwili późniejszej t impuls przesunął się w prawo na odległość $x = vt$

Daje ono taki sam kształt fali w punkcie $x = vt$ w chwili t , jaki był kształt tej fali w punkcie $x = 0$ w chwili $t = 0$ (rys. 19-3b). Równanie (19-2) jest ogólnym równaniem fali *dowolnego* kształtu, *biegnącej w prawo*. Dla opisanego jakiegoś wybranego kształtu musimy dokładnie określić funkcję f^* .

* Kiedy mówimy, że „ y jest funkcją $(x - vt)$ ”, rozumiemy przez to, że zmienne x i t występują tylko w kombinacji $x - vt$. Na przykład, $\sin k(x - vt)$, $\log(x - vt)$ albo $(x - vt)^3$ są funkcjami $x - vt$, natomiast $x^2 - vt^2$ nie jest.

Przyjrzyjmy się teraz uważnie temu równaniu. Jeżeli chcemy śledzić wybraną część (czyli określoną fazę) fali w miarę upływu czasu, to musimy na podstawie równania zbadać zachowanie się w czasie określonej wartości zmiennej y (np. szczytu impulsu). Matematycznie znaczy to, że badamy, jak x zmienia się w czasie, przy zachowaniu szczególnej, ustalonej wartości dla $(x - vt)$. Widzimy natychmiast, że gdy t rośnie, również x musi wzrastać, aby $(x - vt)$ pozostało nie zmienione. Zatem równanie (19-2) rzeczywiście reprezentuje falę biegnącą w prawo (x wzrasta z biegiem czasu). Jeżeli chcemy opisać *falę biegnącą w lewo*, musimy napisać

$$y = f(x + vt), \quad (19-3)$$

ponieważ tutaj położenie x ustalonej fazy $(x + vt)$ fali maleje, w miarę jak czas rośnie. Prędkość przemieszczania się określonej fazy można łatwo obliczyć. Dla wybranej fazy fali biegnącej w prawo żądamy, aby

$$x - vt = \text{const.}$$

Różniczkowanie względem czasu daje

$$\frac{dx}{dt} - v = 0, \quad \text{czyli} \quad \frac{dx}{dt} = v, \quad (19-4)$$

co znaczy, że v jest istotnie *prędkością fazową** fali. Dla fali biegnącej w lewo otrzymujemy w ten sam sposób $-v$ jako jej prędkość fazową.

Z ogólnego równania można wyciągnąć dalsze wnioski. Zauważmy że w dowolnej ustalonej chwili czasu t równanie przedstawia y jako funkcję x . Zależność ta określa krzywą opisującą kształt sznura w danej chwili czasu. Przypuśćmy teraz, że chcemy skupić uwagę na określonym punkcie sznura, tzn. na określonej wartości x . Wtedy równanie daje nam y jako funkcję czasu t . Opisuje ona zmianę poprzecznego wychYLENIA danego punktu sznura z biegiem czasu.

Wszystkie przytoczone dotychczas rozważania są słuszne zarówno dla fal podłużnych, jak i poprzecznych. Odpowiednim przykładem fali podłużnej jest prosta rura wypełniona gazem, w której falą (lub impulsem) jest zmiana ciśnienia przesuwająca się wzdłuż rury. Takie samo rozumowanie prowadzi do zależności mającej postać równania (19-2) lub (19-3), opisującej w tym wypadku zmiany ciśnienia w funkcji czasu we wszystkich punktach rury (zob. paragraf 20-3).

Rozważmy teraz fale o szczególnym kształcie, których znaczenie wkrótce stanie się jasne. Przypuśćmy, że w chwili $t = 0$ mamy ciąg fal wzdłuż sznura, opisany równaniem

$$y = y_m \sin \frac{2\pi}{\lambda} x. \quad (19-5)$$

Kształt takiej fali jest sinusoidalny (rys. 19-4). Maksymalne wychYLENIE y_m jest *amplitudą* sinusoidy. Wartość wychYLENIA poprzecznego y jest taka sama w punktach x , $x + \lambda$, $x + 2\lambda$, itd. Wielkość λ nosi nazwę *dlugości fali* danego ciągu falowego i reprezentuje odległość między dwoma najbliższymi punktami przestrzeni, w których fala ma tę samą fazę. Niech

* W zaburzeniach, które można przedstawić jako grupę fal, energia może być przenoszona z prędkością różną od prędkości fazowej każdej z fal składowych. Prędkość ta, zwana prędkością grupową, zostanie omówiona w rozdziale 41 t. II w związku z falami elektromagnetycznymi. Do tego czasu przez prędkość fali będziemy rozumieli jej prędkość fazową.

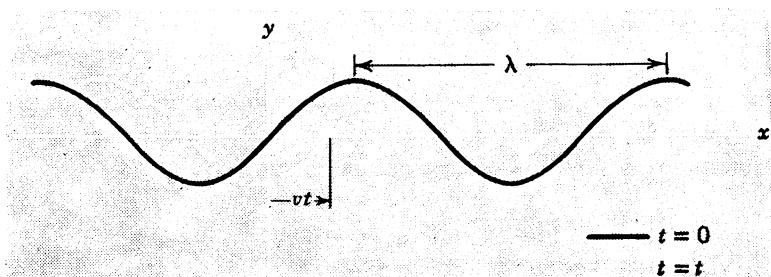
z biegiem czasu fala przesuwa się w prawo z prędkością fazową v . Równanie fali ma teraz postać

$$y = y_m \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt). \quad (19-6)$$

Widzimy, że jest to równanie fali biegnącej [zob. równanie (19-2)].

Okres T jest czasem, w którym fala przebiega odległość równą jednej długości fali, λ , a więc

$$\lambda = vT. \quad (19-7)$$



Rys. 19-4. W chwili $t = 0$ sznur ma kształt $y = y_m \sin 2\pi x / \lambda$ (linia ciągła). W chwili późniejszej t fala sinusoidalna przebiegła w prawo odległość $x = vt$ i sznur ma kształt opisany równaniem $y = y_m \sin 2\pi (x - vt) / \lambda$

Podstawiając tę zależność do równania fali otrzymujemy

$$y = y_m \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right). \quad (19-8)$$

Z tej postaci równania widać, że w danej chwili y ma takie same wartości dla $x + \lambda$, $x + 2\lambda$ itd., jak dla x oraz że, w danym miejscu, y przybiera takie same wartości w chwilach $T + t$, $t + 2T$ itd., jak w chwili t .

W celu nadania równaniu (19-8) bardziej zwartej formy, wprowadzamy dwie nowe wielkości, *liczbę falową* k oraz *częstość kołową* ω [zob. równanie (15-12)]. Są one zdefiniowane następująco:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{oraz} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (19-9)$$

Posługując się nimi można równaniu fali sinusoidalnej przesuwającej się w prawo nadać postać:

$$y = y_m \sin(kx - \omega t). \quad (19-10a)$$

Dla fali sinusoidalnej przesuwającej się w lewo mamy

$$y = y_m \sin(kx + \omega t). \quad (19-10b)$$

Porównując zależności (19-7) i (19-9) widzimy, że prędkość fazowa v fali jest dana wzorem

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}. \quad (19-11)$$

Przy formułowaniu równań (19-10a) i (19-10b) założyliśmy, że wychylenie y jest równe zeru dla $x = 0$ i $t = 0$. Nie jest to oczywiście konieczne. Najogólniejszym wyrażeniem dla fali sinusoidalnej przesuwającej się w prawo jest równanie

$$y = y_m \sin(kx - \omega t - \varphi),$$

gdzie φ jest nazywane *stałą fazową* lub *fazą początkową*. Jeżeli na przykład $\varphi = -90^\circ$, wychylenie y dla $x = 0$ i $t = 0$ wynosi y_m . W tym szczególnym przypadku

$$y = y_m \cos(kx - \omega t),$$

ponieważ funkcja cosinus jest przesunięta względem funkcji sinus o 90° .

Jeżeli skupimy uwagę na określonym punkcie sznura, np. $x = \pi/k$, to wychylenie y w tym punkcie można zapisać* jako

$$y = y_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Jest to równanie podobne do równania (15-29) dla ruchu harmonicznego prostego. Tak więc każdy element sznura, w czasie przebiegania przez sznur ciągu fal, drga ruchem prostym harmonicznym wokół swego położenia równowagi.

19-4. Zasada superpozycji

Doświadczalnie ustalono niezbicie, że *dwie (albo więcej) fale mogą przebiegać ten sam obszar przestrzeni niezależnie od siebie*. To, że fale biegną niezależnie jedna od drugiej oznacza, że przemieszczenie dowolnej cząstki w ustalonej chwili czasu jest po prostu sumą przemieszczeń, które wywoływałyby poszczególne fale. Ten proces wektorowego dodawania przemieszczeń nazywamy *superpozycją*. Gdy na przykład fale radiowe o różnych częstościach przebiegają przez antenę radiową, prądy elektryczne wywołane w antenie przez działanie wszystkich tych fal są bardzo złożone. Mimo to możemy dostroić odbiornik do wybranej stacji, a sygnał odbierany będzie na ogół taki sam, jak ten, który moglibyśmy otrzymać, gdyby inne stacje przestały w tym czasie nadawać. Podobnie, słuchając orkiestry możemy słyszeć dźwięki grane przez poszczególne instrumenty, pomimo że fala dźwiękowa dobiegająca do naszych uszu jest bardzo złożona.

Dla fal w ośrodkach odkształcalnych zasada superpozycji jest spełniona wszędzie tam, gdzie matematyczna zależność między odkształceniami i siłą przywracającą stan równowagi jest relacją proporcjonalności. Zależność taka jest matematycznie wyrażana przy pomocy równania liniowego. Dla fal elektromagnetycznych stosowalność zasady superpozycji jest związana z liniową postacią związków pomiędzy polem elektrycznym i magnetycznym.

Ponieważ zasada superpozycji wydaje się prawem oczywistym, warto może zwrócić uwagę na to, że nie zawsze można ją stosować. Przestaje ona np. obowiązywać, gdy równania rządzące ruchem falowym nie są liniowe. Z fizycznego punktu widzenia zdarza się to wtedy, gdy zaburzenie falowe jest stosunkowo duże i nie można stosować zwykłych liniowych praw mechaniki, na przykład poza obszarem stosowalności prawa Hooke'a, gdy nie można już posługiwać się zależnością $F = -kx$.

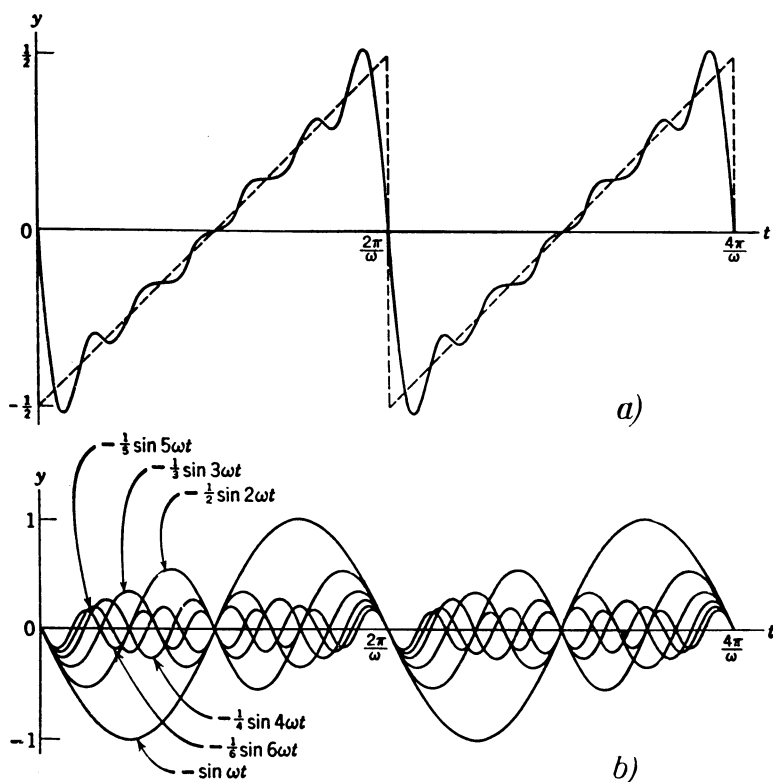
Rozpatrzmy dziedzinę zjawisk akustycznych. Gwałtowne eksplozje wywołują fale uderzeniowe. Fale uderzeniowe, choć są podłużnymi falami sprężystymi, zachowują się inaczej niż zwykłe fale dźwiękowe. Równanie opisujące ich propagację jest równaniem kwadratowym i zasada superpozycji nie ma tu zastosowania. Odbierając dwa bardzo głośne tony, ucho słyszy coś więcej niż te dwa tony. Ci, którzy mają do

* Korzystając z tego, że $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$.

czynienia z urządzeniami „Hi-Fi” (urządzenia o wysokiej wierności odtwarzania), wiedzą, że gdy układ przestaje przetwarzać tony liniowo, pojawiają się tzw. zniekształcenia intermodulacyjne, i że zniekształcenia te staną się tym większe, im większa jest amplituda tonów. Bardziej znanym przykładem fizycznym są fale na powierzchni wody. Zmarszczki na wodzie nie mogą rozchodzić się niezależnie po powierzchni fali przybojowej, natomiast po powierzchni łagodnych fal przebiegają nie zniekształcone.

