

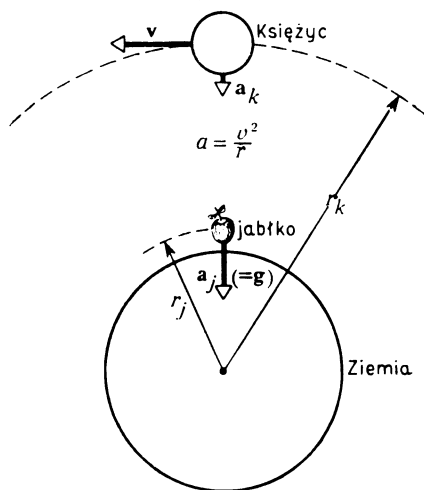
16. Grawitacja

16-1. Wstęp historyczny*

Przynajmniej od czasów greckich przedmiotem starannych badań były dwa problemy: (1) tendencja upuszczanych przedmiotów, takich jak kamienie, do spadania na Ziemię oraz (2) ruch planet, a także Słońca i Księżyca, które w tych czasach były klasyfikowane razem z planetami. Początkowo uważano, że oba te problemy nie mają ze sobą nic wspólnego. Jednym z osiągnięć Newtona, opartym na pracach jego poprzedników, było wyraźne przedstawienie tych zagadnień jako różnych aspektów pojedynczego problemu, podlegających tym samym prawom.

W 1665 roku dwudziestotrzyletni Newton wyjechał, po spowodowanym zarazą zamknięciu szkoły, z Cambridge do Lincolnshire. Około 50 lat później napisał „...w tym samym roku (1665) zacząłem rozmyślać o grawitacji rozciągającej się aż do orbity Księżyca... i porównałem w ten sposób siłę potrzebną do utrzymania Księżyca na swej orbicie z siłą ciężkości na powierzchni Ziemi. Znalazłem całkiem bliską ich odpowiedniość”.

Młody przyjaciel Newtona William Stukeley opisuje jak podczas picia herbaty pod jabłonią Newton powiedział mu, że sceneria jest taka jak wtedy, gdy wpadł na pomysł



Rys. 16-1. Zarówno Księżyc, jak i jabłko są przyspieszane w kierunku środka Ziemi. Różnica w ich ruchach wynika stąd, że Księżyc ma prędkość styczną v , podczas gdy jabłko nie ma tej prędkości

* Patrz artykuł: V. V. Raman, A Background to Newtonian Gravitation, *The Physics Teacher*, November 1972.

istnienia grawitacji. „Było to wywołane przez spadające jabłko*, kiedy siedział on w kontemplacyjnym nastroju... i następnie zaczął stopniowo stosować własność ciężenia do ruchu Ziemi i ciał niebieskich...” (patrz rys. 16-1).

Przyspieszenie Księżyca w kierunku Ziemi można obliczyć na podstawie okresu jego obrotu dookoła Ziemi oraz promienia jego orbity. Otrzymuje się wartość $0,0027 \text{ m/s}^2$ (patrz przykład 4, rozdział 4). Wartość ta jest około 3600 razy mniejsza niż przyspieszenie grawitacyjne (g) na powierzchni Ziemi. Newton wiedziony, jak mówił, przez trzecie prawo Keplera (patrz niżej oraz zadanie 25) spróbował wyjaśnić tę różnicę, zakładając, że przyspieszenie spadającego ciała jest odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości od Ziemi.

Natychmiast powstaje pytanie, co rozumiemy przez termin „odległość od Ziemi”. Ostatecznie Newton uznał, że każda cząstka Ziemi przyczynia się do przyciągania grawitacyjnego między Ziemią i innymi ciałami. Zrobił przy tym odważne założenie, że cała masa Ziemi może być traktowana tak, jakby była skoncentrowana w jej środku.

Ziemię można traktować jako punkt materialny w odniesieniu na przykład do Słońca. Jednak założenie, że można Ziemię traktować jako punkt materialny równie dobrze w stosunku do jabłka umieszczonego w odległości zaledwie kilku metrów od jej powierzchni, nie jest już tak oczywiste. Zgodnie jednak z takim założeniem spadające w pobliżu powierzchni Ziemi ciało znajduje się w odległości równej promieniowi Ziemi od efektywnego środka przyciągania Ziemi, czyli około 6400 km, a Księżyc znajduje się w odległości około 384 000 km. Odwrotność kwadratu stosunku tych odległości wynosi $(6400/384\,000)^2 = 1/3600$, co jest zgodne ze stosunkiem przyspieszeń Księżyca i jabłka.

Według cytowanych wyżej słów Newtona „odpowiedniość” jest rzeczywiście „bliska”.

Newton opublikował wszystkie swoje wnioski dopiero w 1678 roku, około 22 lata po tym jak zrozumiał podstawowe idee. Przedstawił je dopiero w swym mistrzowskim dziele *Principia*. Niezależnie od wspomnianego wyżej problemu Ziemi i jabłka, istotna niepewność dotyczyła promienia Ziemi, koniecznego parametru do obliczeń. Odegrała też wreszcie rolę zwyczajna dla Newtona niechęć do publikowania cegółkolwiek. Był on nieśmiały i zamknięty w sobie człowiekiem, a wszelkie spory budziły w nim wstręt. Bertrand Russell pisał o nim: „Gdyby napotkał on na podobną opozycję, jaka była udziałem Galileusza, prawdopodobnie nie opublikowałby nigdy nawet jednej linijki”. Edmund Halley, znany w związku z kometa Halleya, właściwie zmusił Newtona do wydania *Principiów*. Matematyk Augustus De Morgan pisał o Halleyu: „...ale nie widział on najmniejszej szansy, by o pracy tej można było chociaż myśleć, ani o napisaniu jej, ani po napisaniu o wydrukowaniu”.

W *Principiach* Newton wyszedł poza problemy Ziemi i jabłka oraz Ziemi i Księżyca i zastosował swoje prawo ciężenia do *wszystkich* ciał w sposób, który omówimy w następnym paragrafie.

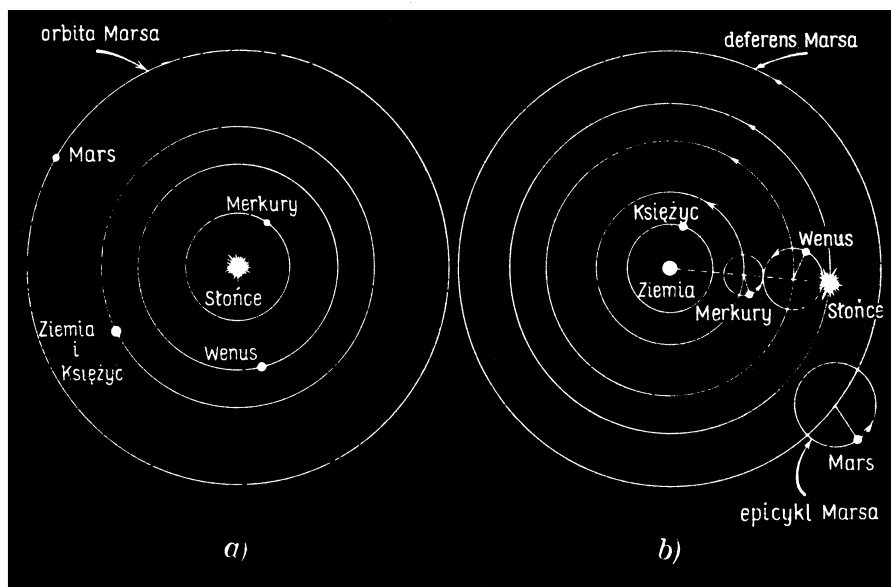
Trzy przekrywające się dziedziny zjawisk są odpowiednie do omawiania grawitacji. (1) Przyciąganie grawitacyjne między, powiedzmy, dwoma kulami do kęgli, chociaż mierzalne przy pomocy odpowiednio czułych technik, jest jednak za słabe, żeby mogło być odczuwane przez nasze zmysły. (2) Przyciąganie nas i obiektów nas otaczających przez Ziemię jest cechą kontrolującą nasze życie, od której uciec możemy jedynie przy użyciu

* Niewiele jest podstaw, by wierzyć, że jabłko to trafiło Newtona w głowę!

nadzwyczajnych środków. Twórcy programu lotów kosmicznych stale myślą o sile ciążenia jako o centralnym i kontrolującym wszystko czynniku. (3) Na skalę kosmiczną, to jest w sferze Układu Słonecznego, a także powstawania i oddziaływania gwiazd i galaktyk, grawitacja jest bez wątpienia siłą dominującą.

Najwcześniejsze poważne próby wyjaśnienia kinematyki Układu Słonecznego były podjęte przez Greków. Ptolemeusz (Claudius Ptolomaus, II w.n.e.) rozwinął schemat geocentryczny dla Układu Słonecznego, w którym, jak sama nazwa wskazuje, Ziemia pozostaje nieruchoma w środku, podczas gdy planety, włączając w to Słońce i Księżyc, okrążają ją dokoła. Taki wniosek nie powinien nas dziwić. Ziemia wydaje się nam być całkiem istotnym ciałem. Szekspir odnosił się do niej jak do „...sporej budowli...”. Nawet dzisiaj ucząc astronomii nawigacyjnej używamy geocentrycznego układu odniesienia, a w mowie codziennej stosujemy terminy takie jak „wschód Słońca”, które implikują taki właśnie układ.

Proste orbity kołowe nie mogą zdać sprawy ze złożonych ruchów planet i Ptolemeusz musiał wprowadzić pojęcie epicykli. Planeta poruszała się teraz po okręgu, którego środek poruszał się po innym okręgu z Ziemią w środku (patrz rys. 16-2b). Musiał on także uciec się do kilku innych zmian natury geometrycznej. Wszystkie zachowywały świętą figurę, okrąg, jako centralną cechę ruchów planetarnych. Wiemy teraz, że to nie okrąg jest podstawowym torem, ale elipsa, w której ognisku znajduje się Słońce (patrz niżej).



Rys. 16-2. (a) Układ Słoneczny według Kopernika. Słońce znajduje się w środku, a planety poruszają się dokoła niego. (b) Układ Słoneczny według Ptolemeusza. Ziemia znajduje się w środku, a planety poruszają się wokół niej. Obaj uczeni wprowadzili pewne komplikacje natury geometrycznej po to, by wyjaśnić złożony ruch planet. Na przykład w (b) Mars wędruje po (kołowym) epicyklu, którego środek porusza się po (kołowym) deferensie. Na rysunku nie zostały pokazane zmiany, w zasadzie równie złożone, wprowadzone przez Kopernika. Podstawowa różnica obu układów polega na tym, że Słońce bądź Ziemia jest centrum ruchów planetarnych (Patrz: Giorgio De Santillana, *The Crime of Galileo*, Chicago, University of Chicago Press 1955 oraz Thomas S. Kuhn, *The Copernican Revolution*, Cambridge, Harvard University Press 1957)

W XVI wieku Kopernik (1473-1543) zaproponował układ heliocentryczny. W schemacie tym Słońce było w środku Układu Słonecznego, a Ziemia poruszała się dookoła jako jedna z jego planet (patrz rys. 16-2a). Często się sądzi, iż Układ Kopernika jest o tyle prostszy od Układu Ptolemeusza, że powinien być przyjęty natychmiast. Nie jest to prawda. Kopernik również wierzył w „świętość” okręgów i używał epicykli i innych dodatków w stopniu dorównującym Ptolemeuszowi; zmiany te nie są zaznaczone na rys. 16-2a. Jednak umieszczając Słońce w środku wszechrzeczy Kopernik podał znacznie prostsze i bardziej naturalne wyjaśnienie niektórych cech ruchu planetarnego. Przede wszystkim zaś przygotował niezbędny teren, na którym rozwinął się współczesny nasz pogląd na Układ Słoneczny.

Rosnące kontrowersje między dwiema teoriami były bodźcem dla astronomów do otrzymania bardziej dokładnych danych obserwacyjnych. Takie dane zostały zebrane przez Tychona Brahe* (1546-1601), ostatniego spośród wielkich astronomów prowadzących obserwacje bez użycia lunety**. Dane Tychona Brahe dotyczące ruchów planet zostały po około dwudziestu latach zanalizowane i zinterpretowane przez jego asystenta, Johannesa Keplera (1571-1630). Kepler znalazł ważne regularności w ruchu planet. Są one znane jako *trzy prawa ruchu planetarnego Keplera*.

1. Wszystkie planety poruszają się po orbitach eliptycznych, w których w jednym z ognisk znajduje się Słońce (prawo orbit).

2. Odcinek łączący jakąkolwiek planetę ze Słońcem zakreśla w równych odstępach czasu równe pola (prawo pól).

3. Kwadrat okresu obiegu dowolnej planety jest proporcjonalny do sześciannu średniej odległości planety od Słońca (prawo okresów).