Doniosłą konsekwencją zasady superpozycji, tam gdzie ona obowiązuje, jest możliwość rozłożenia skomplikowanych ruchów falowych na kombinację prostych fal. I rzeczywiście, jak wykazał francuski matematyk J. Fourier (1768—1830), do opisu najbardziej ogólnych postaci fal periodycznych wystarczą proste fale harmoniczne. Fourier wykazał, że dowolny periodyczny ruch cząstki może być przedstawiony w postaci kombinacji liniowej ruchów harmonicznym prostych. Jeżeli na przykład $y(t)$ reprezentuje ruch źródła o okresie T , możemy przedstawić $y(t)$ w postaci:

$$y(t) = A_0 + A_1 \sin \omega t + A_2 \sin 2\omega t + A_3 \sin 3\omega t + \dots + \\ + B_1 \cos \omega t + B_2 \cos 2\omega t + B_3 \cos 3\omega t + \dots,$$



Rys. 19-5. (a) Linia przerywana przedstawia falę o kształcie zębów piły, z jaką często spotykamy się w elektronice. Można ją opisać wzorami $y(t) = (\omega/2\pi)t - \frac{1}{2}$ dla $0 < t < 2\pi/\omega$, $y(t) = (\omega/2\pi)t - \frac{3}{2}$ dla $2\pi/\omega < t < 4\pi/\omega$, itd. Funkcję tę opisuje szereg Fouriera $y(t) = (1/\pi)[- \sin \omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t - \frac{1}{3} \sin 3\omega t - \dots]$. Linia ciągła przedstawia sumę pierwszych sześciu wyrazów szeregu. Można uważać, że przybliża ona całkiem dobrze linię zębów piły; większe odchylenia występują jedynie w obszarze zmian skokowych. Gdy uwzględnia się coraz więcej wyrazów tego szeregu, wówczas aproksymacja staje się coraz lepsza. (b) Pokazano tu sześć pierwszych wyrazów szeregu Fouriera, które po dodaniu prowadzą do krzywej ciągłej z rysunku (a)

gdzie $\omega = 2\pi/T$. Wyrażenie to nosi nazwę szeregu Fouriera. Liczby A_i i B_i są stałymi mającymi określone wartości dla każdego zadanego ruchu $y(t)$. (Patrz np. rys. 19-5). Gdy ruch nie jest periodyczny, jak w przypadku pojedynczego impulsu, suma zostaje zastąpiona całką, tzw. całką Fouriera. Tak więc dowolny ruch źródła fal można przedstawić w formie kombinacji ruchów harmoniczných prostych. Ponieważ ruch źródła wytwarza fale, nic więc dziwnego, że same fale mogą być rozpatrywane jako kombinacje prostych fal harmoniczných. W tym zawiera się doniosłość roli, jaką odgrywa ruch harmoniczny prosty i proste fale harmoniczne.

Jeżeli sprężystość ośrodka jest taka, że (dla fal mechaniczných) prawo Hooke'a nie jest dokładnie spełnione, wówczas impuls wytworzony na końcu naprężonego sznura może zmieniać swój kształt w miarę przesuwania się wzdłuż tego sznura. Chociaż każda ze składowych fal harmoniczných rozchodzi się bez zmiany kształtu, prędkości tych składowych są teraz różne dla różnych częstości (długości fal). Zjawisko to jest nazywane *dyspersją*, a o ośrodku mówimy, że jest *dyspersyjny* dla fali rozważanego typu. Rezultatem omawianego zjawiska może być zmiana kształtu impulsu oraz zależność prędkości impulsu od szczegółów jego kształtu początkowego. Przykładami sytuacji, w których nie mamy do czynienia z dyspersją jest rozchodzenie się fal mechaniczných wzdłuż idealnego (doskonale giętkiego) naprężonego sznura oraz rozchodzenie się fal elektromagnetycznych (w tym fal świetlných) w próżni. Przykładami sytuacji, w których występuje dyspersja jest rozchodzenie się fal oceanicznych oraz przechodzenie fal świetlných przez ośrodek przezroczysty, taki jak szkło.

Impuls może zmieniać swój kształt jeszcze w innej sytuacji, mianowicie wówczas, gdy występują straty energii mechanicznej na skutek jej oddawania do ośrodka lub jego otoczenia, na przykład z powodu występowania oporu powietrza czy lepkości (tarcia wewnętrznego). Wówczas amplituda fali maleje z czasem i mówimy, że fala jest *gasnąca*.

Chwilowo będziemy zakładać, że ośrodek jest niedyspersyjny i że podczas przechodzenia fali przez ośrodek nie ma dysypacji energii.

19-5. Prędkość fali

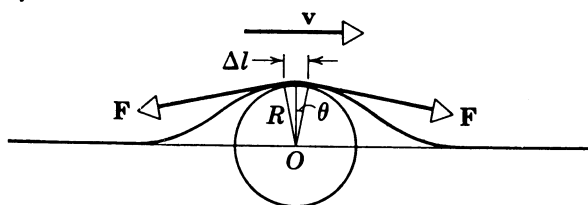
Jeżeli znane są parametry charakteryzujące ośrodek, powinno być możliwe obliczenie prędkości fal z podstawowych zasad mechaniki newtonowskiej. W tym paragrafie będziemy nadal koncentrować uwagę na falach poprzecznych biegnących wzdłuż napiętej liny, a w uzupełnieniu III pokażemy, jak można obliczyć prędkość takich fal w najogólniejszy sposób. Obecnie rozważymy dwa inne podejścia — jedno oparte na analizie wymiarów, a drugie, będące trochę bardziej szczegółową analizą mechaniczną, w trakcie której policzymy prędkość poprzecznego impulsu przebiegającego wzdłuż napiętej liny.

W paragrafie 19-1 ustaliliśmy, że prędkość fal w ośrodku zależy od sprężystości ośrodka i od jego bezwładności. Dla napiętej liny sprężystość jest określona naprężeniem liny F ; im większe jest naprężenie, tym większe będą siły przywracające równowagę, działające na wytrącony z położenia równowagi element liny. Miarą bezwładności jest μ — masa przypadająca na jednostkę długości liny. Zakładając więc, że prędkość fali zależy wyłącznie od F i μ , możemy posłużyć się analizą wymiarów, aby wykazać, w jaki sposób v zależy od tych wielkości. Jeśli za podstawowe wymiary przyjmiemy wymiar masy M , długości L i czasu T , wymiarem siły F będzie MLT^{-2} ; wymiarem μ będzie ML^{-1} . Jedyną kombinacją tych wielkości, dającą prędkość (której wymiarem jest LT^{-1}), jest pierwiastek kwadratowy z F/μ . Tak więc F/μ ma wymiar L^2T^{-2} , a $\sqrt{F/\mu}$ — wymiar LT^{-1} , czyli wymiar prędkości. Analiza wymiarów nie uwzględnia wielkości bezwymiarowych, a więc wynik

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (19-12)$$

może, lecz nie musi być kompletny. Możemy tu co najwyżej stwierdzić, że prędkość fali jest równa $\sqrt{F/\mu}$ pomnożonemu przez stałą bezwymiarową. Wartość stałej można otrzymać albo na drodze analizy mechanicznej problemu, albo z doświadczenia. Metodami tymi stwierdzamy, że stała jest równa jedności i że równanie (19-12) jest poprawne.

Wyprowadźmy teraz wzór na prędkość przemieszczania się impulsu w naprężonej linii, na drodze analizy mechanicznej. Na rysunku 19-6 przedstawiono impuls fali przesuwający się po linii z prawej strony w lewo z prędkością v . Wyobraźmy sobie teraz, że cała linia porusza się w prawo z tą samą prędkością, tak że impuls spoczywa w przestrzeni; cząstki tworzące linę przechodzą wtedy kolejno przez obszar impulsu. Znaczący to, po prostu, że zamiast przyjmować za układ odniesienia ściany, pomiędzy którymi została napięta lin, jako układ ten wybieramy układ poruszający się jednostajnie względem ścian. Ponieważ jednak w zasadach dynamiki Newtona występują tylko przyspieszenia, takie same w obydwu układach, zasadami tymi możemy się posługiwać w każdym z tych układów. W tym przypadku wybraliśmy układ wygodniejszy.



Rys. 19-6. Wyprowadzenie wzoru na prędkość rozchodzenia się fali na podstawie rozważań dotyczących sił działających na odcinek liny o długości Δl

Przyjmijmy, że mały fragment odkształconej liny o długości Δl ma kształt łuku koła o promieniu R , co zaznaczono na rysunku. Ponieważ μ jest masą przypadającą na jednostkę długości liny, czyli zw. gęstością liniową, masa tego elementu wynosi $\mu\Delta l$. Naprężenie F na obu końcach tego małego elementu ma kierunek styczny do liny. Składowe poziome znoszą się, a obie składowe pionowe są równe $F\sin\theta$. Tak więc, całkowita siła pionowa równa jest $2F\sin\theta$. Dzięki temu, że θ jest małe, możemy przyjąć $\sin\theta \cong \theta$

$$2F\sin\theta = 2F\theta = 2F\frac{(\Delta l/2)}{R} = F\frac{\Delta l}{R}.$$

Siła ta wywołuje dośrodkowe przyspieszenie cząstek liny skierowane ku punktowi O . Siła dośrodkowa działająca na masę $\mu\Delta l$, poruszającą się po kole o promieniu R z prędkością v , wynosi $\mu\Delta l v^2/R$ (zob. paragraf 6-3). Zauważmy, że styczna do liny prędkość v elementu masy znajdującego się aktualnie na szczycie łuku jest pozioma i taka sama jest prędkość fazowa impulsu. Przekształcając otrzymane równości otrzymujemy

$$F\frac{\Delta l}{R} = \frac{\mu\Delta l v^2}{R},$$

a stąd

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}.$$

Gdyby amplituda impulsu była bardzo duża w porównaniu z długością liny, nie moglibyśmy stosować przybliżenia $\sin\theta \cong \theta$. Co więcej, naprężenie F liny mogłoby się zmienić w obecności impulsu, a my zakładaliśmy, że F jest takie samo jak w napiętej i nie odkształconej linie. Dlatego też nasze wyniki, podobnie jak zasada superpozycji, są ważne tylko dla względnie małych poprzecznych przemieszczeń w linie. Przykład ten ma jednak bardzo duże zastosowanie w praktyce. Należy jeszcze zauważyć, że ponieważ w wyprowadzeniu nie czyniliśmy żadnych założeń co do konkretnego kształtu impulsu, prędkość fali nie zależy od jej kształtu.

Częstość fali jest oczywiście określona częstością drgań źródła, natomiast prędkość, z jaką fale przebiegają ośrodek, zależy od właściwości ośrodka, o czym już była mowa. Z chwilą gdy częstość ν i prędkość v są określone, długość fali λ jest ustalona. I rzeczywiście, z równania (19-7) i ze związku $v = 1/T$ otrzymujemy

$$\lambda = \frac{v}{\nu}. \quad (19-13)$$

Przykład 1. Na jednym końcu linki wytwarzana jest za pomocą pręta poprzeczna fala sinusoidalna, przy czym koniec linki drga do góry i na dół, a największe jego przemieszczenia wynoszą 0,50 cm. Ruch jest ciągle podtrzymywany i powtarza się regularnie 120 razy na sekundę.

(a) Należy obliczyć prędkość, amplitudę, częstość i długość fali tego ruchu falowego, przyjmując, że gęstość liniowa linki wynosi 0,25 kg/m, a przyłożone napięcie jest równe 90 N.

Koniec linki wychyla się o 0,25 cm z położenia równowagi, najpierw powyżej, a następnie poniżej tego położenia. Tak więc amplituda y_m jest równa 0,50 cm. Cały ruch powtarza się 120 razy w ciągu sekundy, czyli częstość wynosi 120 Hz.

Prędkość fali dana jest wzorem $v = \sqrt{F/\mu}$. Ale $F = 90$ N, a $\mu = 0,25$ kg/cm, więc

$$v = \sqrt{\frac{90 \text{ N}}{0,25 \text{ kg/m}}} = 19 \text{ m/s}.$$

Długość fali określona jest wzorem $\lambda = v/\nu$; na wartość λ otrzymujemy więc

$$\lambda = \frac{19 \text{ m/s}}{120 \cdot 1/s} = 16 \text{ cm}.$$

(b) Napisać równanie fali przy założeniu, że fala porusza się w dodatnim kierunku osi x i że w chwili $t = 0$ koniec linki opisany współrzędną $x = 0$ znajduje się w swoim położeniu równowagi $y = 0$.

Ogólne wyrażenie przedstawiające poprzeczną falę sinusoidalną poruszającą się w dodatnim kierunku osi x ma postać

$$y = y_m \sin(kx - \omega t - \varphi).$$

Nakładając warunek: $y = 0$ w chwili $t = 0$, w punkcie $x = 0$, otrzymujemy

$$0 = y_m \sin(-\varphi),$$

co oznacza, że fazę początkową φ można przyjąć za równą zeru. (Czytelnik powinien pokazać, że taki sam rezultat otrzymuje się przyjmując jako fazę początkową całkowitą wielokrotność π .) Stąd, dla tej fali

$$y = y_m \sin(kx - \omega t);$$

uwzględniając wartości obliczone powyżej

$$y_m = 0,25 \text{ cm},$$

$$\lambda = 16 \text{ cm} \quad \text{albo} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{16 \text{ cm}} = 0,39 \text{ cm}^{-1},$$

$v = 19 \text{ m/s} = 1900 \text{ cm/s}$ albo $\omega = vk = (1900 \text{ cm/s})(0,39 \text{ cm}^{-1}) = 740 \text{ s}^{-1} = 740 \text{ Hz}$,
otrzymujemy równanie fali

$$y = 0,25 \sin(0,39x - 740t),$$

gdzie x i y są wyrażone w centymetrach, a t w sekundach.

Przykład 2. Gdy fala z poprzedniego przykładu rozchodzi się wzdłuż linki, każda cząstka linki wykonuje ruchy do góry i na dół, prostopadle do kierunku ruchu fali. Znaleźć prędkość i przyspieszenie cząstki oddalonej o 62 cm od końca linki.

Ogólna postać tej fali dana jest równaniem

$$y = y_m \sin(kx - \omega t) = y_m \sin k(x - vt).$$

W równaniu tym v jest stałą, poziomą prędkością ciągu falowego. Obecnie zajmiemy się prędkością konkretnej cząstki w linie, przez którą przebiega fala; prędkość ta nie jest ani stała, ani pozioma. Każda cząstka porusza się pionowo, tj. w kierunku osi y . W celu określenia prędkości (którą oznaczymy literą u) cząstki, rozważmy sytuację tej cząstki w wybranym położeniu x , tzn. przy ustalonym x . Zastanówmy się, jak zmienia się wychylenie y cząstki z położenia równowagi w funkcji czasu. Przy x ustalonym otrzymujemy

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -y_m \cos(kx - \omega t).$$

gdzie *pochodną cząstkową* $\partial y / \partial t$ napisano dla podkreślenia, że w ogólności y jest funkcją obu zmiennych x i t ; zakładamy przy tym, że x jest ustalone, a t stanowi aktualnie jedyną zmienną. Przyspieszenie a cząstki dla tej (ustalonej) wartości x wynosi

$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial t} = -y_m \omega^2 \sin(kx - \omega t) = -\omega^2 y.$$

Ponieważ przyspieszenie jest proporcjonalne do wychylenia i ma przeciwny zwrot, każda cząstka, przez którą przechodzi poprzeczna fala sinusoidalna, porusza się prostym ruchem harmonicznym.

Dla fali z przykładu 1, w którym mieliśmy

$$y_m = 0,25 \text{ cm}, \quad k = 0,39 \text{ cm}^{-1}, \quad \omega = 740 \text{ s}^{-1},$$

i dla cząstki leżącej w punkcie $x = 62 \text{ cm}$, otrzymujemy

$$u = -y_m \omega \cos(kx - \omega t),$$

czyli

$$u = -0,25(740) \cos[(0,39)(62) - (740)t] = -185 \cos(24 - 740t)$$

oraz

$$a = -\omega^2 y,$$

czyli

$$a = -(740)^2 0,25 \sin[(0,39)(62) - (740)t] = -13,7 \cdot 10^4 \sin(24 - 740t);$$

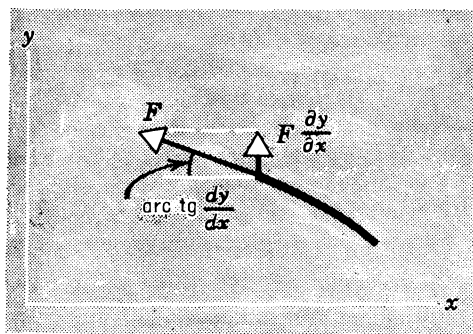
t jest tu wyrażone w sekundach, u w cm/s oraz a w cm/s².

Opiszcie stan ruchu cząstki w chwili $t = 4 \text{ s}$.

19-6. Moc i natężenie w ruchu falowym

Na rysunku 19-7 przedstawiliśmy element napiętej struny (może to być także lina lub sznur) w otoczeniu punktu x , w wybranej chwili czasu t . Składowa *poprzeczna* naprężenia, jaką element leżący na lewo od punktu x działa na element położony po prawej stronie x , wynosi

$$F_{\text{trans}} = -F \frac{\partial y}{\partial x};$$



Rys. 19-7. Składowa poprzeczna naprężenia struny w każdym punkcie x jest równa $F(\partial y/\partial x)$

F jest naprężeniem w strunie; $\partial y/\partial x$ określa tangens kąta, jaki siła F tworzy z kierunkiem poziomym leżącym w płaszczyźnie rysunku. Ponieważ założyliśmy małe wychylenia, możemy przyjąć, że tangens ten jest równy sinusowi. Składowa poprzeczna siły ma zwrot zgodny z kierunkiem wzrostu y ; na rysunku nachylenie krzywej jest ujemne, a więc siła poprzeczna jest dodatnia. Prędkość poprzeczna cząstki w punkcie x wynosi $\partial y/\partial t$, i może być zarówno dodatnia, jak i ujemna. Moc w punkcie x , czyli energia przechodząca przez punkt x w jednostce czasu w dodatnim kierunku osi x (patrz paragraf 7-6), wynosi

$$P = F_{\text{trans}} u = \left(-F \frac{\partial y}{\partial x} \right) \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Założmy, że fala w strunie jest prostą falą sinusoidalną

$$y = y_m \sin(kx - \omega t).$$

Wówczas nachylenie w punkcie x jest równe

$$\frac{\partial y}{\partial x} = k y_m \cos(kx - \omega t), \quad (t = \text{const}),$$

a więc siła poprzeczna dana jest wyrażeniem

$$-F \frac{\partial y}{\partial x} = -Fky_m \cos(kx - \omega t).$$

Prędkość poprzeczna cząstki struny w punkcie x wynosi

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t) \quad (x = \text{const}).$$

Ostatecznie, moc przepływająca przez punkt x jest równa

$$P = (-Fky_m)(-\omega y_m) \cos^2(kx - \omega t) = y_m^2 k \omega F \cos^2(kx - \omega t).$$

Zauważmy, że moc, czyli szybkość przepływu energii, nie jest stała, bowiem moc pobierana oscyluje. Energia przenoszona przez strunę jest zmagazynowana w każdym elemencie struny w postaci sumy energii kinetycznej ruchu i energii potencjalnej odkształcenia. Jest to sytuacja podobna do sytuacji w obwodzie elektrycznym prądu zmiennego; energia magazynuje się zarówno w kondensatorze, jak i w cewce indukcyjnej, a moc pobierana oscyluje. W przypadku struny moc jest zużywana na pokonywanie sił tarcia oraz efekty lepkości i wydzielą się w postaci ciepła; w obwodzie elektrycznym moc wydzielą się w postaci ciepła na oporach omowych. Często rozważa się moc średnią wydatkowaną w ciągu jednego okresu:

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P dt,$$

gdzie T jest okresem drgań. Korzystając z tego, że wartości średnie funkcji $\sin^2 x$ oraz $\cos^2 x$ wynoszą $1/2$, otrzymujemy dla struny

$$\bar{P} = \frac{1}{2} y_m^2 k \omega F = 2\pi^2 y_m^2 \nu^2 \frac{F}{v},$$

wynik, który nie zależy ani od x , ani od t . Z drugiej strony, dla struny $v = \sqrt{F/\mu}$, więc ostatecznie

$$\bar{P} = 2\pi^2 y_m^2 \nu^2 \mu \nu.$$

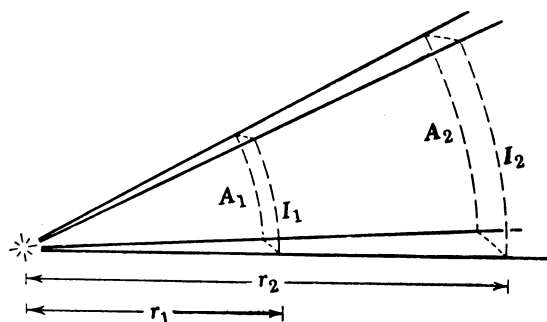
Twierdzenie, że szybkość przepływu energii jest proporcjonalna do kwadratu amplitudy i do kwadratu częstości fali, ma charakter ogólny i jest prawdziwe dla wszystkich typów fal.

Czytelnik może się przekonać, że jeśli rozważymy falę biegnącą w ujemnym kierunku osi x , otrzymamy wynik taki sam, lecz z przeciwnym znakiem. Znaczący to, że fala wydatkuje moc w kierunku propagacji.

Dla fal trójwymiarowych, takich jak fale świetlne lub akustyczne wysyłane ze źródła punkowego, wygodniej jest mówić o natężeniu fali. Natężenie jest określane jako moc przenoszona poprzez jednostkowy element powierzchni ustawiony prostopadłe do kierunku rozchodzenia się fali. Natężenie fali przestrzennej jest proporcjonalne do kwadratu amplitudy, podobnie jak moc przenoszona przez falę w strunie.

Gdy fala przebiega przez ośrodek, jej energia może być pochłaniana. Na przykład, w ośrodku lepkiem, takim jak syrop czy ołów, amplituda fali mechanicznej będzie gwałtownie malała z powodu pochłaniania energii, związanego z tarcie wewnętrzne. Niemniej jednak w wielu przypadkach nas interesujących absorpcję można pominąć. W tym rozdziale zakładaliśmy, że dla rozpatrywanych fal nie ma strat energii, niezależnie od tego, jak daleko się rozchodzą.

Przykład 3. Ze źródła o stałej mocy wyjściowej P wybiega fala kulista (patrz rys. 19-8). Należy znaleźć zależność natężenia fali od odległości od źródła. Zakładamy, że ośrodek jest izotropowy i że źródło emituje



Rys. 19-8. Przykład 3

jednakowo we wszystkich kierunkach, tzn. że jego promieniowanie ma symetrię sferyczną. Natężeniem fali trójwymiarowej jest moc przechodząca przez jednostkową powierzchnię prostopadłą do kierunku propagacji. Gdy powierzchnia falowa oddala się od źródła położonego w początku układu, z odległości r_1 na odległość r_2 , pole tej powierzchni wzrasta od wartości $4\pi r_1^2$ do wartości $4\pi r_2^2$. Przy założeniu, że nie ma pochłaniania energii, całkowita energia przenoszona przez falę w ciągu jednej sekundy pozostaje stała i równa P ; wynika z tego, że

$$P = 4\pi r_1^2 I_1 = 4\pi r_2^2 I_2,$$

gdzie I_1 oraz I_2 są natężeniami fali w odległościach r_1 i r_2 . Stąd

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2},$$

a więc natężenie fali zmienia się odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości od źródła. Ponieważ jednak natężenie jest wprost proporcjonalne do kwadratu amplitudy, amplituda fali musi być odwrotnie proporcjonalna do odległości od źródła.

19-7. Interferencja fal

Nazwa *interferencja* fal odnosi się do fizycznych efektów nakładania się dwóch lub więcej ciągów falowych. Rozważmy dwie fale o równych częstościach i amplitudach, biegnące z taką samą prędkością w tym samym kierunku (+x), lecz o fazach różniących się o φ . Równania tych dwóch fal będą następujące

$$y_1 = y_m \sin(kx - \omega t - \varphi), \quad (19-14)$$

$$y_2 = y_m \sin(kx - \omega t). \quad (19-15)$$

Możemy przepisać pierwsze równanie w dwóch równoważnych postaciach:

$$y_1 = y_m \sin \left[k \left(x - \frac{\varphi}{k} \right) - \omega t \right], \quad (19-14a)$$

albo

$$y_1 = y_m \sin \left[kx - \omega \left(t + \frac{\varphi}{\omega} \right) \right]. \quad (19-14b)$$

Równania (19-14a) i (19-15) nasuwają przypuszczenie, że gdybyśmy wykonali „zdjęcie migawkowe” tych dwu fal w dowolnej chwili t , stwierdzilibyśmy, że są one przesunięte względem siebie wzdłuż osi x o odległość φ/k . Z równań (19-14b) i (19-15) natomiast wynika, że w ustalonym punkcie przestrzeni x dwie fale wywołają dwa drgania harmoniczne proste, przesunięte w czasie o φ/ω . W ten sposób możemy sobie wyobrazić sens pojęcia różnicy faz.