Prawa Keplera stanowiły silne poparcie teorii Kopernika. Pokazały one, w jak prosty sposób można opisać ruchy planetarne, jeśli przyjmie się Słońce za ciało odniesienia. Były to jednak prawa empiryczne; po prostu opisywały one obserwowany ruch planet bez żadnej teoretycznej interpretacji. Kepler nie sądził, że jakaś siła jest przyczyną takich regularności***. W istocie pojęcie siły nie było w tym czasie jasno sformułowane. Wielkim triumfem Newtona było więc to, że mógł on *wyprowadzić* prawa Keplera ze swoich zasad dynamiki i ze swojego prawa ciążenia. W tym przypadku prawo ciążenia Newtona wymagało, żeby każda planeta była przyciągana w kierunku Słońca siłą proporcjonalną do jej masy i odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości od Słońca.

W ten sposób Newton przy pomocy jednego pomysłu był w stanie wyjaśnić zarówno ruch planet w Układzie Słonecznym, jak i ruch ciał spadających na Ziemię. Połączył on w ten sposób w jedną teorię odrębne uprzednio nauki: mechanikę ziemską i mechanikę nieba. Rzeczywiste znaczenie naukowe pracy Kopernika polega na tym, że teoria heliocentryczna otworzyła drogę do tej syntezy****. Założenie, że Ziemia wiruje i obraca się

* Patrz artykuł: Owen Gingerich, Copernicus and Tycho, *Scientific American*, December 1973.

** Pierwsza, użyteczna naukowo, luneta została wykonana przez Galileusza w 1609 roku. Przy jej pomocy odkrył on wewnętrzne księżycy Jowisza i fazy Wenus. Galileusz był zdecydowanym rzecznikiem teorii Kopernika i prowadził obserwacje w celu jej potwierdzenia. Nawiasem mówiąc, Newton wynalazł teleskop zwierciadlany.

*** Patrz artykuł: Curtis Wilson, How Did Kepler Discover His First Two Laws, *Scientific American*, March 1972.

**** Na pracę Newtona z pewnością miały wpływ prace innych badaczy. Do tych, na których się opierał, musimy zaliczyć także Galileusza, Keplera, Halleya i Hooke'a.

dokoła Słońca, umożliwiło następnie wyjaśnienie takich różnorodnych zjawisk, jak dzienny i roczny pozorny ruch gwiazd, spłaszczenie kulistego kształtu Ziemi, właściwości pasatów i wiele innych. W teorii geocentrycznej wszystkie te zjawiska nie mogły być tak prosto powiązane ze sobą.

Pouczające będzie przedstawienie rozwoju naszego rozumienia ruchów ciał Układu Słonecznego przy pomocy pojęć mechaniki klasycznej, wyłożonej w rozdziale 5 (patrz str. 92). Historycznie możemy wyróżnić cztery przełomy.

1. Kopernik wskazał, że Słońce, a nie Ziemia, jest centralnym ciałem Układu Słonecznego. Mówiąc językiem dzisiejszym: podał on układ odniesienia (Słońce) o wiele wygodniejszy dla opisu ruchów od używanego poprzednio (Ziemia). Między innymi zaletami trzeba wspomnieć, że układ Kopernika, ustalony względem Słońca, ale nie obracający się razem z nim, jest w istocie inercjalnym układem odniesienia; układ odniesienia ustalony względem będącej w ruchu orbitalnym Ziemi, na której żyjemy, nie może być przy rozpatrywaniu zagadnień związanych z ruchami planet, uważany za inercjalny.

2. Brahe wykonał dokładne pomiary ruchów planet tak, jak są one widziane z Ziemi. Dostarczył on koniecznego materiału obserwacyjnego, który umożliwił dalszy postęp.

3. Kepler, badając dane Brahego, wyprowadził z nich trzy proste prawa empiryczne dotyczące ruchu planetarnego. Prawa te omawialiśmy powyżej. Przyjmując kopernikański układ odniesienia, przedstawił on w prostej postaci informacje kinematyczne dotyczące ruchów planetarnych.

4. Newton odkrył ogólne prawa rządzące ruchem wszystkich układów mechanicznych oraz szczególnie prawo dla siły, stosujące się do ruchów planet, a mianowicie prawo powszechnego ciążenia.

Tak więc widzimy wyłaniające się na przestrzeni około 200 lat: (1) odpowiedni układ odniesienia, (2) dokładną informację kinematyczną, (3) empiryczne prawo ruchu planetarnego oraz (4) ogólne prawa mechaniki klasycznej i prawo wyrażające siłę rządzącą ruchem planetarnym.

16-2. Prawo powszechnego ciążenia

Sila działająca między każdymi dwoma punktami materialnymi o masach m_1 i m_2 , znajdującymi się w odległości r , jest siłą przyciągającą, skierowaną wzdłuż prostej łączącej te punkty, i ma wartość

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (16-1)$$

gdzie G jest stałą uniwersalną, mającą tę samą wartość dla wszystkich par punktów materialnych.

Jest to *prawo powszechnego ciążenia Newtona*. Dla lepszego zrozumienia tego prawa trzeba od razu podkreślić kilka jego cech.

Po pierwsze, siły grawitacyjne działające między dwoma dowolnymi ciałami (punktami materialnymi) stanowią parę sił: akcja-reakcja. Pierwsze ciało działa na drugie wzdłuż łączącej je prostej siłą skierowaną do pierwszego ciała. Podobnie, drugie ciało działa na pierwsze siłą skierowaną do drugiego ciała wzdłuż łączącej je prostej. Siły te są równe co do wartości, ale przeciwnie skierowane.

Nie wolno mylić stałej uniwersalnej G z przyspieszeniem ziemskim ciała g , wywołanym przez grawitacyjne przyciąganie ciała przez Ziemię. Stała G ma wymiar L^3/MT^2 i jest skalarem; g ma wymiar L/T^2 , jest wektorem i nie jest ani uniwersalne, ani stałe.

Zauważmy, że prawo powszechnego ciążenia Newtona nie jest równaniem, które definiuje jakkolwiek z występujących w nim wielkości fizycznych (siła, masa, długość). Zgodnie z naszym programem mechaniki klasycznej, przedstawionym w rozdziale 5, siła zdefiniowana jest przez drugą zasadę dynamiki Newtona, $F = ma$. Istotą tej zasady jest

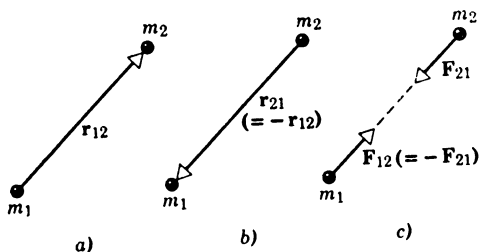
jednak założenie, że tak zdefiniowana siła działająca na ciało może być w prosty sposób związana z mierzalnymi właściwościami ciała i jego otoczenia, czyli założenie istnienia prostych praw rządzących oddziaływaniami ciał. Prawo powszechnego ciężenia jest właśnie takim prawem. Stała G musi być wyznaczona doświadczalnie. Skoro tylko G zostało wyznaczone dla danej pary ciał, możemy otrzymaną wartość stosować w prawie ciężenia dla określenia sił grawitacyjnych między inną dowolną parą ciał.

Zauważmy także, że równanie (16-1) określa siłę działającą między punktami materialnymi. Jeżeli chcemy określić siłę działającą między ciałami rozciągłymi, jak na przykład Ziemia i Księżyc, musimy rozpatrywać każde z tych ciał jako złożone z punktów materialnych. Następnie należy obliczyć oddziaływanie między wszystkimi punktami. Rachunki takie są możliwe dzięki całkowaniu. Chęć rozwiązania takich zagadnień była dla Newtona jedną z pobudek do rozwijania analizy matematycznej. Na ogół, nie jest poprawne założenie, że dla celów grawitacji całą masę ciała możemy traktować jako skoncentrowaną w jego środku masy. Założenie to jest jednak poprawne dla jednorodnych kul. Wynik ten, z którego często następnie będziemy korzystać, zostanie udowodniony w paragrafie 16-6.

W prawie powszechnego ciężenia zawarta jest, w sposób pośredni, myśl, że siła grawitacyjna między dwoma ciałami nie zależy od obecności innych ciał i od właściwości otaczającej te ciała przestrzeni. Poprawność tej idei zależy od poprawności wniosków wyprowadzonych przy jej zastosowaniu. Jak dotąd wnioski potwierdzają tę ideę. Z faktu tego skorzystano jako z jednego z argumentów obalających możliwość istnienia „ekranów grawitacyjnych”.

Prawo powszechnego ciężenia możemy przedstawić w postaci wektorowej. Niech wektor przemieszczenia $\mathbf{r}_{12}$ będzie skierowany od punktu o masie m_1 do punktu o masie m_2 , tak jak wskazuje to rys. 16-3a. Kierunek i wartość siły grawitacyjnej $\mathbf{F}_{21}$, którą m_1 działa na m_2 , dane są przez związek wektorowy

$$\mathbf{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12}, \quad (16-2a)$$



Rys. 16-3. Siła wywierana na masę m_2 (przez masę m_1) $\mathbf{F}_{21}$ jest zwrócona przeciwie do wektora przemieszczenia $\mathbf{r}_{12}$ masy m_2 względem m_1 . Siła wywierana na masę m_1 (przez m_2), $\mathbf{F}_{12}$, jest zwrócona przeciwie do wektora przemieszczenia $\mathbf{r}_{21}$ masy m_1 względem m_2 . $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ i siły te tworzą parę: akcja-reakcja

gdzie r_{12} jest długością r_{12} . Znak minus w równaniu (16-2a) oznacza, że $\mathbf{F}_{21}$ ma zwrot przeciwny do $\mathbf{r}_{12}$; m_2 podlega działaniu siły skierowanej do m_1 (patrz rys. 16-3); siła grawitacyjna jest siłą przyciągającą. Równanie (16-2a) jest w istocie prawem „odwrotnej proporcjonalności do kwadratu odległości”, co wyraźnie widać po przepisaniu go w postaci: $\mathbf{F}_{21} = -(Gm_1 m_2 / r_{12}^2) (\mathbf{r}_{12} / r_{12})$; stosunek wektora przemieszczenia do jego długości ($\mathbf{r}_{12} / r_{12}$) jest po prostu wektorem jednostkowym $\mathbf{u}$, w kierunku przemieszczenia. Jeżeli przedstawimy ten związek w postaci skalarnej, przyrównując długości obu stron, wtedy czynnik r_{12} w liczniku uprości się z jednym z czynników r_{12}^3 w mianowniku, w wyniku czego otrzymamy prawo wyrażone w postaci takiej jak w równaniu (16-1).

Siła, jaką m_2 działa na m_1 , jest oczywiście dana wyrażeniem

$$\mathbf{F}_{12} = -G \frac{m_2 m_1}{r_{21}^3} \mathbf{r}_{21}. \quad (16-2b)$$

W równaniach (16-2) $\mathbf{r}_{21} = -\mathbf{r}_{12}$ (patrz rys. 16-3a, b) i, jak oczekujemy, $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ (patrz rys. 16-3c); tak więc siły grawitacyjne działające między dwoma ciałami tworzą parę sił: akcja-reakcja.

16-3. Stała powszechnego ciążenia G

Dla wyznaczenia wartości G konieczny jest pomiar siły przyciągania działającej między dwiema znanymi masami. Pierwszy dokładny pomiar został wykonany przez Cavendisha w 1798 roku. Znacznie dokładniejsze wartości otrzymali w dziewiętnastym wieku Poynting i Boys. Obecnie przyjęta wartość G wynosi*

$$G = 6,6720 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2,$$

z dokładnością do $0,0006 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.

Stała G może być określona metodą maksymalnego odchylenia, zilustrowaną na rys. 16-4. Dwie małe kulki, każda o masie m , są umieszczone na końcach lekkiego sztywnego pręta. Pręt ten jest zawieszony na cienkiej pionowej nici tak, że jego oś pozostaje w położeniu poziomym. Dwie duże kule, każda o masie M , są umieszczone po przeciwnych stronach pręta, blisko jego końców. Gdy duże masy znajdują się w położeniu A i B , małe masy, z powodu prawa ciążenia, będą przyciągane, wskutek czego działający na pręt moment skręcający spowoduje jego obrót w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (jeżeli całą sytuację będziemy obserwowali z góry). Gdy duże masy są w położeniu A' i B' , pręt obraca się zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Nić w trakcie skręcania działa przeciwnie skierowanym momentem skręcającym. Kąt θ , o jaki nić została skręcona, kiedy kule przesunięto z jednego położenia w drugie, jest mierzony za pomocą obserwacji odchylenia promienia świetlnego, odbitego od zwierciadła umieszczonego na nici. Stałą G możemy obliczyć z pomiaru kąta skręcenia, jeżeli znamy masy, ich odległości oraz moment kierujący nici. Siła przyciągania jest bardzo mała i na to, żeby otrzymać zauważalne skręcenie, moment kierujący nici musi mieć bardzo małą wartość. W przykładzie 1 umieszczonym na końcu tego paragrafu zostały podane pewne dane liczbowe, z których można obliczyć G .

Ciała na wadze Cavendisha pokazanej na rys. 16-4 nie są oczywiście punktami materialnymi, ale obiektami rozciągniętymi. Jednakże, ponieważ są one jednorodnymi kulami, ich działanie grawitacyjne jest takie, jak gdyby cała masa była skoncentrowana w ich środkach (paragraf 16-6).