Znajdźmy teraz falę wypadkową, która, przy założeniu, że obowiązuje zasada superpozycji, jest opisana przez sumę równań (19-14) i (19-15), czyli

$$y = y_1 + y_2 = y_m [\sin(kx - \omega t - \varphi) + \sin(kx - \omega t)].$$

Korzystając z trygonometrycznego wzoru na sumę sinusów dwóch kątów

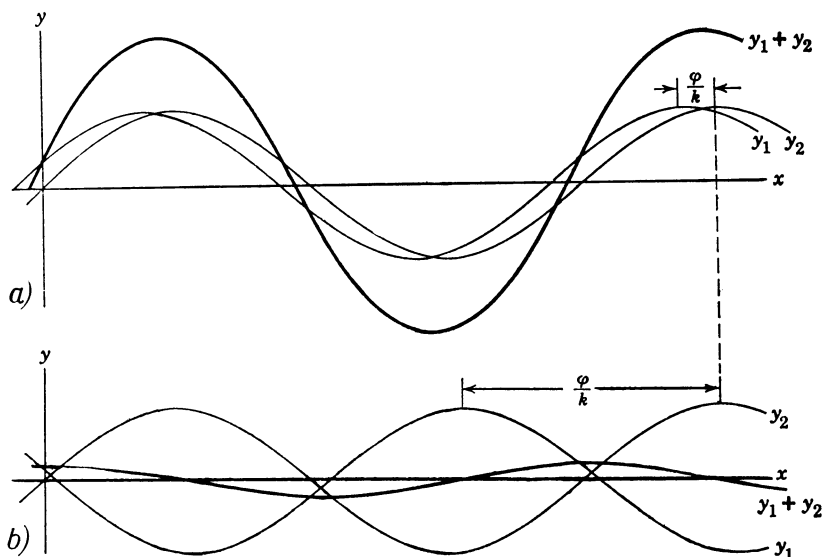
$$\sin B + \sin C = 2 \sin \frac{1}{2}(B + C) \cos \frac{1}{2}(C - B), \quad (19-16)$$

otrzymujemy

$$y = y_m \left[2 \sin \left(kx - \omega t - \frac{\varphi}{2} \right) \cos \frac{\varphi}{2} \right] = \left(2y_m \cos \frac{\varphi}{2} \right) \sin \left(kx - \omega t - \frac{\varphi}{2} \right). \quad (19-17)$$

Ta wypadkowa fala jest nową falą mającą tę samą częstość, ale inną amplitudę $2y_m \cos(\varphi/2)$. Gdy φ jest *bardzo małe* (w porównaniu z 180°), wypadkowa amplituda jest bliska $2y_m$, ponieważ w tym przypadku $\cos(\varphi/2) \cong \cos 0^\circ = 1$. Gdy φ jest równe zero, obie fale mają wszędzie te same fazy. Wierzchołek jednej fali spotyka się z wierzchołkiem drugiej, i tak samo dzieje się z dolinami fal. Mówimy wówczas, że fale się wzmacniają. Amplituda wypadkowa jest dwa razy większa od amplitudy każdej fali składowej. Jeśli natomiast φ jest bliskie 180° , amplituda wypadkowa jest prawie równa zero, gdyż dla $\varphi \cong 180^\circ$, $\cos(\varphi/2) \cong \cos 90^\circ = 0$. Gdy φ jest *dokładnie* równe 180° , szczyt jednej fali spotyka się z doliną drugiej. Mówimy wówczas, że fale wygaszają się. Amplituda wypadkowa jest wszędzie równa zero.

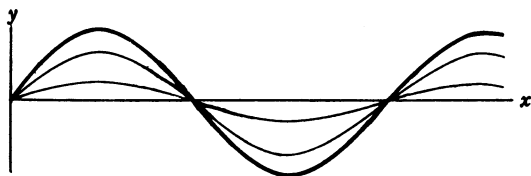
Na rysunku 19-9a zilustrowana jest superpozycja dwóch ciągów falowych będących prawie „w fazie” (tzn. takich, dla których φ jest bardzo małe), a na rys. 19-9b — superpozycja dwóch ciągów falowych o fazach prawie przeciwnych ($\varphi \cong 180^\circ$). Zauważmy, że na tych rysunkach dla dowolnej wartości x suma algebraiczna rzędnych punktów leżących na cienkich (składowych) krzywych równa jest rzędnej odpowiedniego punktu grubej (wypadkowej) krzywej. Wypadkowa dwóch fal może mieć różne wartości zależnie od ich przesunięcia fazowego.



Rys. 19-9. (a) Superpozycja dwóch fal o jednakowych częstościach i amplitudach będących prawie „w fazie” daje w wyniku falę o amplitudzie prawie dwukrotnie większej od amplitudy każdej z fal składowych. (b) Superpozycja dwóch fal o jednakowych częstościach i amplitudach, przesuniętych w fazie względem siebie o prawie 180° , daje w wyniku falę, której amplituda jest bliska zera. Zauważmy, że w obydwu wypadkach częstość pozostaje nie zmieniona. Wykresy odnoszą się do chwili $t = 0$

Fala wypadkowa będzie falą sinusoidalną, nawet gdy amplitudy sinusoidalnych fal składowych są różne. Rysunek 19-10, na przykład, ilustruje dodawanie dwóch fal o takich samych częstościach i prędkościach rozchodzenia, a różnych amplitudach. Amplituda wypadkowa zależy od różnicy faz, przy czym rysunek odpowiada zerowej różnicy faz. Wynik dla innej różnicy faz można otrzymać przesuwając jedną z fal składowych względem

drugiej. Prowadzi to do mniejszej amplitudy wypadkowej. Najmniejszą amplitudę wypadkową, równą różnicy amplitud fal składowych, otrzymuje się wtedy, gdy fazy różnią się o 180° . Jednak fala wypadkowa zawsze jest falą sinusoidalną. Dodanie dowolnej liczby fal sinusoidalnych o tych samych częstościach i prędkościach rozchodzenia się daje podobny rezultat. Wypadkowa fala będzie zawsze miała stałą w czasie amplitudę, ponieważ fale składowe (oraz fala wypadkowa) poruszają się z taką samą prędkością i zachowują wszędzie te same względne położenia. Taką sytuację można sobie wyobrazić przyjmując na przykład, że wszystkie fale z rysunku 19-9 i 19-10 przesuwają się w prawo z taką samą prędkością.

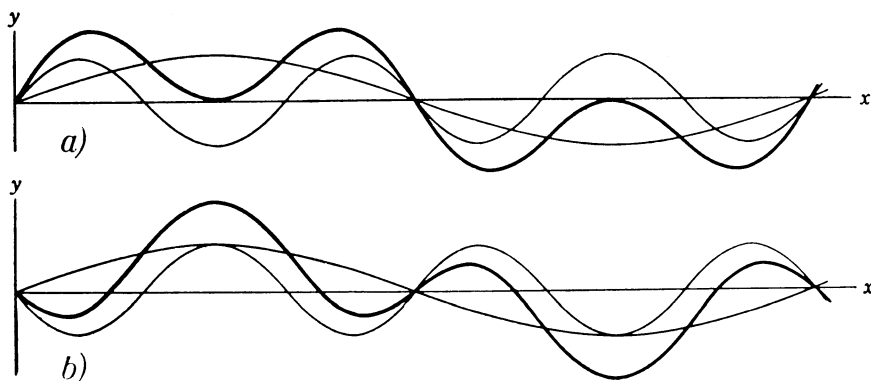


Rys. 19-10. Dodanie dwóch fal o takich samych częstościach i fazach, lecz różniących się amplitudami (linie cienkie), daje trzecią falę o tej samej częstości i fazie (linia gruba)

W praktyce efekty interferencyjne można uzyskiwać dla ciągów fal pochodzących z tego samego źródła (albo ze źródeł, dla których są ustalone zależności fazowe), lecz przebiegających różne drogi przed dojściem do punktu, w którym się dodają. Różnicę faz, φ , fal dobiegających do punktu można obliczyć, znajdując różnicę dróg, jakie przebyły fale od źródła do tego punktu. Różnica ta wynosi φ/k , czyli $(\varphi/2\pi)\lambda$. Gdy różnica dróg równa jest $0, \lambda, 2\lambda, 3\lambda$ itd., czemu odpowiada $\varphi = 0, 2\pi, 4\pi$ itd., dwie fale w wyniku interferencji wzmacniają się. Dla różnicy dróg $\frac{1}{2}\lambda, \frac{3}{2}\lambda, \frac{5}{2}\lambda$ itd., φ wynosi $\pi, 3\pi, 5\pi$ itd. i w wyniku interferencji fale wygaszają się. Zagadnienie to omówimy dokładniej nieco później.

19-8. Fale złożone

Rozważane dotychczas fale miały charakter prostych fal harmonicznnych, dla których przemieszczenia można było w każdej chwili przedstawić za pomocą sinusoidy. Stwierdziliśmy, że superpozycja dowolnej liczby takich fal, mających takie same częstości i prędkości rozchodzenia się, a dowolne amplitudy i fazy, prowadzi do fali wypadkowej tego samego prostego typu. Jeżeli jednak nałożymy na siebie fale mające *różne częstości*, fala wypadkowa będzie falą *złożoną*. Dla takiej fali ruch cząstki nie jest już prostym ruchem

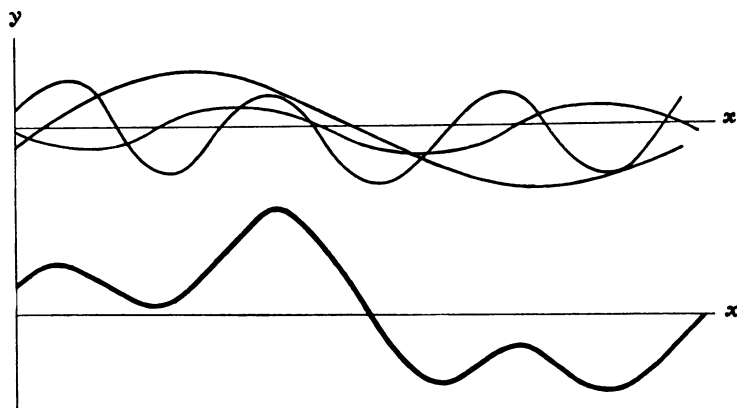


Rys. 19-11. Dodanie dwóch fal, których częstości pozostają w stosunku 3:1 (linie cienkie), daje falę, której kształt (linia gruba) zależy od zależności między fazami fal składowych. Porównać (a) z (b)

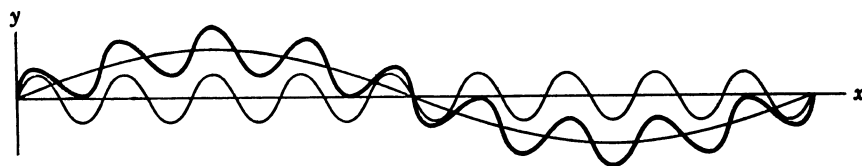
harmonicznym, ani kształt fali nie jest sinusoidą. W tym paragrafie rozważymy zagadnienie fal złożonych jedynie jakościowo. Analityczny opis takich fal podany będzie dopiero wtedy, gdy zaznajomimy się z reprezentowanymi przez nie zjawiskami fizycznymi. Później przedstawimy również wyniki graficznego dodawania dwóch lub więcej fal, rozchodzących się z tą samą szybkością i w tym samym kierunku, lecz mających różne częstotliwości, amplitudy i fazy.

Na rysunkach 19-11a i 19-11b dodajemy dwie fale o takich samych amplitudach i o częstotliwościach pozostających w stosunku jak 3 do 1; zależności fazowe inne są na rysunku a) niż na rysunku b); widać, jak zmiana różnicy faz może prowadzić do zupełnie różnego kształtu fali wypadkowej. Jeżeli krzywe te będą przedstawiały fale dźwiękowe, błona bębenkowa naszego ucha w obydwu wypadkach będzie wykonywać drgania opisane krzywą wypadkową. Będziemy jednak słyszeć i interpretować to drganie jako dwa dźwięki pierwotne, o różnych częstotliwościach, niezależnie od ich przesunięcia fazowego. W przypadku fali świetlnej opisanej przez tę falę wypadkową, nasze oczy odbierać będą to samo wrażenie — mieszaninę dwóch kolorów, niezależnie od przesunięcia fazowego składników.

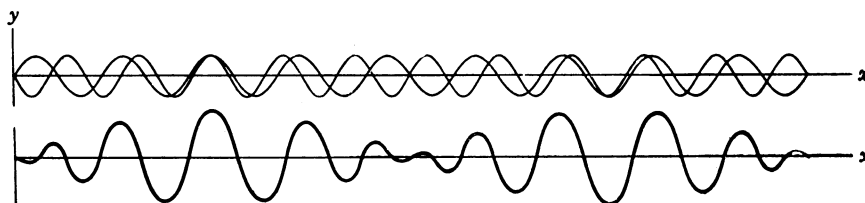
Na rysunku 19-12 przedstawiono trzy fale o różnych częstotliwościach i amplitudach. Wypadkowa fala złożona jest zupełnie inna niż proste fale harmoniczne — przypomina ona ciągi falowe wysyłane przez instrumenty muzyczne. Na rysunku 19-13 fala o bardzo dużej częstotliwości jest dodawana do fali o częstotliwości bardzo małej. Każda z częstotliwości składowych jest łatwa do wyodrębnienia w fali wypadkowej. Na rysunku 19-14 dodane są dwie fale o prawie takiej samej częstotliwości. Fala wypadkowa składa się z charakterystycznych grup, które w przypadku fal dźwiękowych dają dobrze znany efekt dudnień (paragraf 20-6).



Rys. 19-12. Dodanie trzech fal (rys. górny) o różnych częstotliwościach daje falę o złożonym kształcie (rys. dolny)



Rys. 19-13. Suma (linia gruba) dwóch fal o bardzo różniących się częstotliwościach (linie cienkie)



Rys. 19-14. Dodanie (rys. dolny) dwóch fal o prawie takich samych częstotliwościach (rys. górny) powoduje zjawisko dudnień. (Patrz rozdział 20)

Na wszystkich tych rysunkach fale wypadkowe otrzymujemy w wyniku prostego dodawania przemieszczeń wywołanych przez poszczególne fale składowe; wynika to z założenia, że obowiązuje zasada superpozycji. Ponieważ wszystkie składowe rozchodzą się z taką samą prędkością, prędkość fali wypadkowej jest również taka sama i kształt fali nie ulega zmianie.

Bardzo wygodny sposób obserwacji zjawiska dodawania prostych fal harmoniczných i rozkładania fal złożonych na proste daje użycie oscyloskopu katodowego (rozdział 27, tom II).

19-9. Fale stojące

Mamy jednowymiarowe ciało o skończonych rozmiarach, takie jak sznur napięty między dwiema klamrami oddalonymi od siebie o l . Fale biegnące wzdłuż sznura odbijają się od granicy ciała, w tym przypadku od klamer. Po każdym takim odbiciu fala porusza się w kierunku przeciwnym niż pierwotny. Zgodnie z zasadą superpozycji fala odbita dodaje się do fali padającej.

Rozważmy dwa ciągi falowe poruszające się wzdłuż sznura w *przeciwnych kierunkach*. Fale takie można opisać równaniami:

$$y_1 = y_m \sin(kx - \omega t),$$

$$y_2 = y_m \sin(kx + \omega t).$$

Falę wypadkową można zapisać jako

$$y = y_1 + y_2 = y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx + \omega t) \quad (19-18a)$$

albo, posługując się związkiem trygonometrycznym [równanie (19-16)],

$$y = 2y_m \sin kx \cos \omega t. \quad (19-18b)$$

Równanie (19-18b) jest równaniem fali *stojącej**. Zauważmy, że cząstka w dowolnie wybranym punkcie drga prostym ruchem harmonicznym i że drgania wszystkich cząstek mają tę samą częstotliwość. W przypadku fali biegnącej każda cząstka drga z taką samą amplitudą. Natomiast *charakterystyczną cechą fali stojącej jest to, że amplituda dla różnych cząstek nie jest taka sama, lecz zmienia się z położeniem cząstki***.

Istotnie, amplituda dana wzorem $2y_m \sin kx$ przybiera wartości *maksymalne* $2y_m$ w punktach, dla których

$$kx = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{5\pi}{2}, \quad \text{itd.},$$

czyli

$$x = \frac{\lambda}{4}, \quad \frac{3\lambda}{4}, \quad \frac{5\lambda}{4}, \quad \text{itd.}$$

Punkty te nazywane są *strzałkami*, a odstęp między nimi wynosi pół długości fali. Amplituda przybiera *minimalne* wartości równe zeru w punktach, dla których

$$kx = \pi, \quad 2\pi, \quad 3\pi, \quad \text{itd.},$$

* Fale stojące mogą być wytwarzane także w ciałach dwu- i trójwymiarowych o skończonych rozmiarach; przykłady podano w rozdziale 20 i 38.

** Dodające się fale biegnące w przeciwnych kierunkach wzdłuż sznura tworzą falę stojącą także wtedy, gdy ich amplitudy nie są równe. W tym miejscu rozpatrujemy tylko przypadek równych amplitud; niech Czytelnik zaznajomi się z przypadkiem ogólniejszym rozwiązując zadanie 29.

czyli

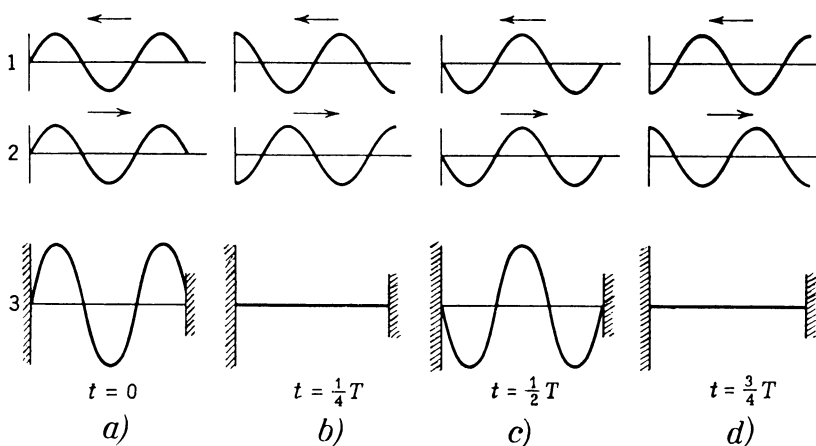
$$x = \frac{\lambda}{2}, \quad \lambda, \quad \frac{3\lambda}{2}, \quad 2\lambda, \quad \text{itd.}$$

Punkty te nazywane są *węzłami* i odstęp między nimi również wynosi pół długości fali. Odległość między węzłem a najbliższą strzałką jest równa ćwierci długości fali.

Oczywiście, nie ma przenoszenia energii wzdłuż sznura, ponieważ nie może ona przepłynąć przez punkty węzłowe pozostające cały czas w spoczynku. Tak więc energia jest trwale zmagazynowana w poszczególnych elementach sznura, chociaż zachodzi nieustanne przetwarzanie kinetycznej energii drgań w sprężystą energię potencjalną i odwrotnie. Ruch taki nazywamy ruchem falowym, ponieważ traktujemy go jako wynik nałożenia się dwóch fal biegnących w przeciwnych kierunkach [równanie (19-18a)]. Ruch taki możemy również rozpatrywać jako oscylacje sznura jako całości [równanie (19-18b)]; każdy element sznura drga ruchem prostym harmonicznym z częstością kołową ω i z amplitudą zależną od jego położenia. Każdy z elementów charakteryzuje się pewną bezwładnością i sprężystością, całość można więc traktować jako zbiór sprzężonych oscylatorów. Dlatego też drgający sznur w istocie rzeczy* jest równoważny układowi składającemu się z masy i sprężyny, z tym, że taki układ ma tylko jedną częstość własną, natomiast drgający sznur ma bardzo wiele częstości własnych (paragraf 19-10).

Na rysunkach 19-15a, b, c, d na dolnych wykresach, 3, demonstrujemy kształty fali stojącej w kolejnych odstępach czasu odległych od siebie o ćwierć okresu. Fale biegnące, jedna w dodatnim, a druga w ujemnym kierunku osi x , które nakładają się dając falę stojącą, zilustrowane są wykresami 1 i 2, odnoszącymi się do tych samych chwil czasu. Możliwe jest również wytwarzanie stojących fal elektromagnetycznych i dźwiękowych.

Na rysunku 19-16 przedstawiliśmy procesy przemian form energii, kinetycznej energii ruchu, K , i potencjalnej energii deformacji, U , zachodzących podczas jednego okresu. Czytelnik powinien porównać ten rysunek z rys. 8-4, który ilustruje te same przemiany

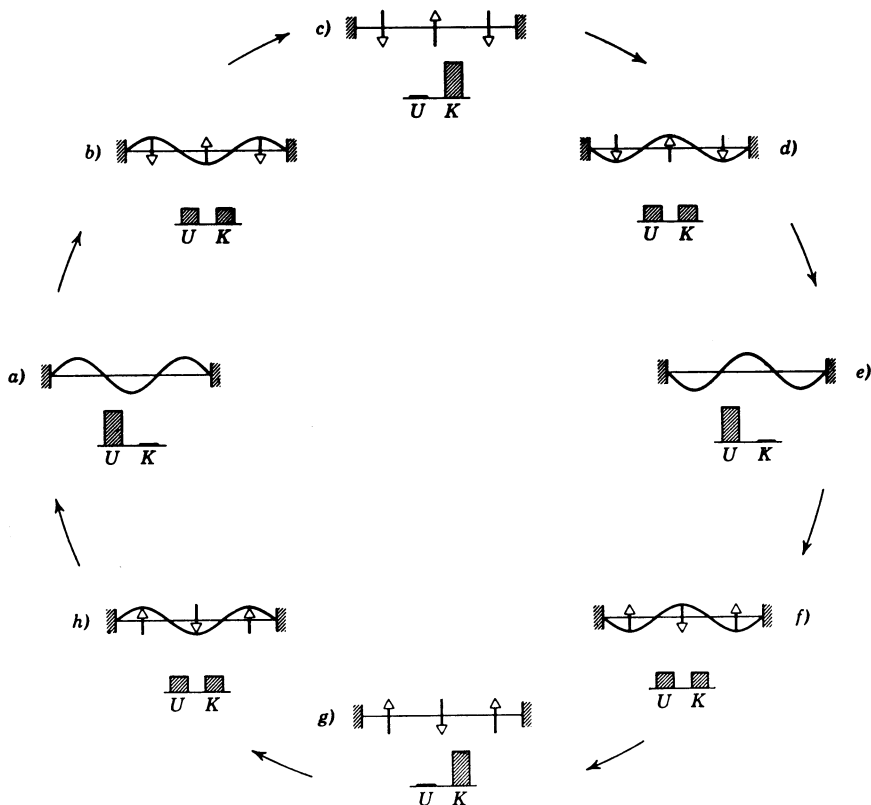


Rys. 19-15. Fala stojąca, jako superpozycja fali biegnącej w lewo i fali biegnącej w prawo; 1 i 2 przedstawiają fale składowe, 3 przedstawia falę wypadkową

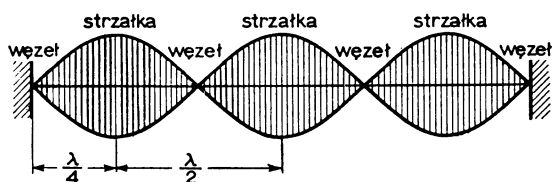
* Szczegółową analizę tego zagadnienia można znaleźć w artykule: J. Rekveld, On the Teaching of Standing Waves, *American Journal of Physics*, March 1958.

dla ruchu masy przymocowanej do sprężyny. Oscylujący sznur często drga tak szybko, że oko rejestruje tylko zamazaną smugę, której kształt odpowiada kształtowi obwiedni ruchu (patrz rys. 19-17).

Superpozycja fali padającej i odbitej, będąca dodawaniem dwóch fal biegnących w przeciwnych kierunkach, prowadzi do powstawania fali stojącej. Rozważmy teraz proces odbicia fali bardziej szczegółowo. Załóżmy, że wzdłuż napiętego sznura zamocowanego na jednym końcu przebiega impuls. Ilustruje to rysunek 19-18a. Po dobiegnięciu do końca sznura impuls oddziałuje na miejsce zamocowania siłą skierowaną do góry. Uchwyt

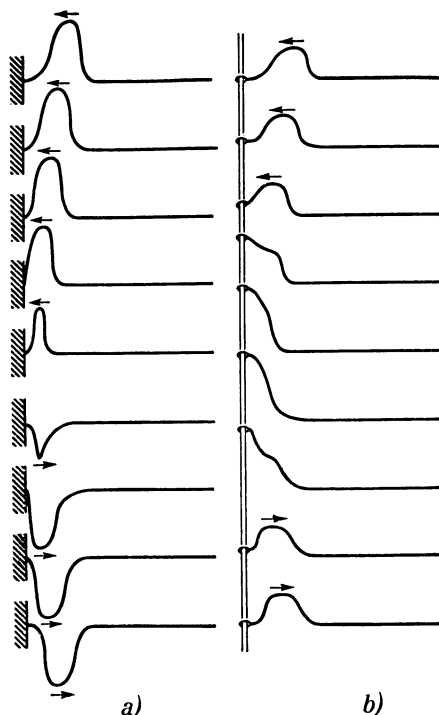


Rys. 19-16. Fala stojąca w napiętym sznurze (strunie) (pokazano jeden cykl drgań). Na rysunku (a) sznur chwilowo znajduje się w spoczynku i jego energia jest wyłącznie energią potencjalną sprężystej deformacji związanej z poprzecznym wychyleniem sznura. (b) Po upływie jednej ósmej okresu wychylenie jest mniejsze i sznur porusza się. Strzałki przedstawiają prędkości cząstek sznura, leżących w punktach zetknięcia strzałek ze sznurem. K oraz U mają takie same wartości. (c) Sznur nie jest wychylony, natomiast prędkości jego cząstek są maksymalne; energia jest wyłącznie energią kinetyczną. Ruch jest kontynuowany aż do chwili, gdy zostaną osiągnięte warunki początkowe (a), po czym cykl się powtarza



Rys. 19-17. Obwiednia fali stojącej odpowiadająca zdjęciu fotograficznemu ruchu faliowego zrobionemu „na czas”, przedstawiająca obraz węzłów i strzałek

jest jednak sztywny i nie może się poruszać. Na mocy trzeciej zasady dynamiki Newtona uchwyt działa na sznur siłą przeciwnie skierowaną i równą poprzedniej. Ta siła reakcji generuje impuls, który biegnie z powrotem wzdłuż sznura, w kierunku przeciwnym do kierunku impulsu padającego. Mówimy, że padający impuls został *odbity* od miejsca zamocowania końca sznura. Zauważmy, że odbity impuls powraca mając przeciwny kierunek wychyleń. Gdy do miejsca zamocowania końca sznura dobiega ciąg falowy, zostaje on odbity w identyczny sposób. Przesunięcie dowolnego elementu sznura jest sumą przemieszczeń wywołanych przez falę padającą i odbitą. Na końcu sznura, który jest nieruchomy, fale te muszą w procesie interferencji wygaszać się, tak by w rezultacie przemieszczenie w tym miejscu było równe zero. Tak więc fala odbita od zamocowanego końca jest zawsze przesunięta w fazie o 180° względem fali padającej. Mówimy, że *przy odbiciu od zamocowanego końca faza fali zmienia się skokowo o 180°* .