Ponieważ G jest tak małe, więc siły grawitacyjne między ciałami znajdującymi się na Ziemi są znikome i dla zwykłych celów mogą być pominięte. Na przykład, dwa przedmioty kuliste o masie 100 kg każdy i o środkach znajdujących się w odległości 1,0 metra przyciągają się wzajemnie siłą

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2} = \frac{(6,67 \cdot 10^{-11}) \cdot (100) \cdot (100)}{1,0^2} \text{ N} = 6,7 \cdot 10^{-7} \text{ N},$$

czyli około 10^{-8} kG! Doświadczenie Cavendisha musi być naprawdę bardzo dokładne. Jest ono jednak często wykonywane na pierwszej pracowni fizycznej.

Duża wartość siły grawitacyjnej, jaką Ziemia działa na wszystkie ciała znajdujące się w pobliżu jej powierzchni, jest spowodowana szczególnie dużą masą Ziemi. Masę Ziemi możemy określić z prawa powszechnego ciążenia oraz z wartości G wyznaczonej w doświadczeniu Cavendisha. Z tego powodu mówi się, że Cavendish był pierwszym, który

* Dobry przegląd stosowanych zasad i metod pomiarowych znajduje się w artykule A. H. Cooka A New Determination of the Constant of Gravitation, *Contemporary Physics*, May 1968.

„zważyć” Ziemię. Rozważmy Ziemię o masie M_Z i na jej powierzchni przedmiot o masie m . Siła przyciągania dana jest wzorem

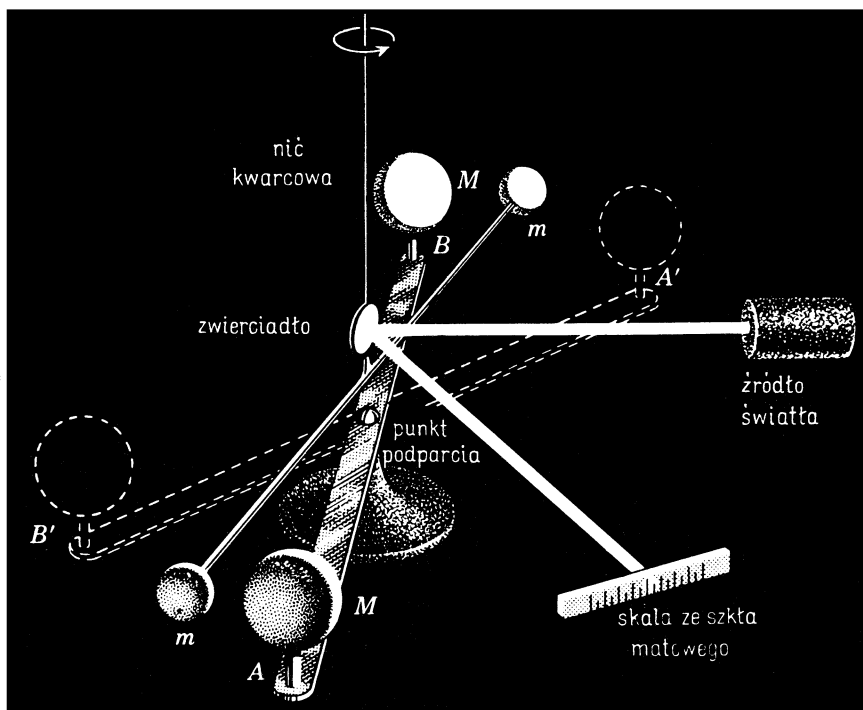
$$F = mg,$$

jak również

$$F = \frac{GmM_Z}{R_Z^2}.$$

Odległość obu ciał R_Z jest promieniem Ziemi, a g jest przyspieszeniem ziemskim na powierzchni Ziemi. Łącząc oba te równania otrzymamy

$$M_Z = \frac{gR_Z^2}{G} = \frac{(9,80 \text{ m/s}^2)(6,37 \cdot 10^6 \text{ m})^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2} = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}.$$



Rys. 16-4. Waga Cavendisha używana do doświadczalnego sprawdzenia prawa powszechnego ciążenia Newtona. Masy m , m są zawieszone na nici. Masy M , M mogą obracać się na nieruchomej podporze. Zwierciadko przymocowane do układu m , m odbija obraz włókna żarówki na skalę tak, że można mierzyć dowolny obrót tego układu

Dzieląc otrzymaną masę przez całkowitą objętość Ziemi otrzymamy średnią gęstość Ziemi, która okazuje się równa $5,5 \text{ g/cm}^3$, czyli około 5,5 raza większa niż gęstość wody. Średnia gęstość skorupy ziemskiej jest dużo mniejsza od tej wartości. Wnioskujemy stąd, że wewnątrz Ziemi złożone jest z materii o gęstości większej niż $5,5 \text{ g/cm}^3$. Z doświadczenia Cavendisha otrzymaliśmy więc informację o właściwościach rdzenia Ziemi (patrz pytanie 7 i zadanie 16).

Przykład 1. Niech małe kulki z rys. 16-4 mają masę 10,0 g każda, a lekki pręt ma długość 50,0 cm. Otrzymano, że okres drgań skrętnych takiego układu wynosi 769 s. Następnie w pobliżu kulek umieszczono dwie duże nieruchome kule o masie 10,0 kg każda tak, by wywołać maksymalne skrócenie. Odchylenie kątowe zawieszono pręta wynosi wtedy $3,96 \cdot 10^{-3}$ radianów przy odległości między środkami dużych i małych kul, wynoszącej 10,0 cm. Korzystając z tych danych obliczyć uniwersalną stałą grawitacji G .

Okres drgań wahadła torsyjnego dany jest wzorem (15-24),

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\kappa}}.$$

Dla sztywnego pręta z kulkami, zaniedbując masę samego pręta, otrzymujemy moment bezwładności

$$I = \sum mr^2 = (10,0 \text{ g}) \cdot (25,0 \text{ cm})^2 + (10,0 \text{ g}) \cdot (25,0 \text{ cm})^2,$$

czyli

$$I = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Dla $T = 769$ s otrzymujemy moment kierujący κ :

$$\kappa = \frac{4\pi^2 I}{T^2} = \frac{4\pi^2 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2}{(769 \text{ s})^2} = 8,34 \cdot 10^{-8} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2.$$

Związek między przyłożonym momentem skręcającym i kątem skrócenia dany jest wyrażeniem $\tau = \kappa\theta$. Znamy już κ oraz wartość θ przy maksymalnym wychyleniu.

Moment skręcający jest wywołany grawitacyjnym działaniem dużych kul na małe kulki. Przy danym odstępnie między nimi moment ten będzie miał wartość maksymalną, gdy linia łącząca środki dużych kul będzie tworzyć z prętem kąt prosty. Siła działająca na każdą małą kulkę wynosi

$$F = \frac{GMm}{r^2},$$

podczas gdy ramię tej siły stanowi połowę długości pręta ($l/2$). Tak więc,

$$\text{moment skręcający} = \text{siła} \cdot \text{ramię siły}$$

lub

$$\tau = 2 \frac{GMm}{r^2} \frac{l}{2}.$$

Porównując to ze związkiem

$$\tau = \kappa\theta$$

otrzymujemy

$$G = \frac{\kappa\theta r^2}{Mml} = \frac{(8,34 \cdot 10^{-8} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2) (3,96 \cdot 10^{-3} \text{ rad}) (0,100 \text{ m})^2}{10,0 \text{ kg} \cdot 0,0100 \text{ kg} \cdot 0,500 \text{ m}} = 6,63 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2.$$

Zauważmy, że wynik ten jest około 1% niższy od przyjętej wartości. Jaki czynnik, pominięty w obliczeniach, może tłumaczyć tę rozbieżność?

16-4. Masa bezwładna i masa grawitacyjna

Jak widać z równania (16-1), siła grawitacyjna działająca na ciało jest proporcjonalna do jego masy. Związek proporcjonalności między siłą grawitacyjną i masą jest powodem, że teorię grawitacji uważa się zwykle za dział mechaniki, w przeciwieństwie do teorii dotyczących innych rodzajów sił (elektromagnetycznych, jądrowych itp.).

Ważną konsekwencją tej proporcjonalności jest możliwość pomiaru masy za pomocą mierzenia działającej na nią siły grawitacyjnej. Można to zrobić używając wagi sprężynowej albo porównując siły grawitacyjne działające na masę znaną i nieznaną, tak jak w zwykłej wadze; innymi słowy, masę ciała można określić ważąc je. Daje to bardziej praktyczną i wygodną metodę pomiaru masy niż metoda wynikająca z naszej oryginalnej definicji masy (paragraf 5-4).

Powstaje pytanie, czy rzeczywiście za pomocą tych obu metod mierzymy tę samą właściwość. Słowo masa zostało użyte w dwóch zupełnie różnych sytuacjach doświadczalnych. Na przykład, jeżeli próbujemy pchnąć klocek pozostający w spoczynku na poziomej, absolutnie gładkiej powierzchni (bez tarcia) zauważamy, że wprowadzenie go w ruch wymaga pewnego wysiłku. Klocek wydaje się bezwładny i ma skłonność do pozostawania w spoczynku lub, gdy się porusza, ma skłonność do utrzymywania się w stanie ruchu. Ciężenie nie pojawia się tu w ogóle. Takiego samego wysiłku wymagałoby przyspieszenie ciała w przestrzeni kosmicznej bez ciężenia. Powodem, który wywołuje konieczność podziałania siłą w celu zmiany ruchu ciała, jest jego masa. Ta właśnie masa występuje we wzorze $F = ma$, z którego korzystaliśmy w naszych początkowych doświadczeniach z dynamiki. Tę masę nazwiemy *masą bezwładną* m . Możliwa jest też odmienna sytuacja, w której występuje masa klocka. Na przykład, utrzymywanie ciała w górze, w spoczynku nad Ziemią, wymaga pewnego wysiłku. Ciało, jeżeli go nie podtrzymamy, spadnie na Ziemię ruchem przyspieszonym. Wartość siły potrzebnej do utrzymania ciała jest równa wartości siły przyciągania grawitacyjnego między ciałem i Ziemią. Bezwładność nie odgrywa tu żadnej roli, odgrywa natomiast rolę ta właściwość ciał materialnych, która powoduje ich przyciąganie przez inne przedmioty, takie jak Ziemia. Siła jest tu dana wzorem

$$F = G \frac{m' M_Z}{R_Z^2},$$

gdzie m' jest grawitacyjną masą ciała. Czy naprawdę masa grawitacyjna m' i masa bezwładna m ciała są sobie równe? Przyjrzyjmy się temu bardziej uważnie.

Rozważmy dwa punkty materialne A i B o masach grawitacyjnych m'_A i m'_B , na które działa trzeci punkt C o masie grawitacyjnej m'_C . Niech trzeci punkt znajduje się w równej odległości r od pozostałych dwóch. Wtedy siła grawitacyjna, jaką C działa na A , wynosi

$$F_{AC} = G \frac{m'_A m'_C}{r^2},$$

a siła grawitacyjna, jaką C działa na B ,

$$F_{BC} = G \frac{m'_B m'_C}{r^2}.$$

Stosunek sił grawitacyjnych działających na A i B równy jest stosunkowi ich mas grawitacyjnych, czyli

$$\frac{F_{AC}}{F_{BC}} = \frac{m'_A}{m'_B}.$$

Przypuśćmy teraz, że trzecim ciałem C jest Ziemia. Wtedy F_{AC} i F_{BC} są, zgodnie z naszą terminologią *ciężarami* ciał A i B . Zatem

$$\frac{W_A}{W_B} = \frac{m'_A}{m'_B}.$$

W wyniku, z prawa powszechnego ciążenia otrzymujemy wniosek, że ciężary różnych ciał, znajdujących się w tym samym miejscu na Ziemi, są dokładnie proporcjonalne do ich *mas grawitacyjnych*.

Przypuśćmy teraz, że za pomocą doświadczenia dynamicznego, używając na przykład wagi opisanej w paragrafie 5-4, zmierzylśmy masy bezwładne m_A i m_B (punktowych) ciał A i B . Następnie pozwalamy tym ciałom spaść z wybranego miejsca na Ziemi i mierzymy ich przyspieszenia. W wyniku stwierdzamy, że wszystkie przedmioty o różnych *masach bezwładnych* spadają z takim samym przyspieszeniem ziemskim g , wywołanym przez ziemskie przyciąganie grawitacyjne. Ale ziemskie przyciąganie grawitacyjne działające na te ciała jest ich ciężarem; stosując drugą zasadę dynamiki otrzymujemy więc

$$\begin{aligned} W_A &= m_A g, \\ W_B &= m_B g, \end{aligned}$$

czyli

$$\frac{W_A}{W_B} = \frac{m_A}{m_B}.$$

Innymi słowy, ciężary ciał znajdujących się w tym samym miejscu na Ziemi są dokładnie proporcjonalne również do ich mas bezwładnych. Masa bezwładna i masa grawitacyjna są więc przynajmniej proporcjonalne do siebie. W rzeczywistości okazuje się, że są one identyczne.