Rys. 19-18. (a) Odbicie impulsu od zamocowanego końca sznura. Kolejne rysunki odnoszą się do jednakowych odstępów czasu. Faza zmienia się przy odbiciu o 180° . (b) Odbicie impulsu od końca, który może się poruszać w kierunku poprzecznym. (Sznur jest przywiązany do pierścienia ślizgającego się pionowo bez tarcia.) Przy odbiciu faza się nie zmienia

Rozważmy teraz odbicie impulsu od swobodnego końca sznura, tj. od końca, który może się poruszać w kierunku poprzecznym. Taki stan sznura można zrealizować przywiązując jego koniec do lekkiego pierścienia, ślizgającego się bez tarcia po poprzecznie ustawionym pręcie, albo przywiązując sznur do drugiego, znacznie lżejszego, długiego sznura (patrz dalej). Gdy impuls dobiega do swobodnego końca, działa pewną siłą na element sznura znajdujący się w tym miejscu. Element ten zostaje poddany przyspieszeniu, a jego bezwładność powoduje, że przechodzi on przez położenie równowagi, co pociąga

za sobą pojawienie się siły reakcji działającej na sznur. Wywołuje to impuls, który biegnie w przeciwnym kierunku. Znow otrzymaliśmy odbicie, ale tym razem od swobodnego końca. Częstki sznura znajdujące się na jego swobodnym końcu podlegają oczywiście maksymalnym przemieszczeniom; padające i odbite ciągi falowe muszą w tym punkcie wzmacniać się, jeżeli mamy otrzymywać w tym miejscu maksymalne wychylenia. Dlatego też fala odbita jest w tym punkcie zawsze w zgodnej fazie z falą padającą (patrz rys. 19-18b). Mówimy, że *swobodny koniec odbija falę bez zmiany fazy*.

Wynika stąd, że gdy w sznurze wytworzona została fala stojąca, na jego zamocowanym końcu znajduje się węzeł (rys. 19-18a), a na końcu swobodnym strzałka (rys. 19-18b). W dalszych rozdziałach stwierdzenie to zostanie zastosowane do fal dźwiękowych i fal elektromagnetycznych.

W powyższych rozważaniach zakładaliśmy, że na granicy ośrodka następuje całkowite odbicie. Na ogół jednak fala częściowo odbija się od granicy, a częściowo przenika do drugiego ośrodka. Przypuśćmy, na przykład, że zamiast przymocowywać sznur do sztywnej ściany, przywiążemy go do innego sznura. Miejsce połączenia sznurów będzie częściowo odbijać, a częściowo przepuszczać fale. Ponieważ część fali, przepuszczona przez miejsce połączenia, biegnie bez zmiany kierunku, unosząc część padającej energii, amplituda fali odbitej będzie mniejsza niż amplituda fali padającej. Jeżeli drugi sznur ma większą gęstość liniową niż pierwszy, faza drgań będzie nadal doznawać skoku o 180° przy odbiciu. Ponieważ jednak amplituda fali odbitej jest teraz mniejsza od amplitudy fali padającej, w punkcie granicznym nie będzie już węzła, lecz będzie się on poruszał. Tak więc część energii przenika z pierwszego sznura do drugiego. W praktyce najlepszym sposobem realizacji „swobodnego końca” dla sznura jest przywiązanie go do długiego, znacznie lżejszego sznura. Przepuszczana przez granicę dwóch ośrodków energia jest wówczas zaniedbywalna, a drugi sznur służy wyłącznie do napięcia pierwszego.

Warto tu zauważyć, że fala przepuszczona przez granicę ośrodków rozchodzi się z inną prędkością niż fala padająca i odbita. Prędkość fali jest określona zależnością $v = \sqrt{F/\mu}$; naprężenie jest takie samo w obu sznurach, lecz ich gęstości są różne. Dlatego też fala biegnie wolniej w ośrodku gęstszym. Częstota fali przepuszczonej jest taka sama, jak fali padającej i odbitej. Korzystając więc ze związku $\lambda = v/v$ wnioskujemy, że w sznurze o większej gęstości liniowej, gdzie v jest mniejsze, fala jest krótsza. Z efektem zmiany długości fali przy przechodzeniu z jednego ośrodka do drugiego będziemy się często spotykać przy zajmowaniu się falami świetlnymi.

19-10. Rezonans

Zwykle, gdy układ fizyczny zdolny do wykonywania drgań jest pobudzany periodyczną serią impulsów o częstości równej lub prawie równej jednej z częstości własnych układu, układ zostaje wprawiony w drgania o stosunkowo dużej amplitudzie. Zjawisko to nazywamy *rezonansem* (patrz paragraf 15-10), a o układzie mówimy, że znajduje się w rezonansie z przykładanymi impulsami.

Rozważmy sznur zamocowany na obu końcach. W takim sznurze można wywołać drgania w postaci fali stojącej. Jedynym warunkiem, jaki musimy spełnić, jest nieruchomość obu końców, czyli powstanie na końcach węzłów. Pomiedzy końcami może być dowolna liczba węzłów, a może też ich nie być wcale, tak że długość fali stojącej może przybierać różne wartości. Odległość między sąsiednimi węzłami równa jest $\lambda/2$, tak że w sznurze o długości l musi się mieścić całkowita liczba n połówek długości fali, $\lambda/2$, tzn.

$$\frac{n\lambda}{2} = l,$$

skąd

$$\lambda = \frac{2l}{n}, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

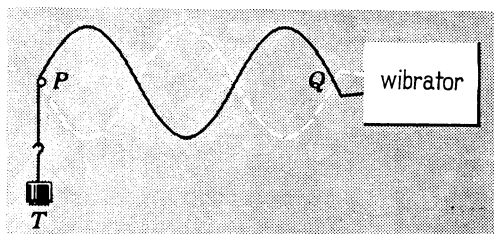
Ale $\lambda = v/\nu$, a $v = \sqrt{F/\mu}$, więc częstotści własne drgań układu spełniają warunek

$$\nu = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{F}{\mu}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (19-19)$$

Jeżeli sznur wprawiony w drgania pozostawimy samemu sobie, oscylacje stopniowo zanikają. Czynnikiem tłumiącym ruch jest rozpraszanie energii w miejscach zamocowania sznura oraz na skutek oporu powietrza. Energię traconą przez układ możemy uzupełnić podtrzymując drgania za pomocą siły wymuszającej. Jeżeli częstość wymuszająca jest bliska jednej z częstotści własnych, sznur będzie drgać z tą częstością i z bardzo dużą amplitudą. Ponieważ sznur ma dużą ilość częstotści własnych, rezonans może mieć miejsce przy wielu częstościach. Inaczej jest w przypadku układu składającego się ze sprężyny i zawieszzonej na niej masy; układ taki ma tylko jedną częstość rezonansową. Różnica jest związana z tym, że w układzie złożonym z masy i sprężyny bezwładność koncentruje się w jednym elemencie układu — w masie, natomiast własności sprężyste ma tylko drugi element — sprężyna. O układach tego typu mówimy, że mają *elementy skupione*.

Z drugiej strony o napiętym sznurze mówimy, że ma *elementy rozłożone*, ponieważ każdy element sznura charakteryzuje się jakąś bezwładnością i sprężystością. W przypadku oscylacji masy zawieszanej na sprężynie istnieje tylko jeden sposób wymiany pomiędzy kinetyczną i potencjalną formą energii: energia kinetyczna jest związana z poruszającą się masą, a energia potencjalna z podlegającą deformacji sprężyną. W napiętym sznurze, natomiast, elementy podobne do masy i sprężyny z poprzedniego przypadku są równomiernie rozłożone wzdłuż sznura. Istnieje tu wiele możliwych sposobów wymiany pomiędzy kinetyczną i potencjalną formą energii w czasie drgań, odpowiednio do różnych dopuszczalnych wartości parametru n w równaniu (19-19).

Rezonans dla sznura często demonstruje się w następujący sposób. Jeden koniec sznura zostaje unieruchomiony przy pomocy ciężarka, przywiązanego do niego i przewieszzonego przez krążek, a drugi przymocowany do wibratora, jak pokazano na rys. 19-19. Poprzecznie drgający wibrator wytwarza falę biegnącą wzdłuż sznura, a następnie odbijającą się od nieruchomego końca sznura. Częstość fali jest równa częstości drgań wibratora, a długość fali określona równaniem $\lambda = v/\nu$. Na nieruchomym końcu P znajduje się węzeł, natomiast koniec Q wykonuje drgania. Zmieniając naprężenie sznura przez zmianę zawieszonego ciężarka możemy zmieniać długość fali. Zmiana naprężenia powoduje zmianę prędkości rozchodzenia, a przy zachowaniu stałej częstości długość fali zmienia się proporcjonalnie



Rys. 19-19. Fala stojąca w sznurze pobudzonym do drgań, w przypadku gdy częstość pobudzania jest niemal równa częstości własnej sznura

do prędkości. Kiedy tylko długość fali staje się prawie równa $2l/n$, gdzie l jest długością sznura, otrzymujemy falę stojącą o bardzo dużej amplitudzie. Sznur drga teraz w jeden z charakterystycznych dla niego sposobów i jest w rezonansie z wibratorem. Wibrator podtrzymuje drgania wyrównując straty energii sznura związane z tłumieniem. Amplituda drgań wzrasta tylko do takiej wartości, przy której straty energii są równe całkowitej energii otrzymywanej z wibratora. Punkt Q jest wówczas punktem „niemal” węzłowym, ponieważ amplituda drgań wibratora jest bardzo mała w porównaniu z amplitudą fali.

Przy istnieniu tłumienia częstość rezonansowa jest więc prawie, ale niedokładnie, równa częstości własnej sznura. Na jednym końcu sznura znajduje się węzeł, na drugim zaś — drgania mają prawie zerową amplitudę. Pomiędzy końcami sznura mamy punkty, w których drgania są bardzo małe, punkty „prawie węzłowe”. Nie mogą one jednak być rzeczywistymi węzłami, ponieważ musi przez nie przepływać energia z wibratora. Sytuacja jest tu podobna do tej, z jaką zetknęliśmy się w przypadku tłumionego oscylatora harmonicznego drgającego pod działaniem siły wymuszającej (patrz paragraf 15-10). Tam również częstość rezonansowa była prawie równa częstości własnej oscylatora, a amplituda drgań bardzo duża, ale nie nieskończona. Gdy nie ma żadnego tłumienia, częstość rezonansowa jest dokładnie równa jednej z częstości własnych. Wówczas amplituda drgań może nieskończenie rosnąć, dzięki nieustannie dostarczanej energii. W praktyce układ taki przestanie podlegać prawu Hooke'a, tzn. nie będzie spełniał warunku małych drgań, a następnie ulegnie zniszczeniu. Może się to zdarzyć także w obecności tłumienia, gdy jest ono niewielkie, a siła wymuszająca bardzo duża (jak to miało miejsce w fatalnym przypadku mostu Tacoma, patrz rys. 15-21).

Gdy częstość wibratora różni się znacznie od częstości własnych danych równaniem (19-19), faza drgań fali odbitej powracającej do wibratora jest wyraźnie przesunięta względem fazy drgań wibratora i fala wykonuje pracę przeciwko drganiom wibratora. Tak więc sznur może pobierać energię z wibratora, ale może ją także oddawać wibratorowi. Wygląd fali „stojącej” nie jest ustalony, lecz zmienia się okresowo. Amplituda fali jest przeważnie mała i niewiele się różni od amplitudy wibratora. Mamy tu sytuację podobną do ruchu wymuszanego huśtawki, która jest popychana periodycznie z częstością różną od jej częstości własnej. Wychylenia huśtawki są wówczas niewielkie.

Sznur pobiera maksimum energii z wibratora gdy jest z nim w rezonansie. Dostrajanie radia jest procesem analogicznym. Przez kręcenie gałką ustalamy częstość własną prądu zmiennego w obwodzie wejściowym, tak aby była równa częstości fali wysyłanej przez radiostację, której chcemy słuchać. Obwód rezonuje z przesyłanym sygnałem i pobiera maksimum energii z tego sygnału. Z warunkami rezonansu zetknęliśmy się jeszcze w akustyce, w elektromagnetyzmie, w optyce, a także w fizyce atomowej i jądrowej. We wszystkich tych dziedzinach zjawisk, podobnie jak w mechanice, układ będzie absorbował maksimum energii w warunkach rezonansu, a stosunkowo niewiele poza rezonansem.

Przykład 4. W opisanym wyżej doświadczeniu, wibrator drga z częstością $\nu = 20$ Hz, gęstość liniowa sznura $\mu = 7,47 \cdot 10^{-3}$ kg/m, a jego długość $l = 7,3$ m. Naprężenie sznura F można zmieniać ciągnąc sznur za koniec przewieszony przez krążek. Jakie siły musi przykładać eksperymentator, jeżeli chce zademonstrować rezonans i pokazać falę stojącą o jednej, dwóch, trzech oraz czterech półfalach?

W rezonansie

$$\nu = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{F}{\mu}}.$$

Wobec tego naprężenie F dane jest wzorem

$$F = \frac{4l^2\nu^2\mu}{n^2}.$$

Gdy tworzy się tylko jedna półfala, $n = 1$, i wtedy

$$F_1 = 4l^2\nu^2\mu = 4(7,3 \text{ m})^2 (20 \text{ s}^{-1})^2 (7,47 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m}) = 640 \text{ N}.$$

Dla dwóch półfal $n = 2$, wówczas

$$F_2 = \frac{4l^2 v^2 \mu}{4} = \frac{F_1}{4} = 160 \text{ N.}$$

Podobnie dla trzech i czterech półfal

$$F_3 = \frac{F_1}{3^2} = 71 \text{ N,}$$

$$F_4 = \frac{F_1}{4^2} = 40 \text{ N.}$$

Demonstrator musi więc zmniejszać stopniowo naprężenie w celu otrzymania wzrastającej liczby półfal. Chociaż częstota rezonansowa w tych warunkach nie ulega zmianie, prędkość rozchodzenia się fali oraz jej długość maleją proporcjonalnie.

Czy obliczone powyżej wartości naprężeń są ściśle, jeśli weźmie się pod uwagę tłumienie?