Newton opracował doświadczenie pozwalające dokładnie sprawdzić równoważność masy bezwładnej i grawitacyjnej. Wracając do paragrafu 15-5, do wyprowadzenia wzoru na okres wahadła prostego, stwierdzamy, że okres ten (dla małych kątów) jest dany wzorem

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{m'g}},$$

gdzie m w liczniku jest masą bezwładną ciężarka wahadła, a m' w mianowniku jego masą grawitacyjną, tak że $m'g$ daje wartość grawitacyjnego przyciągania działającego na ciężarek. Jedynie zakładając równość m i m' (założenie to przyjmowaliśmy milcząco), otrzymamy dla okresu wyrażenie

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Newton wykonał ciężarek wahadła w formie cienkiej łupiny. Do takiego wydrążonego ciężarka wkładał on różne substancje, uważając zawsze, żeby ich ciężar, określony w wyniku ważenia, był taki sam. Tak więc we wszystkich przypadkach siła działająca na wahadło była taka sama przy tym samym kącie odchylenia. Ponieważ zewnętrzny kształt ciężarka pozostawał zawsze bez zmiany, więc i powietrze działało na poruszające się wahadło taką samą siłą oporu. Przy wymianie substancji wewnątrz ciężarka jakkolwiek różnica mogła być wywołana jedynie różnicą w masach bezwładnych. Taka różnica powinna ujawnić się poprzez zmianę okresu wahadła. Ale we wszystkich przypadkach Newton otrzymał ten sam okres wahadła, zawsze dany wzorem $T = 2\pi \sqrt{l/g}$. Wywnioskował stąd, że $m = m'$, czyli że bezwładne i grawitacyjne masy są równoważne.

W 1909 roku Eötvös zestawił aparaturę, która mogła rejestrować różnicę siły ciężenia równą $5 \cdot 10^{-9}$ wartości tej siły. Z taką więc dokładnością otrzymał wynik dowodzący, że równe masy bezwładne zawsze doświadczają równych sił grawitacyjnych. O wykonaniu doświadczenia Eötvösa w ulepszonej wersji zakomunikował w 1964 roku R. H. Dicke ze swoimi współpracownikami. Zwiększył on dokładność oryginalnego doświadczenia kilkaset razy*.

W fizyce klasycznej równoważność masy grawitacyjnej i bezwładnej była uważana za godny uwagi, ale nie mający głębszego znaczenia, przypadek. W fizyce współczesnej natomiast równoważność ta rozpatrywana jest jako zasadnicza cecha, która wiedzie do głębszego zrozumienia grawitacji (patrz paragraf 16-13). Odkrycie jej było w istocie ważnym tropem, który doprowadził do powstania ogólnej teorii względności.

16-5. Zmiany przyspieszenia ziemskiego

Przyspieszenie ziemskie przyjmowaliśmy dotąd za stałe. Jest jednak rzeczą oczywistą, że jak wynika z prawa ciężenia Newtona, g będzie zmieniać się wraz z wysokością, czyli z odległością od środka Ziemi. Podkreślaliśmy już to, w szczególności przy omawianiu układu Księżyc-jabłko. Obliczmy zmianę wartości g , jaka powstaje w miarę wzrostu odległości od powierzchni Ziemi. Z równania (16-1),

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

po zróżniczkowaniu względem r otrzymujemy

$$dF = -2 \frac{Gm_1 m_2}{r^3} dr.$$

Z obu tych równań otrzymujemy

$$\frac{dF}{F} = -2 \frac{dr}{r}.$$

* Elegancki przegląd tego zagadnienia znajduje się w artykule R. H. Dicke, The Eötvös Experiment, *Scientific American*, December 1961.

Tak więc, względna zmiana F równa się podwojonej względnej zmianie r . Znak minus oznacza, że siła maleje ze wzrostem odległości. Jeżeli za masę Ziemi przyjmiemy m_1 , a za masę przedmiotu m_2 , wtedy wywołana przez Ziemię siła ciężenia działająca na przedmiot będzie równa

$$F = m_2 g$$

i zwrócona w kierunku Ziemi. Różniczkując to wyrażenie otrzymujemy

$$dF = m_2 dg;$$

następnie dzieląc ostatnie dwa równania stronami, znajdujemy, że

$$\frac{dF}{F} = \frac{dg}{g} = -2 \frac{dr}{r}. \quad (16-3)$$

Na przykład wznosząc się 15 km nad powierzchnię Ziemi zmieniamy r od około 6400 km do 6415 km; względny wzrost promienia wynosi więc około 1/400. W związku z tym*, na tej odległości g musi się zmienić o około 1/200, czyli od około 980 cm/s² do około 975 cm/s². Blisko powierzchni Ziemi g jest więc istotnie prawie stałe na danej szerokości geograficznej. Na większych wysokościach, charakterystycznych dla typowej orbity satelitarnej lub dla orbity Księżyca, g maleje wyraźnie, co przedstawia tablica 16-1.

Tablica 16-1

Zmiany g z wysokością dla szerokości geograficznej 45°

Wysokość m	g m/s ²	Wysokość m	g m/s ²
0	9,806	32 000	9,71
1 000	9,803	100 000	9,60
4 000	9,794	500 000	8,53
8 000	9,782	1 000 000*	7,41
16 000	9,757	380 000 000**	0,00271

* Wysokość typowej orbity satelitarnej.

** Promień orbity Księżyca.

Pomiary g są podstawowym źródłem informacji o kształcie Ziemi. Zwykle nie rozważamy rzeczywistej powierzchni Ziemi, ale wyimaginowaną powierzchnię zamkniętą, zwaną *geoidą*. Nad oceanami geoida zdefiniowana jest jako powierzchnia pokrywająca się ze średnim poziomem morza, podczas gdy nad kontynentami określa się ją jako przedłużenie tego poziomu; położenie geoidy można teoretycznie znaleźć przez wykopanie do głębokości poziomu morza kanałów poprzez kontynenty i zaobserwowanie średniego poziomu wody. Geoida jest powierzchnią stałego potencjału grawitacyjnego; w każdym punkcie kierunku linii pionu tworzy z nią kąt prosty.

Starożytni Grecy sądzili, że Ziemia jest okrągła, a jeden z nich, Eratostenes (ok. 276—194 p.n.e.), zakładając kulistość zmierzył nawet jej promień. Otrzymał wartość 7400 km, którą możemy porównać ze współczesną wartością 6371 km. Później za pomocą pomiaru przekonano się, że w dobrym, drugim przybliżeniu geoida nie jest kulą, ale elipsoidą obrotową spłaszczoną wzdłuż osi obrotu Ziemi i wypukłą na równiku. Promień na równiku jest w rzeczywistości większy od promienia na biegunach o 21 km. Spłaszczenie to jest wywołane przez efekty odśrodkowe występujące w obracającej się, plastycznej Ziemi. Powierzchnia geoidy nie jest dokładnie elipsoidalna. Powierzchnia ta, dla najlepiej dopasowanej elipsoidy, leży na zewnątrz niej pod masywami góorskimi i wewnątrz — nad oceanami.

* Równanie (16-3) jest równaniem różniczkowym i jest ściśle. Odpowiednie równanie otrzymane przez zastąpienie dr skończoną zmianą Δr jest dobrym przybliżeniem, jeżeli tylko $\Delta r/r$ jest bardzo małe.

Fakt, że równik leży dalej od środka Ziemi niż bieguny, oznacza, że w trakcie oddalania się od równika (szerokość geograficzna 0°) w kierunku jednego z biegunów (szerokość geograficzna 90°) powinien występować stały wzrost mierzonej wartości g . Przedstawiono to w tablicy 16-2. Jednakże, jak wykazuje przykład 2, około połowa obserwowanej zmiany może być wyjaśniona za pomocą innego efektu, a mianowicie zmiany efektywnej wartości g wywołanej ruchem obrotowym Ziemi. Gdyby na przykład Ziemia obracała się dostatecznie szybko, wtedy przedmioty znajdujące się na jej powierzchni na równiku wydawałyby się nieważkie, co oznacza, że efektywna wartość $g = (W/m)$ byłaby równa zero. Dla prędkości obrotowych, mniejszych od tej prędkości krytycznej, g ma określoną, różną od zera, wartość, która jest jednak mniejsza od wartości, jaką miałyby g w tym samym punkcie na nieobracającej się Ziemi.

Tablica 16-2

Zależność g (mierzonego na poziomie morza) od szerokości geograficznej

Szerokość geograficzna	g m/s^2	Szerokość geograficzna	g m/s^2
0°	9,78039	50°	9,81071
10°	9,78195	60°	9,81918
20°	9,78641	70°	9,82608
30°	9,79329	80°	9,83059
40°	9,80171	90°	9,83217

W 1959 roku zauważono, że orbita sztucznego satelity Ziemi, Vanguard, obliczona przy użyciu wartości g opartych o elipsoidalny kształt geoidy, niedokładnie zgadza się z orbitą obserwowaną. Wywnioskowano, że najlepszym przybliżeniem geoidy nie jest elipsoida obrotowa, ale powierzchnia o kształcie nieco gruszkowatym, przy czym węższy koniec „gruszki” znajduje się na półkuli północnej i rozciąga się około 15 m ponad elipsoidę. Ruch satelity jest uzależniony od wartości, jaką przyjmuje g w miejscu jego położenia. I tak sztuczny satelita Ziemi stanowi wygodną sondę do badania wartości g w pobliżu powierzchni Ziemi i jest źródłem informacji dotyczących kształtu geoidy*.

Przykład 2. Wpływ ruchu obrotowego Ziemi na wartość g . Rysunek 16-5 przedstawia schemat Ziemi widzianej od strony Bieguna Północnego. Pokazaliśmy na nim powiększony rysunek ciała o masie m , wiszącego na wadze sprężynowej umieszczonej na równiku. Na ciało to działają następujące siły: skierowany ku górze naciąg wagi sprężynowej w , który jest pozornym ciężarem ciała, oraz skierowane w dół przyciąganie grawitacyjne Ziemi $F = GmM_z/R_z^2$. Ciało nie jest w stanie równowagi, gdyż doznaje ono przyspieszenia dośrodkowego a_R związanego z ruchem obrotowym Ziemi. Musi zatem istnieć siła wypadkowa działająca na ciało w kierunku środka Ziemi. W wyniku siła przyciągania grawitacyjnego F (prawdziwy ciężar ciała) musi przewyższać siłę naciągu wagi (pozorny ciężar ciała).

Z drugiej zasady dynamiki otrzymujemy

$$F - w = ma_R,$$

$$\frac{GM_z m}{R_z^2} - mg = ma_R,$$

skąd

$$g = \frac{GM_z}{R_z^2} - a_R \quad \text{na równiku.}$$

Na biegunach $a_R = 0$, więc

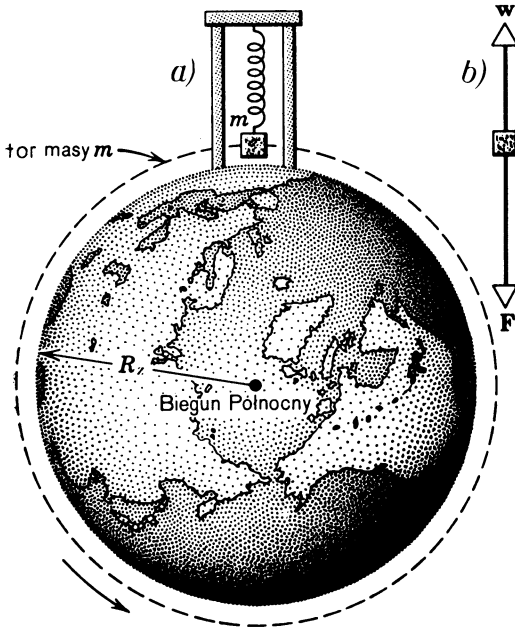
$$g = \frac{GM_z}{R_z^2} \quad \text{na biegunach.}$$

Taką wartość g otrzymalibyśmy wszędzie (zakładając kulisty kształt Ziemi), gdyby można było pominąć ruch obrotowy Ziemi.

* Patrz artykuły: D. G. King-Hele, Satellite Orbits and Their Geophysical Implications, *Contemporary Physics*, April 1961, D. G. King-Hele i G. E. Cook, Refining the Shape of the Earth, *Nature*, 246, 86 (1973) oraz D. G. King-Hele, The Shape of the Earth, *Science*, June 25, 1976.

W rzeczywistości, poza równikiem, przyspieszenie dośrodkowe nie jest skierowane do środka Ziemi. Szczegółowa analiza omawianego zagadnienia powinna więc być dwuwymiarowa. Sytuacja ekstremalna występuje jednak na równiku. Tam

$$a_R = \omega^2 R_Z = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 R_Z = \frac{4\pi^2 R_Z}{T^2},$$



Rys. 16-5. Przykład 2. Wpływ ruchu obrotowego Ziemi na ciężar ciała mierzony za pomocą wagi sprężynowej

gdzie ω jest prędkością kątową Ziemi w jej ruchu obrotowym, T okresem obrotu, a R promieniem Ziemi. Korzystając z wartości

$$R_Z = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m},$$

$$T = 8,64 \cdot 10^4 \text{ s}$$

otrzymujemy

$$a_R = 0,0336 \text{ m/s}^2.$$

Porównując z tablicą 16-2 widzimy, że omawiany efekt jest wystarczający do wyjaśnienia przeszło połowy różnicy między wartościami g obserwowanymi na małych i dużych szerokościach geograficznych.

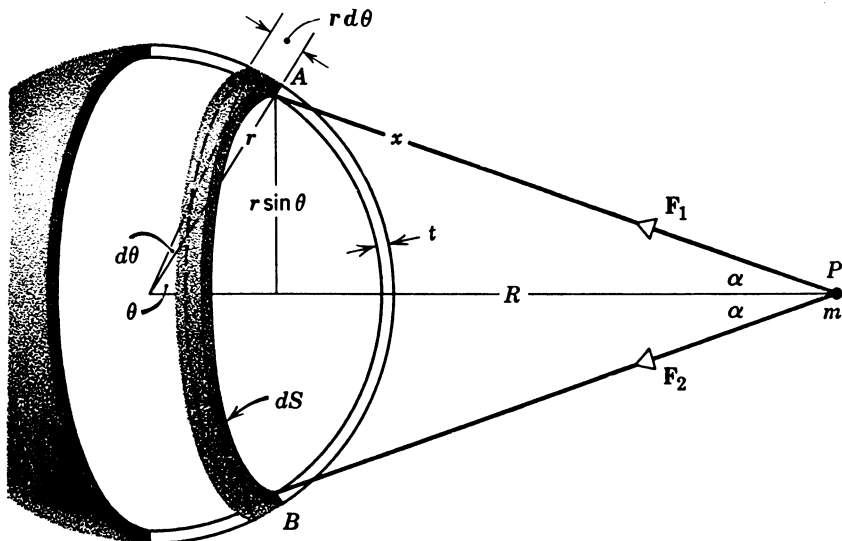
16-6. Działanie grawitacyjne masy rozmieszczonej kulisto-symetrycznie

Korzystaliśmy poprzednio z faktu, że duża kula przyciąga ciało leżące na zewnątrz tak, jakby cała masa kuli była skoncentrowana w jej środku. Sprawdźmy teraz to założenie.

Rozważmy powłokę kulistą o jednostajnej gęstości, której grubość t jest mała w porównaniu z promieniem r (rys. 16-6). Chcemy znaleźć siłę grawitacyjną, jaką powłoka ta działa na zewnętrzny punkt materialny P o masie m .

Zakładamy, że każdy mały element powłoki działa na P siłą, która jest proporcjonalna do masy elementu, odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między nim i P oraz skierowana wzdłuż łączącej je prostej. Musimy następnie otrzymać działającą na P siłę wypadkową wywołaną przez wszystkie elementy powłoki kulistej.

Element powłoki w punkcie A przyciąga masę m siłą F_1 . Element mający taką samą masę, ale znajdujący się w przeciwnym, jednakowo oddalonym od m , punkcie B , przyciąga m siłą F_2 . Wypadkową tych dwóch sił jest $F_1 + F_2$. Zauważmy jednak, że pionowe składowe tych sił znoszą się, podczas gdy składowe poziome, $F_1 \cos \alpha$ i $F_2 \cos \alpha$, są sobie równe. Dzieląc powłokę kulistą na takie pary elementów, zauważamy od razu, że wszystkie działające na m siły poprzeczne znoszą się parami. Element masy znajdujący się na górnej półkuli działa na m siłą, której składowa skierowana do góry jest zrównoważona przez skierowaną do dołu składową siły, jaką działa równy, symetrycznie położony element masy, znajdujący się na dolnej półkuli powłoki. Do znalezienia działającej na m siły wypadkowej, wywołanej przez powłokę, wystarczy rozważać jedynie składowe poziome.



Rys. 16-6. Przyciąganie grawitacyjne punktu materialnego o masie m przez wycinek dS kulistej powłoki materii

Jako element masy naszej powłoki weźmy teraz pasek kołowy dS , tak jak na rysunku. Jego długość wynosi $2\pi(r \sin \theta)$, szerokość $r d\theta$ i grubość t . Zatem pasek ten ma objętość

$$dV = 2\pi t r^2 \sin \theta d\theta.$$

Oznaczmy gęstość powłoki przez ρ . Wtedy masa zawarta w rozważanym pasku będzie równa

$$dM = \rho dV = 2\pi \rho t r^2 \sin \theta d\theta.$$

Wywołana przez dM siła, która działa na punkt materialny o masie m znajdujący się w P , ma kierunek poziomy. Jej wartość

$$dF = G \frac{m dM}{x^2} \cos \alpha = 2\pi G t \rho m r^2 \frac{\sin \theta d\theta}{x^2} \cos \alpha. \quad (16-4)$$

Zmienne x , α i θ nie są niezależne. Z rysunku znajdujemy, że

$$\cos \alpha = \frac{R - r \cos \theta}{x}. \quad (16-5)$$

Ponieważ na podstawie twierdzenia cosinusów

$$x^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta, \quad (16-6)$$

więc

$$r \cos \theta = \frac{R^2 + r^2 - x^2}{2R}. \quad (16-7)$$

Różniczkując związek (16-6) otrzymujemy

$$2x dx = 2Rr \sin \theta d\theta,$$

albo

$$\sin\theta d\theta = \frac{x}{Rr} dx. \quad (16-8)$$

Podstawimy teraz (16-7) do (16-5), a następnie (16-5) i (16-8) do równania (16-4). W wyniku tej operacji eliminujemy θ i α i otrzymujemy związek

$$dF = \frac{\pi G \rho m r}{R^2} \left(\frac{R^2 - r^2}{x^2} + 1 \right) dx.$$

Jest to wyrażenie na siłę, jaką kołowy pasek dS działa na punkt o masie m .

Musimy teraz wziąć pod uwagę wszystkie elementy masy i wykonać sumowanie po wszystkich paskach składających się na powłokę. Operacja ta jest całkowaniem po całej powłoce względem dx . Ale x zmienia się w przedziale od wartości minimalnej $R-r$ do maksymalnej $R+r$.

Ponieważ

$$\int_{R-r}^{R+r} \left(\frac{R^2 - r^2}{x^2} + 1 \right) dx = 4r,$$

więc dla siły wypadkowej otrzymujemy

$$F = \int_{R-r}^{R+r} dF = G \frac{(4\pi r^2 \rho t) m}{R^2} = G \frac{Mm}{R^2}, \quad (16-9)$$

gdzie

$$M = (4\pi r^2 t \rho)$$

jest całkowitą masą powłoki. Jest to dokładnie taki sam wynik, jaki otrzymalibyśmy dla siły działającej między punktami materialnymi o masach M i m , znajdującymi się w odległości R . Udowodniliśmy więc, że powłoka kulista o jednostajnej gęstości przyciąga znajdujący się na zewnątrz punkt materialny tak, jakby cała masa była skoncentrowana w jej środku.

Pełna kula może być rozpatrywana tak, jakby była złożona z dużej ilości współśrodkowych powłok. Jest to słuszne dla takiej kuli, w której każda powłoka kulista ma jednorodną gęstość, nawet wtedy, gdy różne powłoki mają różne gęstości. W związku z tym Ziemia, Księżyc czy Słońce, rozważane jako takie właśnie kule, mogą być, jeśli chodzi o ich działanie grawitacyjne na ciała znajdujące się na zewnątrz, uważane za punkty materialne.

Zauważmy, że dowód nasz stosuje się jedynie do kul i tylko w sytuacjach, gdy gęstość w całej objętości kuli jest stała lub jest funkcją tylko promienia.

Interesujący i mający pewne znaczenie wynik otrzymuje się dla siły, jaką powłoka kulista działa na punkt materialny znajdujący się *wewnątrz* niej. Siła ta jest równa zeru. Przy dowodzeniu tego faktu korzystamy z rys. 16-7, na którym m znajduje się wewnątrz powłoki. Granicami całkowania są teraz $r-R$ i $R+r$. Ale

$$\int_{r-R}^{R+r} \left(\frac{R^2 - r^2}{x^2} + 1 \right) dx = 0,$$

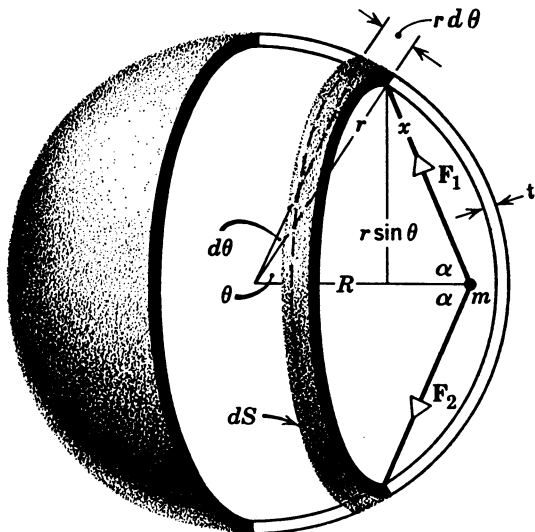
czyli $F = 0$.

Wynik ten, chociaż nie tak oczywisty, jednak jest możliwy, gdyż elementy powłoki, znajdujące się po przeciwnych stronach m , działają teraz na m siłami przeciwnie skierowanymi. Całkowite zniesienie się tych sił uwarunkowane jest tym, że siły zmieniają się dokładnie jak odwrotność kwadratu odległości dwóch punktów (zadanie 18). Ważne konsekwencje tego wyniku są omawiane w rozdziałach poświęconych elektryczności (t. II). Zobaczymy wtedy, że siła elektrostatyczna działająca między naładowanymi cząstkami również zależy odwrotnie proporcjonalnie od kwadratu odległości między nimi. W grawitacji powyższy wynik jest interesujący przede wszystkim ze względu na to, że przewiduje on, *przy założeniu stałej gęstości Ziemi*, malenie siły ciężkości działającej na ciało w miarę zagłębienia się jego w Ziemi. Część materii Ziemi znajdująca się w powłokach leżących na zewnątrz ciała nie wywiera nań żadnej siły. W środku Ziemi siła

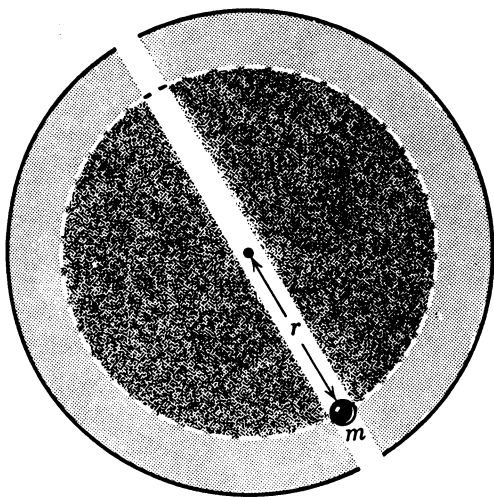
ciężkości jest równa zeru. W związku z tym, *gdyby Ziemia miała stałą gęstość, g byłoby maksymalne na powierzchni Ziemi i malałoby zarówno w górę, jak i w dół od tego miejsca. Czy można wyobrazić sobie kuliśto-symetryczny rozkład masy* wewnątrz Ziemi, który nie dałby takiego wyniku?* (Patrz zadanie 16.)

Przykład 3. Przypuśćmy, że można by przekopać przez Ziemię tunel, przebiegający z jednej strony Ziemi na drugą wzdłuż jej średnicy, tak jak pokazuje rys. 16-8.

(a) Pokazać, że ruch ciała upuszczonego do tunelu jest ruchem harmonicznym prostym. Pominąć wszystkie siły tarcia i założyć, że Ziemia ma jednorodną gęstość.



Rys. 16-7. Przyciąganie grawitacyjne punktu materialnego o masie m przez wycinek dS kulistej powłoki materii. Punkt materialny znajduje się tutaj wewnątrz powłoki



Rys. 16-8. Przykład 3. Punkt materialny poruszający się w tunelu przechodzącym przez Ziemię

Przyciąganie grawitacyjne Ziemi działające na punkt materialny znajdujący się w odległości r od środka Ziemi jest w całości wywołane przez tę część materii Ziemi, która zawarta jest w powłokach wewnętrznych w stosunku do położenia punktu. Zewnętrzne powłoki nie działają żadną siłą. Załóżmy, że gęstość Ziemi jest stała i wynosi ρ . Wtedy masa zawarta w kuli o promieniu r jest

$$M' = \rho V' = \frac{4\pi\rho r^3}{3}.$$

* W związku z tym patrz artykuł: K. Sundaralingam, Comment on The Radial Variation of g in a Spherically Symmetric Mass with Nonuniform Density, *American Journal of Physics*, September 1974.

Dla celów oddziaływania grawitacyjnego można uważać, że masa ta jest skoncentrowana w środku Ziemi. W związku z tym siła działająca na punkt o masie m wynosi

$$F = \frac{-GM'm}{r^2}.$$

Znak minus oznacza, że siła jest przyciągająca i zwrócona w kierunku środka Ziemi.