Czy przy założeniu, że naprężenie jest ustalone, a więc prędkość jest ściśle określona, moglibyśmy uzyskać więcej niż jeden rezonans zmieniając częstota wibratora?

Pytania

1. Jak można doświadczalnie sprawdzić, że z falą jest związana energia?
2. Energia może być zarówno przenoszona przez cząstki, jak i przez fale. Jak doświadczalnie można odróżnić te dwa sposoby przenoszenia energii?
3. Czy można wytworzyć falę, w której cząsteczki ośrodka drgałyby prostym kątowym ruchem harmonicznym? Jeżeli tak, wyjaśnić, w jaki sposób i opisać tę falę.
4. Czy fale skrętne są poprzeczne, czy podłużne? Czy można je przedstawić w postaci superpozycji dwóch fal poprzecznych lub dwóch fal podłużnych?
5. Jak można wytworzyć fale płaskie? A jak fale kuliste?
6. Następujące funkcje, w których A jest stałą, mają postać $f(x \pm vt)$:

$$y = A(x - vt), \quad y = A(x + vt)^2,$$

$$y = A\sqrt{x - vt}, \quad y = A\ln(x + vt).$$

Wyjaśnić, dlaczego funkcje te nie są przydatne do opisu ruchu falowego.

7. Czy można w strunie wytworzyć falę, której kształt ma w jakimś punkcie nieciągłą pochodną, czyli kanciaste załamanie? Wyjaśnić to.

8. Jak zmienia się amplituda i natężenie fal na powierzchni wody, w funkcji odległości od źródła?

9. Prawo odwrotnej proporcjonalności natężenia fali do kwadratu odległości od źródła nie stosuje się ściśle dla fali dźwiękowej. Dlaczego?

10. Czy podczas interferencji dwóch fal jedna z nich zmienia sposób rozchodzenia się drugiej?

11. Czy w czasie interferencji fal następują straty energii? Uzasadnić odpowiedź.

12. Dlaczego nie obserwuje się efektów interferencyjnych między dwiema wiązkami światła wysyłanymi przez dwie latarki, ani między falami dźwiękowymi wysyłanymi przez dwoje skrzypiec?

13. Jak widać na rys. 19-15, fala stojąca w napiętym sznurze dwukrotnie w ciągu okresu przybiera kształt linii prostej, dokładnie taki jakby sznur wcale nie drgał. Przedyskutuj to, w aspekcie prawa zachowania energii.

14. Czy powstanie fala stojąca w sytuacji, gdy dwie fale biegnące w przeciwnych kierunkach różnią się tylko amplitudą? Czy wówczas ma miejsce transport energii? Czy powstają jakieś węzły? (Patrz zadanie 29).

15. Częściowe odbicie energii fali spowodowane nieciągłością na drodze propagacji związane jest zwykle ze stratami, które mogą być zmniejszone do minimum przez umieszczenie na granicy nieciągłości urządzenia dopasowującego oporności pozorne (impedancje). Na przykład megafon (tuba) pomaga dopasować oporność słupa powietrza w jamie ustnej i w krtani do oporności powietrza na zewnątrz. Podać inne przykłady i wyjaśnić jakościowo, w jaki sposób takie urządzenia minimalizują straty przy odbiciu (patrz zadanie 29).

16. Przyjąć, że fala stojąca w sznurze jest wynikiem nałożenia fal biegnących i, posługując się zasadą superpozycji, wyjaśnić, dlaczego w warunkach rezonansu nie ma na sznurze (rys. 19.19) prawdziwych węzłów, nawet na jego „nieruchomym” końcu. (Wskazówka: Wziąć pod uwagę efekt tłumienia.)

17. Wytwarzamy fale stojące w sznurze posługując się urządzeniem takim jak na rys. 19-19. Sznur jest oświetlony migocącym światłem, przy czym wibrator jest sterowany z tego samego elektrycznego źródła, które zasila oświetlenie. Wyjaśnić dlaczego kolor sznura podlega osobliwym zmianom w kierunku poprzecznym.

18. W czasie omawiania fal poprzecznych w sznurze rozważaliśmy wyłącznie przemieszczenia w jednej płaszczyźnie, a konkretnie w płaszczyźnie x, y . Gdy wszystkie przemieszczenia leżą w tej samej płaszczyźnie, mówimy, że fala jest *spolaryzowana liniowo*. Czy mogą istnieć przemieszczenia w innej płaszczyźnie niż ta, o której mówiliśmy? Jeżeli tak, to czy dwie fale o różnych płaszczyznach polaryzacji mogą się dodawać? Jaki wygląd mogłaby mieć taka fala złożona?

19. Fala przenosi energię. Czy przenosi również pęd? Czy może przenosić moment pędu? (Zob. pytanie 18.) (Patrz artykuł D. W. Juenker, Energy and Momentum Transport in String Waves, *American Journal of Physics*, January 1976.)

Zadania

Paragraf 19-3

1. Prędkość rozchodzenia się fal elektromagnetycznych w próżni wynosi $3,0 \cdot 10^8$ m/s. (a) Zakres długości fal widzialnej części widma (światła) rozciąga się od około $4,0 \cdot 10^{-7}$ m dla fioletu do około $7,0 \cdot 10^{-7}$ m dla czerwieni. Jaki jest zakres częstości fal świetlnych? (b) Zakres krótkich fal radiowych (fale krótkie, UKF, telewizja) rozciąga się od 1,5 MHz (megaherc; patrz tablica 2, rozdział 1) do 300 MHz. Jaki jest odpowiadający temu zakres długości fal? (c) Promienie rentgenowskie mają również naturę elektromagnetyczną. Ich zakres długości fal rozciąga się od około 5,0 nm (nanometr; patrz tablica 2, rozdział 1) do około $1,0 \cdot 10^{-2}$ nm. Jaki jest zakres częstości promieniowania rentgenowskiego?

Odp.: (a) 500 THz (THz = teraherc; patrz tablica 2, rozdział 1) do 800 THz. (b) 1,0 m do 200 m. (c) $6,0 \cdot 10^4$ THz do $3,0 \cdot 10^7$ THz.

2. Wykazać, że równanie $y = y_m \sin(kx - \omega t)$ można zapisać w równoważnych postaciach

$$y = y_m \sin k(x - vt), \quad y = y_m \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \nu t \right),$$

$$y = y_m \sin \omega \left(\frac{x}{v} - t \right), \quad y = y_m \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right).$$

3. Fala poprzeczna biegnąca wzdłuż bardzo długiego sznura jest opisana równaniem

$$y = 6,0 \sin(0,020\pi x + 4,0\pi t),$$

gdzie y i x są wyrażone w cm, a t w s. Znaleźć a) amplitudę, b) długość fali, c) częstość, d) prędkość i e) kierunek rozchodzenia się fali oraz f) maksymalną prędkość poprzeczną cząstki sznura.

Odp.: (a) 6,0 cm, (b) 100 cm, (c) 2,0 Hz, (d) 200 cm/s, (e) w ujemnym kierunku osi x , (f) 75 cm/s.

4. Wzdłuż sznura biegnie fala. Przy założeniu, że czas jaki upływa pomiędzy momentem maksymalnego i zerowego wychylenia w ustalonym punkcie sznura wynosi 0,17 s, znaleźć (a) okres i (b) częstość.

(c) Jaka jest prędkość rozchodzenia się tej fali jeśli jej długość wynosi 1,4 m?

5. Fala o częstości 500 Hz rozchodzi się z prędkością 350 m/s. (a) O ile są oddalone od siebie punkty, dla których różnica faz drgań wynosi 60° ? (b) Jaka jest różnica faz dwóch przemieszczeń w pewnym punkcie przestrzeni odpowiadająca odstępowi czasu 10^{-3} s?

Odp.: (a) 12 cm. (b) 180° .

6. Napisać równanie fali, biegnącej w ujemnym kierunku osi x , której amplituda wynosi 0,010 m, częstość 550 Hz, a prędkość rozchodzenia 330 m/s.

7. (a) Drgające źródło wysyła sinusoidalną falę podłużną wzdłuż przymocowanej do niego sprężyny. Częstość drgań źródła wynosi 25 Hz, a odległość między sąsiednimi rozrzedzeniami sprężyny 24 cm. Obliczyć prędkość rozchodzenia się fali. (b) Napisać równanie tej fali, przyjmując, że maksymalne podłużne przemieszczenie cząstki sprężyny jest równe 0,30 cm, a fala biegnie w ujemnym kierunku osi x . Przyjąć, że źródło leży w punkcie $x = 0$, a przemieszczenie w punkcie $x = 0$ w chwili $t = 0$ jest równe zeru.

Odp.: (a) 600 cm/s. (b) $y = 0,30 \sin(0,26x + 160t)$, gdzie x i y są wyrażone w cm, a t w s.

Paragraf 19-5

8. Jaka jest prędkość rozchodzenia się fali poprzecznej w linie o długości 2,0 m i masie 0,060 kg, naprężonej siłą 500 N?

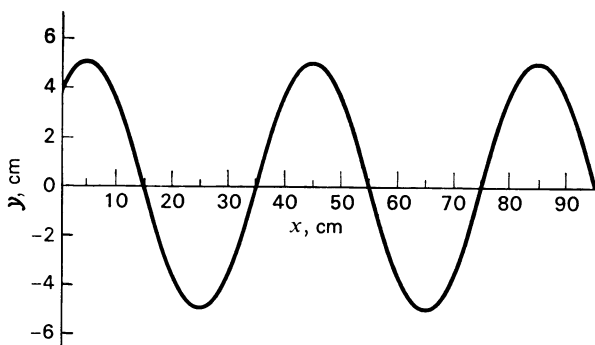
9. Gęstość liniowa drgającego sznura wynosi $1,3 \cdot 10^{-4}$ kg/m. W sznurze rozchodzi się fala poprzeczna opisana równaniem $y = 0,021 \sin(x + 30t)$, gdzie x i y są wyrażone w m, a t w sekundach. Jakie jest naprężenie sznura?

Odpo.: 0,12 N.

10. Wzdłuż sznura biegnie z prędkością 80 cm/s ciągła sinusoidalna fala poprzeczna. Stwierdzono, że wychylenie (w cm) elementu sznura w punkcie $x = 10$ cm zmienia się z czasem zgodnie z równaniem $y = 5,0 \sin(1,0 - 4,0t)$. (a) Jaka jest częstość fali? (b) Jaka jest długość fali? (c) Napisać ogólne równanie przedstawiające wychylenie poprzeczne elementu sznura jako funkcję położenia i czasu. (d) Obliczyć naprężenie sznura.

11. Prosta harmoniczna fala poprzeczna rozchodzi się wzdłuż sznura w kierunku „na lewo” (czyli w ujemnym kierunku osi x). Na rys. 19-20 przedstawiono przebieg wychyleń w funkcji położenia w chwili $t = 0$. Gęstość liniowa sznura wynosi 25 g/m, a jego naprężenie 3,6 N. Znaleźć (a) amplitudę, (b) długość fali, (c) prędkość rozchodzenia się fali, (d) okres oraz (e) maksymalną prędkość elementu sznura. (f) Napisać równanie opisujące biegnącą falę.

Odpo.: (a) 5,0 cm, (b) 40 cm, (c) 12 m/s, (d) 0,033 s, (e) 9,4 m/s, (f) $5,0 \sin(0,16x + 190t + 0,93)$, gdzie x i y w cm, a t w s.

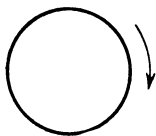


Rys. 19-20. Zadanie 11

12. Sprawdzić, że nachylenie sznura w każdym punkcie x jest liczbowo równe stosunkowi prędkości ruchu cząsteczki sznura do prędkości fali w tym miejscu.

13. Jednorodna obręcz kołowa zrobiona ze sznurka obraca się w kierunku ruchu wskazówek zegara w nieobecności pola grawitacyjnego (patrz rys. 19-21). Prędkość styczna wynosi v_0 . Znaleźć prędkość fali biegnącej po tym sznurku. (Uwaga: wynik nie zależy od promienia koła ani od masy przypadającej na jednostkę długości sznurka!)

Odpo.: v_0 .



Rys. 19-21. Zadanie 13

14. Z sufitu zwisa lina o masie m i długości L . (a) Wykazać, że prędkość rozchodzenia się fali poprzecznej w linie zależy od odległości y od dolnego końca i jest opisana wzorem $v = \sqrt{gy}$. (b) Wykazać, że czas, w którym fala poprzeczna przebiega całą długość liny wynosi $t = 2\sqrt{L/g}$. (c) Czy podana masa liny ma wpływ na wyniki (a) i (b)?

Paragraf 19-6

15. Źródło o mocy 1,0 W emituje energię w otaczający je, jednorodny i nie pochłaniający ośrodek. Jakie jest natężenie fali w odległości 1,0 m od źródła?

Odpo.: 0,080 W/m².

16. (a) Wykazać, że natężenie I (energia przechodząca przez jednostkową powierzchnię w ciągu jednostki czasu) jest iloczynem energii na jednostkę objętości u i prędkości rozchodzenia się v zaburzenia falowego. (b) Fale radiowe rozchodzą się z prędkością $3,0 \cdot 10^8$ m/s. Obliczyć gęstość energii fali radiowej w odległości 480 km od źródła o mocy 50 000 W, zakładając, że fale są kuliste i rozchodzą się izotropowo.

17. Źródło liniowe emituje falę cylindryczną. Przyjmując, że ośrodek nie pochłania energii, obliczyć, jak zależy (a) amplituda i (b) natężenie fali od odległości od źródła.