Podstawiając znaną wartość M' otrzymujemy

$$F = -G \frac{\rho 4\pi r^3 m}{3r^2} = -\left(G\rho \frac{4\pi m}{3}\right)r = -kr;$$

$G\rho \cdot 4\pi m/3$ jest tu stałą, którą oznaczyliśmy k . Siła jest więc proporcjonalna do wychYLENIA r , ale przeciwnie skierowana. Jest to właśnie kryterium ruchu harmonicznego prostego.

(b) Gdyby za pomocą takiego tunelu dostarczano przesyłki pocztowe, ile czasu upłynęłoby od chwili wysłania przesyłki na jednym końcu do chwili odbioru na drugim?

Okres tego prostego ruchu harmonicznego wynosi

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{3m}{G\rho \cdot 4\pi m}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}.$$

Przyjmijmy, że $\rho = 5,51 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ oraz $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$. Daje to

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}} = \sqrt{\frac{3\pi}{(6,67 \cdot 10^{-11})(5,51 \cdot 10^3)}} \text{ s} = 5050 \text{ s} = 84,2 \text{ min}.$$

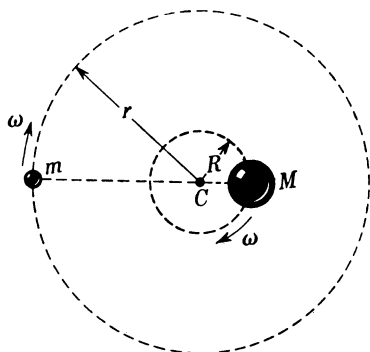
Czas dostarczenia przesyłki, równy połowie okresu, wynosi około 42 min. Zauważmy, że czas ten nie zależy od masy przesyłki.

W rzeczywistości Ziemia nie ma gęstości jednorodnej. Przypuśćmy, że ρ nie jest stałe, lecz jest pewną funkcją r . Jaki miałyby to wpływ na nasze zadanie?

16-7. Ruchy planet i satelitów

Ruchy ciał Układu Słonecznego mogą być wyprowadzone z zasad dynamiki i prawa powszechnego ciążenia. Jak zauważył Kepler (patrz str. 388), wszystkie planety poruszają się po orbitach eliptycznych, ze Słońcem znajdującym się w jednym z ognisk tych elips. Rozpatrując szczególny przypadek orbit kołowych, możemy zebrać dużo wiadomości o ruchu planetarnym. Pominiemy siły działające pomiędzy planetami, rozpatrując jedynie oddziaływanie między Słońcem i daną planetą. Rozważania te stosują się równie dobrze do ruchu satelity (naturalnego czy sztucznego) poruszającego się wokół planety.

Rozważmy dwa ciała kuliste o masach M i m , poruszające się pod wpływem wzajemnego przyciągania grawitacyjnego po orbitach kołowych. Środek masy tego układu dwóch ciał leży na łączącym je odcinku w takim punkcie C , dla którego $mr = MR$ (rys. 16-9). Jeżeli



Rys. 16-9. Dwa ciała poruszające się po orbitach kołowych pod wpływem wzajemnego przyciągania grawitacyjnego. Oba ciała mają tę samą prędkość kątową ω

na układ ten nie działają żadne siły zewnętrzne, środek masy nie ma przyspieszenia. W tym przypadku za początek naszego układu odniesienia wybierzemy punkt C . Duże ciało o masie M porusza się po orbicie o stałym promieniu R , a małe ciało o masie m po orbicie o stałym promieniu r . Oba ciała mają tę samą prędkość kątową ω . Do wytworzenia takiej sytuacji siła grawitacyjna działająca na każde ciało musi wywoływać konieczne przyspieszenie dośrodkowe. Ponieważ siły grawitacyjne stanowią tu parę akcja-reakcja, więc siły dośrodkowe muszą być równe, lecz przeciwnie skierowane. Oznacza to, że $m\omega^2 r$ (wartość siły dośrodkowej, jaką M działa na m) musi równać się $M\omega^2 R$ (wartość siły dośrodkowej, jaką m działa na M). Prawdziwość tego faktu wynika od razu z równości $mr = MR$, skąd $m\omega^2 r = M\omega^2 R$. Specyficznym dla tego przypadku wymaganiem jest następnie równość siły grawitacyjnej działającej na każde z tych ciał oraz siły dośrodkowej koniecznej do utrzymania tego ciała w ruchu po orbicie kołowej, czyli

$$\frac{GMm}{(R+r)^2} = m\omega^2 r. \quad (16-10)$$

Jeżeli jedno ciało ma masę dużo większą od masy drugiego, jak jest w przypadku Słońca i planety, to odległość dużego ciała od środka masy jest dużo mniejsza niż odległość ciała mniejszego. Załóżmy więc, że R można pominąć w porównaniu z r . Związek (16-10) przyjmuje wtedy postać

$$GM_S = \omega^2 r^3,$$

gdzie M_S jest masą Słońca. Gdy prędkość kątową wyrazimy w zależności od okresu obrotu, $\omega = 2\pi/T$, wtedy otrzymamy

$$GM_S = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2}. \quad (16-11)$$

Związek ten jest podstawowym równaniem ruchu planetarnego; pozostaje on również słuszny dla orbit eliptycznych, jeżeli r oznaczać będzie dużą półoś elipsy. Rozważmy niektóre konsekwencje tego równania.

Jedną z natychmiastowych konsekwencji równania (16-11) jest trzecie prawo Keplera ruchu planetarnego w szczególnym przypadku orbit kołowych. Możemy bowiem równanie (16-11) przedstawić w postaci

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_S} r^3.$$

Zauważmy, że w wyrażeniu tym nie pojawia się masa planety. Wyrażenie $4\pi^2/GM_S$ jest tutaj stałą, jednakową dla wszystkich planet.

Równanie (16-11) może być wykorzystane do określenia masy Słońca, jeżeli znamy dla jakiegokolwiek planety okres obrotu T i promień orbity r . Na przykład, okres obrotu Ziemi wynosi

$$T = 365 \text{ dni} = 3,15 \cdot 10^7 \text{ s},$$

podczas gdy promień jej orbity

$$r = 150\,000\,000 \text{ km} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}.$$

Tak więc

$$M_S = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = \frac{(4\pi^2)(1,5 \cdot 10^{11} \text{ m})^3}{(6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(3,15 \cdot 10^7 \text{ s})^2} \cong 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}.$$

Masa Słońca wynosi więc około 300 000 mas Ziemi. Błąd popełniony w wyniku pominięcia R w porównaniu z r jest wyraźnie znikomy, gdyż

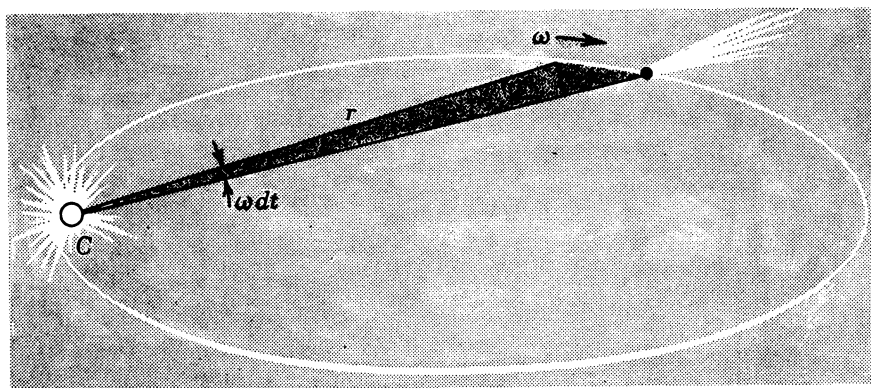
$$R = \frac{m}{M} r = \frac{1}{300\,000} r \cong 500 \text{ km}; \quad \frac{R}{r} 100\% \cong \frac{1}{3000} \%.$$

W podobny sposób możemy wyznaczyć masę Ziemi znając okres obrotu Księżyca i promień jego orbity (patrz zadanie 22).

Równanie (16-11) pozwala nam określić promień orbity jakiejkolwiek planety obracającej się dokoła Słońca, jeżeli znamy masę Słońca M_S i okres T obrotu planety. Ta metoda określania odległości planety od Słońca jest całkiem praktyczna, gdyż okres obrotu łatwo otrzymać z obserwacji astronomicznych.

Równanie (16-11) spełnione jest również dla ruchu sztucznych satelitów Ziemi. W równaniu tym musimy jedynie podstawić masę Ziemi M_Z w miejsce M_S .

Drugie prawo Keplera ruchu planetarnego (patrz str. 388) musi być, oczywiście, spełnione dla orbit kołowych. Dla takich orbit zarówno ω , jak i r są stałe i linia łącząca planetę i Słońce zakreśla w równych czasach równe pola. Jednakże dla rzeczywistych orbit eliptycznych, a także dla dowolnych orbit zarówno r , jak i ω na ogół zmieniają się. Rozważmy ten przypadek.



Rys. 16-10. Komet* poruszająca się po torze eliptycznym ze Słońcem C znajdującym się w ognisku elipsy. W czasie dt komet (lub planeta) zakreśla kąt $d\theta = \omega dt$

Na rys. 16-10 pokazane jest ciało (punkt materialny) obracające się wokół C wzdłuż pewnego dowolnego toru. Pole zakreślone przez promień wodzący w bardzo krótkim przedziale czasu Δt zostało zacieniowane na rysunku. Pole to, pomijając mały kawałek trójkątny na końcu, wynosi połowę iloczynu podstawy i wysokości lub, w przybliżeniu, $\frac{1}{2}(r\omega\Delta t)r$. W granicy $\Delta t \rightarrow 0$ wyrażenie to staje się coraz bardziej dokładne, ponieważ pole małego trójkąta dąży do zera szybciej niż dużego. Chwilowa prędkość połowa wynosi więc

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(r\omega\Delta t)r}{\Delta t} = \frac{1}{2}\omega r^2.$$

Ale $m\omega r^2$ jest po prostu momentem pędu cząstki obracającej się dokoła C . Tak więc drugie prawo Keplera, wymagające stałości prędkości połowej $\frac{1}{2}\omega r^2$, jest całkowicie równoważne

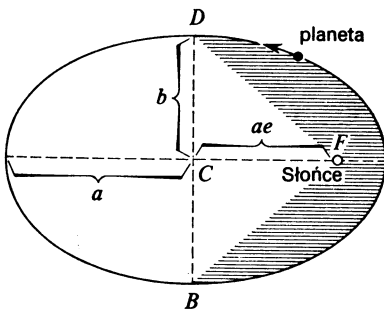
* Fascynująca dyskusja własności i możliwego pochodzenia komet znajduje się w artykule: Fred L. Whipple, The Nature of Comets, *Scientific American*, February 1974.

stwierdzeniu, że *moment pędu jakiejkolwiek planety obracającej się dokoła Słońca jest wielkością stałą*. Moment pędu ciała obracającego się dokoła C nie może być zmieniony za pomocą siły zwróconej w kierunku C . Drugie prawo Keplera pozostałoby więc w mocy dla dowolnej siły *centralnej*, czyli siły zwróconej w kierunku Słońca. Dokładna postać tej siły — jej zależność od odległości lub innych własności ciał — nie może być za pomocą tego prawa wykryta.

W przeciwieństwie do tego, pierwsze prawo Keplera wymaga, żeby siła grawitacyjna zależała dokładnie od odwrotności kwadratu odległości między dwoma ciałami, czyli od $1/r^2$. Okazuje się, że tylko taka siła może być przyczyną eliptycznych orbit planetarnych (ze Słońcem znajdującym się w jednym z ognisk elipsy).

Przykład 4. Planeta obraca się wokół Słońca po eliptycznej orbicie o mimośrodku e . Znaleźć stosunek czasu spędzanego przez planetę pomiędzy końcami małej osi elipsy po stronie słonecznej do czasu obrotu.

Zgodnie z pierwszym prawem Keplera Słońce znajduje się w jednym z ognisk elipsy (na rys. 16-11 przedstawiona jest elipsa, która ma dużo większy mimośród niż orbita jakiejkolwiek planety Układu Słonecznego). Duża oś (o długości $2a$) i mała oś (o długości $2b$) przecinają się w środku C elipsy. Zgodnie z definicją mimośrodu odległość CF od środka elipsy do ogniska F wynosi ae . Zauważmy, że dla orbity kołowej mimośród wynosiłby zero.



Rys. 16-11. Przykład 4. Planeta krąży wokół Słońca po orbicie eliptycznej

Niech okres obrotu wynosi T , a czas potrzebny planecie na podróż od B do D po przysłonecznej części elipsy wynosi t . Wtedy dla A = pole elipsy i A' = pole zacieniowane otrzymujemy z zasady zachowania momentu pędu (albo równoważnie przez stwierdzenie, że prędkość polowa jest stała)

$$\frac{A}{T} = \frac{A'}{t}.$$

Ale $A' = \frac{1}{2}A - A''$, gdzie A'' = pole trójkąta BDF . Tak więc

$$\frac{t}{T} = \frac{A'}{A} = \frac{\frac{1}{2}A - A''}{A} = \frac{1}{2} - \frac{A''}{A} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}(2b)(ae)}{\pi ab}$$

oraz

$$\frac{t}{T} = \frac{1}{2} - \frac{e}{\pi}.$$

Zauważmy, że wartość ta sprowadza się do $\frac{1}{2}$ dla orbity kołowej ($e = 0$). Dlaczego dla orbit eliptycznych stosunek ten jest mniejszy niż jedna druga?