Odp.: (a) Proporcjonalnie do $r^{-1/2}$. (b) Proporcjonalnie do r^{-1} .

18. (a) Wykazać, że dla sytuacji opisanej w przykładzie 2 maksymalna prędkość cząstki sznura, przez który przebiega fala sinusoidalna, wynosi $u = y_m \omega$. (b) W przykładzie 2 widzieliśmy, że cząstki sznura drgają ruchem harmonicznym prostym. Energia mechaniczna każdej cząstki jest sumą jej energii potencjalnej i kinetycznej i równa się w każdej chwili maksymalnej energii kinetycznej tej cząstki. Wprowadzić element sznura o masie $\mu \Delta x$ i wykazać, że energia na jednostkę długości sznura wynosi

$$E_1 = 2\pi^2 \mu v^2 y_m^2.$$

(c) Wykazać ponadto, że średnia moc, czyli średnia szybkość przenoszenia energii jest iloczynem energii na jednostkę długości przez prędkość propagacji. (d) Czy rezultat ten jest słuszny tylko dla fali sinusoidalnej?

19. Ze źródła punkowego wybiega izotropowo we wszystkich kierunkach fala. (a) Uzasadnić następujące wyrażenie dla wychylenia y cząstki w dowolnej odległości r od źródła

$$y = \frac{Y}{r} \sin k(r - vt).$$

Określić prędkość i kierunek rozchodzenia się, okres oraz natężenie tej fali. (b) Jakie są wymiary stałej Y ?
Odp.: (b) L^2 .

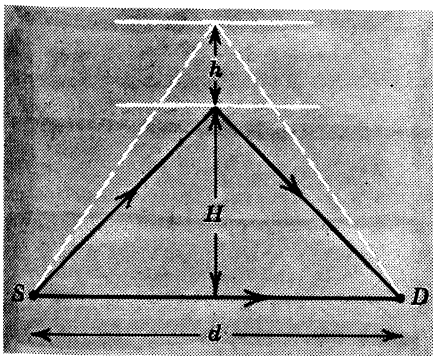
Paragraf 19-7

20. Obliczyć amplitudę ruchu wypadkowego wynikającego z nałożenia dwóch prostych fal harmonicznich o takim samym kierunku rozchodzenia się i takiej samej częstotliwości, jeżeli amplitudy składowych wynoszą 3,0 cm i 4,0 cm, a drgania różnią się w fazie o $\pi/2$ radiana.

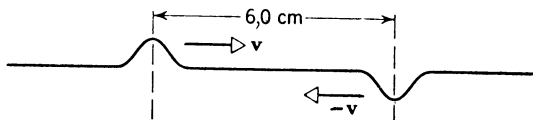
21. Źródło S i detektor D fali o wysokiej częstotliwości znajdują się na powierzchni ziemi w odległości d od siebie. Fala dochodząca do D bezpośrednio z S ma taką samą fazę drgań, jak fala pochodząca z S , odbita od poziomej warstwy leżącej na wysokości H (patrz rys. 19-22). Kierunki promienia padającego i odbitego tworzą z warstwą odbijającą takie same kąty. Gdy warstwa podnosi się wyżej o h , żaden sygnał nie jest odbierany w D . Pomijając absorpcję w atmosferze, znaleźć związek między d , h , H oraz długością fali λ .

$$\text{Odp.: } \lambda = 2 \sqrt{4(H+h)^2 + d^2} - 2 \sqrt{4H^2 + d^2}.$$

22. Częstotliwości czterech składowych fal sinusoidalnych mają się do siebie jak liczby 1, 2, 3 i 4, a amplitudy jak 1, $1/2$, $1/3$ i $1/4$. W chwili $t = 0$ w punkcie $x = 0$ składowe pierwsza i trzecia są przesunięte w fazie względem drugiej i czwartej o 180° . Narysować kształt fali wypadkowej i przedyskutować jej charakter.



Rys. 19-22. Zadanie 21



Rys. 19-23. Zadanie 23

23. Dwa impulsy biegną w przeciwnych kierunkach wzdłuż sznura, jak pokazano na rys. 19-23. (a) Zakładając, że na początku impulsy oddalone są o 6,0 cm i że prędkość fali wynosi 2,0 m/s, narysować kształt sznura po 5, 10, 15, 20 oraz 25 ms. (b) Co działo się z energią w chwili $t = 15$ ms?

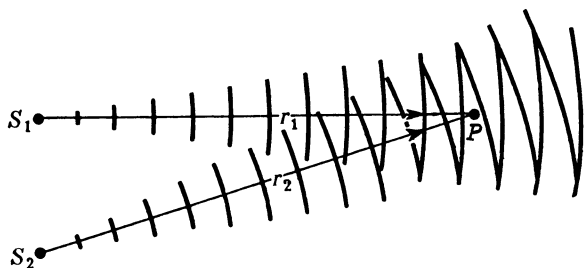
Odp.: (b) Chociaż przemieszczenie w tej chwili jest równe zero, prędkość poprzeczna nie jest równa zero. Energia jest wyłącznie kinetyczna.

24. Trzy nakładające się fale sinusoidalne mają ten sam okres, natomiast ich amplitudy mają się do siebie jak 1:1/2:1/3, a stałe fazowe są równe odpowiednio 0, $\pi/2$ i π . Narysować kształt fali wypadkowej i przedyskutować jej charakter.

25. Dwa źródła S_1 i S_2 z rys. 19-24 emitują fale o tej samej częstotliwości i amplitudzie. Fazy fal wychodzących z obu źródeł są takie same i taka zależność fazowa źródeł jest cały czas utrzymywana. Rozważmy punkt P , dla którego r_1 jest prawie równe r_2 . (a) Pokazać, że superpozycja tych dwóch fal daje falę, której amplituda zmienia się ze zmianą położenia punktu P zgodnie (w przybliżeniu) z wyrażeniem

$$\frac{2Y}{r} \cos \frac{k}{2} (r_1 - r_2),$$

w którym $r = (r_1 + r_2)/2$. (b) Wykazać następnie, że całkowite wygaszenie ma miejsce tam, gdzie $r_1 - r_2 = (n + \frac{1}{2})\lambda$, gdzie n jest liczbą całkowitą, a maksymalne wzmocnienie w miejscu, gdzie $(r_1 - r_2) = n\lambda$.



Rys. 19-24. Zadanie 25

Miejszem geometrycznym punktów, których różnica odległości od dwóch ustalonych punktów jest stała, jest hiperbola o ogniskach w tych ustalonych punktach. A więc każdej wartości n odpowiada hiperbola związana ze wzmacnianiem drgań i hiperbola związana z ich wygaszaniem. W punktach, dla których r_1 i r_2 nie są w przybliżeniu równe (np. w pobliżu źródeł), fale pochodzące z S_1 i S_2 mają różne amplitudy wygaszanie jest tylko częściowe.

Paragraf 19-9

26. Równanie fali poprzecznej biegnącej wzdłuż liny ma postać

$$y = 10 \cos(0,0079x - 13t - 0,89),$$

gdzie x oraz y są wyrażone w cm, a t w s. Napisać równanie fali, która po dodaniu do fali danej wytworzy w linie falę stojącą.

27. Drgania sznura są opisane równaniem

$$y = 0,5 \sin \frac{\pi x}{3} \cos 40\pi t,$$

gdzie x i y są wyrażone w cm, a t w s. (a) Jaka jest amplituda i prędkość fal składowych, których superpozycja może dawać takie drgania? (b) Jaka jest odległość między węzłami? (c) Jaka jest prędkość cząstki sznura w punkcie $x = 1,5$ cm w chwili $t = \frac{9}{8}$ s?

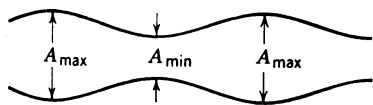
Odp.: (a) 0,25 cm, 120 cm/s. (b) 3,0 cm. (c) Zero.

28. Dwie sinusoidalne fale poprzeczne biegną wzdłuż sznura w przeciwnych kierunkach. Każda ma amplitudę 0,30 cm i długość fali 6,0 cm. Prędkość fali poprzecznej w sznurze wynosi 1,5 m/s. Narysować kształt sznura w każdej z następujących chwil czasu: $t = 0$ (kształt dowolny), $t = 5,0$ ms, $t = 10,0$ ms, $t = 15$ ms oraz $t = 20,0$ ms.

29. Gdy fala dobiegająca do granicy ośrodka zostaje tylko częściowo odbita, wynikiem nakładania dwóch fal, mających różne amplitudy i biegnących w przeciwnych kierunkach, jest fala stojąca, której obwiednię przedstawiono na rys. 19-25. Można tu wprowadzić wielkość charakteryzującą kształt $(A_1 + A_r)/(A_1 - A_r) = A_{\max}/A_{\min} = R$ oraz procentowy współczynnik odbicia zdefiniowany jako pomnożony przez

100 stosunek średniej mocy fali odbitej do średniej mocy fali padającej. We wzorze na R wielkość A_i oznacza amplitudę fali padającej (*incident*), A_r amplitudę fali odbitej (*reflected*). (a) Wykazać, że dla stu-procentowego odbicia $R = \infty$, a gdy nie ma odbicia, $R = 1$. (b) Wykazać, że pomiar R w pobliżu granicy ośrodka umożliwia obliczenie procentowego współczynnika odbicia z wzoru

$$\text{procentowy współczynnik odbicia} = [(R-1)^2/(R+1)^2] \cdot 100\%.$$



Rys. 19-25. Zadanie 29

30. Dwie liny o gęstościach liniowych μ_1 i μ_2 zostały związane w punkcie $x = 0$ i napięte siłą F . Fala $y = A \sin k_1(x - v_1 t)$, rozchodząca się w linie o gęstości μ_1 , dobiega do węzła łączącego liny, gdzie częściowo zostaje przepuszczona do liny o gęstości liniowej μ_2 , a częściowo odbita. Oznaczmy odpowiednie fale $B \sin k_2(x - v_2 t)$ i $C \sin k_1(x + v_1 t)$. (a) Zakładając, że $k_2 v_2 = k_1 v_1 = \omega$ i że przemieszczenie węzła pochodzące od fali padającej i odbitej jest takie samo jak przemieszczenie pochodzące od fali przepuszczonej, pokazać, że $A = B + C$. (b) Wykazać, że

$$C = A \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1} = A \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2},$$

przy założeniu, że obie liny mają w pobliżu węzła takie samo nachylenie (dlaczego tak jest?), tzn. dy/dx w linie 1 równa się dy/dx w linie 2. W jakich warunkach C jest ujemne?

31. Rozważmy falę stojącą, która jest sumą dwóch fal biegnących w przeciwnych kierunkach, poza tym identycznych. Wykazać, że energia fali stojącej wynosi $2\pi^2 y_m^2 \nu v$.

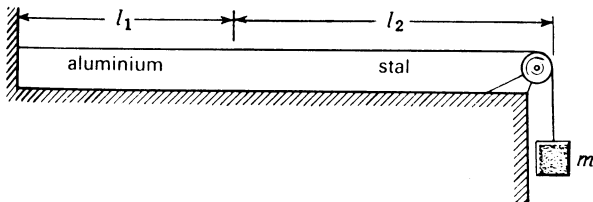
Paragraf 19-10

32. W doświadczeniu laboratoryjnym dotyczącym fal stojących sznur o długości 0,9 m został przymocowany do ramienia widełek stroikowych (kamertonu), elektrycznie pobudzanych do drgań o kierunku prostopadłym do kierunku sznura i częstotliwości 60 Hz. Masa sznura wynosi 0,044 kg. (a) Jakie musi być naprężenie sznura (ciężarki napinające sznur są przymocowane do jego drugiego końca), żeby powstały cztery strzałki? (b) Co by się stało, gdyby widełki stroikowe zostały tak obrócone, ażeby kierunek ich drgań był równoległy do kierunku sznura?

33. Drgania kamertonu nastrojonego na częstotliwość 600 Hz wywołują falę stojącą w strunie unieruchomionej na obu końcach. Prędkość rozchodzenia się fali w strunie wynosi 400 m/s. Na strunie powstały cztery strzałki o amplitudzie 2,0 mm. (a) Jaka jest długość struny? (b) Napisz równanie przedstawiające wychylenia struny w funkcji czasu i położenia.

Odp.: (a) 1,3 m. (b) $2,0 \cdot 10^{-3} \sin 9,4x \cos 3800t$, gdzie x i y są wyrażone w metrach, a t w sekundach.

34. Drut aluminium o długości $l_1 = 60,0$ cm i polu przekroju poprzecznego $1,00 \cdot 10^{-2}$ cm² spójono z drutem stalowym o takim samym przekroju poprzecznym. Połączony drut, obciążony klockiem o masie $m = 10,0$ kg, został umieszczony tak jak na rys. 19-26, przy czym odległość l_2 między miejscem



Rys. 19-26. Zadanie 34

spojenia a podpierającym bloczkiem wynosi 86,6 cm. Przy użyciu zewnętrznego źródła o regulowanej częstotliwości wytwarzamy w drucie poprzeczne fale stojące. (a) Znaleźć najniższą częstotliwość wzbudzenia, dla której będziemy obserwować fale stojące z węzłem w miejscu spojenia. (b) Jaka jest całkowita liczba węzłów przy tej częstotliwości, wyłączając z rachunku dwa węzły na końcach drutu? Gęstość aluminium wynosi 2,60 g/cm³, a gęstość stali 7,80 g/cm³.