Zasady dynamiki Newtona i jego prawo powszechnego ciążenia pozostają w prawie idealnej zgodności z obserwacjami astronomicznymi*. W naszych obliczeniach rozpatrywaliśmy ruch planety wokół Słońca

* Duża oś orbity eliptycznej Merkurego obraca się nieco szybciej niż było to przewidziane przez mechanikę Newtona przy uwzględnieniu zaburzającego wpływu innych planet. Zjawisko to znajduje wyjaśnienie w ogólnej teorii względności.

jako zagadnienie „dwóch ciał”. Widzieliśmy jednak, że ruch Słońca mógł być, przy zachowaniu wysokiego stopnia dokładności, pominięty z powodu dużego stosunku masy Słońca do masy planety. Fakt ten redukuje zagadnienie do ruchu jednego ciała wokół centrum siły. Gdybyśmy wymagali większej dokładności, musielibyśmy włączyć do naszych rozważań ruch Słońca (patrz zadanie 28). W rzeczywistości, chcąc to zagadnienie potraktować bardzo dokładnie, musielibyśmy wziąć pod uwagę wpływ innych planet i satelitów na ruch Słońca i danej planety. Takie zagadnienie „wielu ciał” jest niełatwe, ale można je rozwiązać z dużą dokładnością metodami przybliżonymi. Wyniki takich obliczeń pozostają w doskonałej zgodzie z obserwacjami astronomicznymi.

16-8. Pole grawitacyjne

Istotą grawitacji jest to, że dwie masy działają wzajemnie na siebie siłami. Grawitację możemy traktować jako bezpośrednie oddziaływanie między dwoma ciałami obdarzonymi masą. Taki punkt widzenia nazywa się koncepcją *działania na odległość*; ciała oddziałują nawet wtedy, gdy nie stykają się ze sobą. Odminnym punktem widzenia jest koncepcja pola, według której ciało obdarzone masą modyfikuje w pewien sposób otaczającą przestrzeń, tworząc tzw. *pole grawitacyjne*. Pole to działa następnie na każde inne znajdujące się w nim ciało obdarzone masą, wywierając nań siłę przyciągania grawitacyjnego. Pole odgrywa więc rolę pośrednią w naszym rozumieniu sił działających między dwoma ciałami obdarzonymi masą. Zgodnie z tym poglądem zagadnienie nasze można podzielić na dwie oddzielne części. Musimy, po pierwsze, określić pole wytworzone przez dany układ ciał obdarzonych masą; po drugie, musimy obliczyć siłę, jaką pole to działa na inne umieszczone w nim ciała materialne.

Rozważmy na przykład Ziemię jako izolowaną masę. Jeżeli w pobliżu Ziemi umieścimy teraz ciało, będzie nań działała siła. W każdym punkcie przestrzeni siła ta ma określony kierunek i wartość. Kierunek jej jest radialny do środka Ziemi, a wartość mg . Z każdym punktem w pobliżu Ziemi możemy więc stowarzyszyć wektor g , który jest przyspieszeniem, jakiego doświadczyłoby ciało, gdyby zostało upuszczone w tym punkcie. Wektor g nazywamy *natężeniem pola grawitacyjnego* w tym punkcie. Ponieważ

$$g = \frac{F}{m}, \quad (16-12)$$

więc możemy zdefiniować natężenie pola grawitacyjnego w dowolnym punkcie jako siłę grawitacyjną działającą w tym punkcie na jednostkę masy*. Siłę, jaką działa to pole, znajdujemy mnożąc po prostu g przez masę m punktu materialnego umieszczonego w dowolnym punkcie.

Pole grawitacyjne jest przykładem pola wektorowego, w którym z każdym punktem stowarzyszony jest pewien wektor. Istnieją również pola skalarne, takie jak np. pole temperatury w ciele stałym przewodzącym ciepło. Pole grawitacyjne powstające z nie-

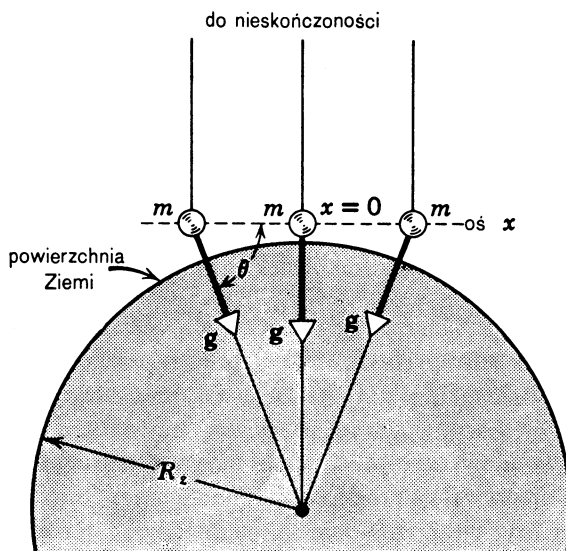
* We wzorze (16-12) g jest określone jako siła grawitacyjna działająca na masę jednostkową w punkcie P w odległości R od środka sferycznie symetrycznej masy M , co wynosi GM/R^2 . Takie g różni się od przyspieszenia ziemskiego, którego wartość została przedstawiona w tablicach 16-1 i 16-2. W tablicach tych znajdują się wartości g efektywnego, które uwzględniają, zgodnie z przykładem 2, przyspieszenie dośrodkowe ciała poruszającego się dookoła Ziemi. Na przykład g efektywne wewnątrz satelity ziemskiego wynosi zero, co obserwowaliśmy wszyscy podczas transmisji telewizyjnych z takich satelitów. Jest tak dlatego, że GM/R^2 z przykładu 2 jest dokładnie równe a_R z tego przykładu. Jednak pole grawitacyjne w miejscu położenia satelity dane właśnie przez GM/R^2 nie jest zerowe.

zmieniającego się rozkładu materii jest także przykładem pola stacjonarnego, gdyż wartość pola w danym punkcie nie zmienia się w czasie.

Pojęcie pola jest szczególnie użyteczne dla zrozumienia sił elektromagnetycznych, działających między poruszającymi się ładunkami. W porównaniu z koncepcją działania na odległość ma ono rozliczne zalety zarówno pojęciowe, jak i praktyczne. Pojęcie pola nie było używane w czasach Newtona. Zostało ono stworzone o wiele później przez Faradaya dla teorii elektromagnetyzmu i dopiero potem zastosowane do grawitacji. Koncepcja pola została następnie przyjęta w ogólnej teorii względności. Głównym powodem wprowadzenia jej w tym miejscu jest chęć wczesnego zaznajomienia studenta z pojęciem, które okazuje się tak ważne w rozwoju teorii fizycznej.

Przykład 5. W rozdziale 15 wyprowadziliśmy wzór na okres wahadła prostego, $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. Pamiętając, że ziemskie pole grawitacyjne nie jest jednorodne na dużych odległościach (co założyliśmy dla odległości niewielkich), znaleźć, jaki najdłuższy okres mogłoby mieć wahadło proste znajdujące się w pobliżu powierzchni Ziemi?

Wzór $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, chociaż nie powinien być stosowany przy g zmieniającym się wzdłuż toru wahadła, sugeruje zwiększenie długości wahadła. Weźmy więc wahadło o nieskończonej długości. Ciężarek wahadła poruszałby się wtedy wzdłuż łuku koła o promieniu nieskończonym, czyli po linii prostej, co pokazuje rys. 16-12. Ziemskie pole grawitacyjne jest wszędzie skierowane radialnie do środka Ziemi i kierunek jego



Rys. 16-12. Przykład 5. Wahadło proste zawieszone w nieskończoności

zmienia się wzdłuż łuku. Załóżmy, że amplituda wychYLENIA ciężarka o masie m jest niewielka w porównaniu z promieniem Ziemi. Wtedy ciężarek znajduje się, w dobrym przybliżeniu, zawsze w odległości R_z , ziemskiego promienia, od środka Ziemi. Siła F działająca na m wynosi

$$F = \frac{GM_z m}{R_z^2} = mg,$$

gdzie M_z jest masą Ziemi. Jak pokazuje rysunek, siła ta jest skierowana do środka Ziemi. Składowa siły wzdłuż osi x , której kierunek pokrywa się z kierunkiem ruchu ciężarka, wynosi

$$F_x = F \cos \theta = -F \frac{x}{R_z} = -\frac{GM_z m}{R_z^3} x,$$

gdzie znak minus oznacza, że siła jest skierowana przeciwnie do wychylenia z punktu $x = 0$. Związek ten możemy zapisać w postaci

$$F_x = -kx,$$

gdzie $k = GM_Z m / R_Z^3$ jest stałą.

Wzór na okres prostego oscylatora harmonicznego jest $T = 2\pi \sqrt{m/k}$. Tak więc,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{GM_Z m / R_Z^3}} = 2\pi \sqrt{\frac{R_Z^3}{GM_Z}} = 2\pi \sqrt{\frac{R_Z}{g}},$$

gdyż na powierzchni Ziemi g równa się GM_Z / R_Z^2 . Podstawiając $R_Z = 6,37 \cdot 10^6$ m i $g = 9,80$ m/s², otrzymujemy dla najdłuższego okresu wahadła prostego umieszczonego w pobliżu powierzchni Ziemi wartość $T = 84,3$ min. (Patrz pytanie 37).

16-9. Grawitacyjna energia potencjalna

W rozdziale 8 omawialiśmy grawitacyjną energię potencjalną punktu materialnego (masa m) i Ziemi (masa M). Rozważaliśmy tam jedynie specjalny przypadek, w którym punkt pozostawał w pobliżu Ziemi, tak że mogliśmy założyć, iż działająca nań siła grawitacyjna jest stała dla wszystkich położenia punktu. W paragrafie tym usuniemy to ograniczenie i rozważymy takie odległości Ziemia-punkt materialny, które mogą być znacznie większe od promienia Ziemi.

Wzór (8-5b), który możemy zapisać jako

$$\Delta U = U_b - U_a = -W_{ab} \quad (8-5b)$$

określa zmianę ΔU energii potencjalnej jakiegokolwiek układu, w którym działa siła zachowawcza (na przykład grawitacyjna), podczas przejścia tego układu ze stanu a do stanu b . W_{ab} jest pracą wykonaną przez tę siłę w trakcie zmiany stanu układu.

Energia potencjalna układu w jakimkolwiek dowolnym stanie b wynosi (patrz 8-5b)

$$U_b = -W_{ab} + U_a. \quad (16-13)$$

Dla podania wartości U_b musimy (umownie) wybrać za stan a pewien uzgodniony stan odniesienia oraz musimy przyjąć dla U_a pewną (umownie) uzgodnioną wartość, zwykle zero.

W rozdziale 8 dla układu Ziemia-punkt materialny wybraliśmy za stan odniesienia taki stan, w którym punkt spoczywał na powierzchni Ziemi; stanowi temu przypisaliśmy energię potencjalną $U_a = 0$. Kiedy punkt znajduje się na wysokości y nad powierzchnią Ziemi, energia potencjalna $U (= U_b)$ na podstawie wzoru (16-13) określona jest wyrażeniem:

$$U = -W_{ab} + 0 = -(-mg)y = mgy.$$

Siła zachowawcza w tym przypadku (siła ciężkości) jest skierowana w dół i ma wartość $(-mg)$; wektor przesunięcia punktu $(+y)$ jest skierowany w górę od poziomego odniesienia; stąd więc różnica w znaku dla tych wielkości.

Dla przypadku bardziej ogólnego, w którym nie jest nałożone ograniczenie $y \ll R$ (gdzie R jest promieniem Ziemi), okazuje się wygodny wybór innego stanu odniesienia, a mianowicie takiego, w którym punkt materialny i Ziemia znajdują się w nieskończonej od siebie odległości. Energii potencjalnej układu w tym stanie przypisujemy wartość zero. Tak więc stan o zerowej energii potencjalnej jest również stanem o zerowej sile. Dokonał-

my już podobnego wyboru, kiedy definiowaliśmy stan zerowej energii dla sprężyny, jako stan, w którym siła sprężystości jest równa zeru.

Kiedy punkt o masie m znajduje się w odległości r od środka Ziemi, energia potencjalna układu, określona wzorem (16-13), wynosi

$$U(r) = -W_{\infty r} + 0, \quad (16-14)$$

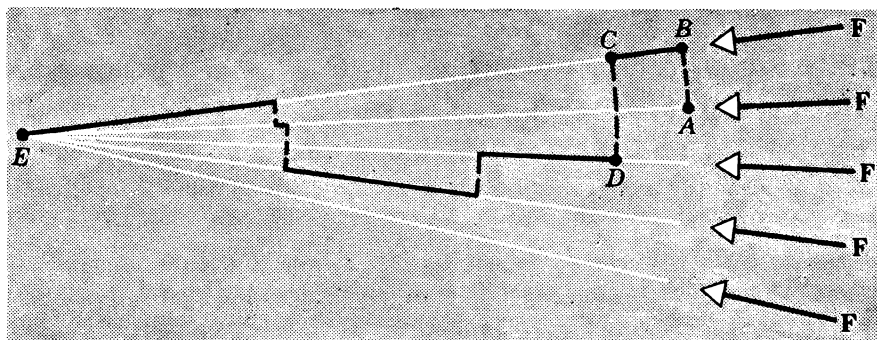
gdzie $W_{\infty r}$ jest pracą wykonaną przez siłę zachowawczą (siłę ciężkości) działającą na punkt materialny w trakcie przenoszenia go z nieskończoności do punktu leżącego w odległości r od środka Ziemi. Dla uproszczenia założymy obecnie, że punkt porusza się w kierunku Ziemi wzdłuż linii radialnej. Siła grawitacyjna $F(r)$ działająca nań (zakładając $r \geq R$) będzie wtedy równa $-GMm/r^2$, gdzie znak minus oznacza siłę przyciągającą, czyli siłę, która ciągnie punkt w kierunku Ziemi. Ze wzoru (16-14) możemy następnie znaleźć $U(r)$:

$$U(r) = -W_{\infty r} = -\int_{\infty}^r F(r) dr = -\int_{\infty}^r \left(-\frac{GMm}{r^2} \right) dr = -\frac{GMm}{r} \Big|_{\infty}^r = -\frac{GMm}{r}. \quad (16-15)$$

Znak minus oznacza, że energia potencjalna jest ujemna w skończonej odległości; innymi słowy, energia potencjalna jest zerem w nieskończoności i maleje w miarę malenia odstepu między Ziemią i punktem. Odpowiada to faktowi, że siła grawitacyjna wywierana na punkt materialny przez Ziemię jest przyciągająca. Gdy punkt przybywa z nieskończoności, praca $W_{\infty r}$ wykonana przez tę siłę jest dodatnia, co, zgodnie ze wzorem (16-14), oznacza, że $U(r)$ jest ujemne.

Wzór (16-15) jest prawdziwy bez względu na kształt drogi, po jakiej poruszał się punkt materialny, przybywając z nieskończoności na odległość r . Możemy to pokazać dzieląc każdą dowolną drogę na infitezymalne odcinki w postaci stopni, narysowane na zmianę wzdłuż i prostopadłe do promienia (rys. 16-13). Na prostopadłych odcinkach, jak AB , nie jest wykonywana żadna praca, ponieważ siła jest tam prostopadła do przesunięcia. Ale suma prac wykonanych wzdłuż radialnych części drogi, takich jak BC , równa jest wartości pracy wykonanej podczas bezpośredniego ruchu po drodze radialnej, takiej jak AE . Praca wykonana podczas ruchu ciała pomiędzy dwoma punktami w polu grawitacyjnym jest więc niezależna od drogi łączącej te punkty. Zatem siła grawitacyjna jest *siłą zachowawczą*.

Wzór (16-15) oznacza, że energia potencjalna punktów materialnych M i m jest charakterystyczna dla układu $M+m$. Energia potencjalna jest właściwością układu ciał, a nie któregośkolwiek z nich oddzielnie. Energia potencjalna zmienia się, jeżeli tylko M lub m



Rys. 16-13. Praca wykonana przy przeniesieniu pewnej masy z punktu A do E nie zależy od drogi

zostanie przemieszczone; każde ciało znajduje się w polu grawitacyjnym drugiego ciała. Nie ma również sensu przypisywanie części energii potencjalnej ciału M i części ciału m . W rzeczywistości jednak często mówimy o energii potencjalnej ciała m (planety lub kamienia) w polu grawitacyjnym ciała M o dużo większej masie (odpowiednio Słońca lub Ziemi). Usprawiedliwienie tej terminologii (jakoby energia potencjalna należała wyłącznie do planety czy kamienia) jest następujące: kiedy energia potencjalna układu dwóch ciał zamienia się na energię kinetyczną, wtedy lżejsze ciało otrzymuje większość tej energii kinetycznej. Słońce ma tyle razy większą masę od planety, że „nie uzyskuje” prawie żadnej energii kinetycznej; to samo odnosi się do Ziemi w układzie Ziemia-kamień.

Wzór na siłę grawitacyjną możemy wyprowadzić z energii potencjalnej. Związek tych wielkości dla kulisto-symetrycznej energii potencjalnej jest następujący: $F = -dU/dr$ [patrz wzór (8-7)]. Wzór ten jest odwrotnością związku (16-15). Otrzymujemy z niego

$$F = -\frac{dU}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(-\frac{GMm}{r}\right) = -\frac{GMm}{r^2}. \quad (16-16)$$

Znak minus oznacza tutaj, że siła jest przyciągająca i skierowana do środka wzdłuż promienia, przeciwnie do wektora przemieszczenia radialnego.

Z grawitacją możemy również związać pewne pole skalarne. Na wstępie zupełnie ogólnie określamy *potencjał grawitacyjny V jako grawitacyjną energię potencjalną na jednostkę masy* ciała znajdującego się w polu grawitacyjnym. Wtedy, dla sferycznie symetrycznego ciała o masie M ,

$$V = \frac{U(r)}{m} = -\frac{GM}{r}. \quad (16-17)$$

Z każdym punktem przestrzeni otaczającej masę M mamy teraz związaną pewną liczbę, potencjał grawitacyjny. Daje nam to *pole skalarne*, gdyż potencjał jest wielkością skalarną. W celu określenia siły wywieranej przez to pole na umieszczony w nim punkt o masie m , obliczamy po prostu $-dV/dr$ w interesującym nas punkcie i mnożymy przez m . Siła ta ma wartość $-mdV/dr$ i kierunek radialny w stronę centrum siły M .

Przykład 6. Prędkość ucieczki. Możemy bez trudności znaleźć grawitacyjną energię potencjalną punktu o masie m na powierzchni Ziemi (wzór 16-15), $U(R_z) = -GM_z m/R_z$. Praca konieczna do przeniesienia ciała z powierzchni Ziemi do nieskończoności wynosi $GM_z m/R_z$, czyli około $6,0 \cdot 10^7$ J/kg. Gdybyśmy pociskowi znajdującemu się na powierzchni Ziemi mogli dostarczyć większej energii, wtedy (pomijamy opór atmosfery ziemskiej) uciekłby on z Ziemi i nigdy na nią nie powrócił. W trakcie oddalania się pocisku jego energia kinetyczna maleje, a jego energia potencjalna rośnie, ale prędkość nigdy nie zostanie zredukowana do zera. Krytyczna prędkość początkowa, zwana prędkością ucieczki v_0 , przy której pocisk już nie powraca, dana jest wzorem

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{GM_z m}{R_z}$$

lub

$$v_0 = \sqrt{2\frac{GM_z}{R_z}} = 11,2 \text{ km/s.}$$

Gdyby pocisk uzyskał taką prędkość początkową, wtedy uciekłby on z Ziemi na zawsze. Przy prędkościach mniejszych pocisk powraca. Jego energia kinetyczna w pewnej skończonej odległości od Ziemi staje się równa zero i pocisk spada z powrotem na Ziemię*.

* Pominęliśmy tu siły wywierane na pocisk przez ciała inne niż Ziemia. Na odpowiednio dużych odległościach od Ziemi musimy brać pod uwagę siły grawitacyjne wywołane przez Księżyc, planety, Słońce itp., tak że nie możemy dłużej korzystać z prostego wyniku otrzymanego przy rozważaniu problemu „dwu ciał”. W takich „wielociałowych” układach pocisk może uciec od Ziemi, na przykład w wyniku „wychwycenia” przez inne ciało astronomiczne.

Lżejsze cząsteczki w górnych warstwach atmosfery ziemskiej mogą, za pomocą pobudzenia termicznego, osiągać dostatecznie duże prędkości na to, żeby uciec do przestrzeni pozaziemskiej. Wodór, który dawno temu musiał istnieć w atmosferze ziemskiej, obecnie z niej zniknął. Hel ucieka ze stałą prędkością, ale znaczna jego część odtwarza się poprzez rozpad promieniotwórczy zachodzący w skorupie ziemskiej. Prędkość ucieczki na Słońcu jest zbyt duża, żeby wodór mógł uciec z jego atmosfery. Z drugiej strony, prędkość ucieczki na Księżycu jest zbyt mała, aby mogła istnieć nad nim jakakolwiek atmosfera (patrz zadanie 30).

16-10. Energia potencjalna układu wielu ciał

Gdy dwa ciała znajdują się w odległości r od siebie, wtedy ich energia potencjalna jest dana wzorem (16-14)

$$U(r) = -W_{\infty r}, \quad (16-14)$$

gdzie $W_{\infty r}$ jest pracą wykonaną przez siłę grawitacyjną w trakcie przenoszenia ciał z nieskończonej odległości na odległość równą r . Podamy teraz odmienną interpretację $U(r)$.

Zrównoważmy siłę grawitacyjną siłą zewnętrzną wywołaną przez pewien czynnik zewnętrzny wybrany tak, że w każdej chwili czasu siła zewnętrzna jest równa i przeciwnie skierowana do siły grawitacyjnej dla każdego ciała. Praca wykonana przez siłę zewnętrzną w trakcie przenoszenia ciał z nieskończonej odległości na odległość r nie równa się $W_{\infty r}$, lecz $-W_{\infty r}$; wynika to z tego, że przesunięcia są takie same, a siły równe co do wartości i przeciwnie skierowane. Możemy więc związek (16-14) zinterpretować w następujący sposób: *jeśli formujemy układ ciał wychodząc ze standardowego stanu odniesienia, to energia potencjalna tego układu równa jest pracy, która musi być wykonana przez czynnik zewnętrzny podczas tej formacji.*

Tak więc, podnosząc kamień o masie m na wysokość y ponad powierzchnię Ziemi, jesteś czynnikiem zewnętrznym (rozdzielającym Ziemię i kamień) i praca, którą wykonujesz „zestawiając” układ, wynosi $+mgy$, co równa się energii potencjalnej. Podobnie, praca wykonana przez czynnik zewnętrzny w trakcie przenoszenia ciała z nieskończoności na odległość r od Ziemi jest ujemna, ponieważ czynnik musi działać na ciało siłą hamującą; jest to zgodne ze wzorem (16-14).

Rozważania te pozostają również słuszne dla układów zawierających więcej niż dwa ciała. Rozważmy trzy ciała o masach m_1 , m_2 i m_3 . Pozwólmy im początkowo znajdować się w nieskończonej odległości od siebie. Zadanie polega na obliczeniu pracy wykonanej przez czynnik zewnętrzny w celu doprowadzenia tych ciał do położenia pokazanego na rys. 16-14. Przenieśmy najpierw m_2 do m_1 z odległości nieskończonej na odległość r_{12} . Praca wykonana przeciwko sile grawitacyjnej wywieranej przez m_1 na m_2 wynosi $-Gm_1m_2/r_{12}$. Przenieśmy obecnie m_3 z nieskończoności na odległość r_{13} od m_1 i r_{23} od m_2 . Praca wykonana przeciwko sile grawitacyjnej wywieranej przez m_1 na m_3 wynosi $-Gm_1m_3/r_{13}$ i przeciwko sile grawitacyjnej wywieranej przez m_2 na m_3 wynosi $-Gm_2m_3/r_{23}$. Całkowita praca wykonana przy zestawieniu tego układu równa się całkowitej energii potencjalnej układu

$$-\left(\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} + \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}}\right).$$

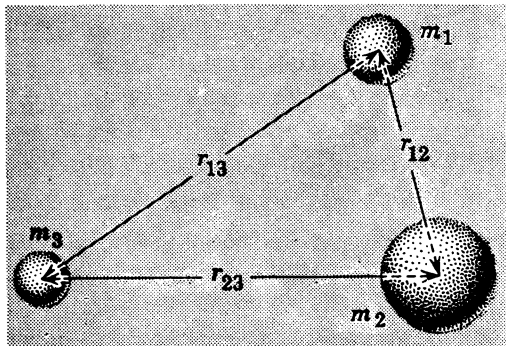
Zauważmy, że w tym postępowaniu nie jest potrzebna żadna operacja wektorowa.

Jeżeli początkowo ciała znajdowały się w nieskończonej odległości od siebie, to bez względu na to, w jaki sposób tworzymy układ, czyli niezależnie od tego, które ciała są prze-

noszone, czy też jakie drogi zostały dla nich wybrane, zawsze ta sama ilość pracy będzie potrzebna na to, żeby ciała te utworzyły konfigurację przedstawioną na rys. 16-14. Energia potencjalna musi więc być związana z układem, a nie z jakimkolwiek jednym lub dwoma ciałami. Jeżeli chcielibyśmy z powrotem rozdzielić ten układ na trzy izolowane masy, musielibyśmy dostarczyć mu energię:

$$+ \left(\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} + \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}} \right).$$

Energia ta może być uważana za pewien rodzaj energii wiązania, która trzyma punkty materialne razem w omawianej konfiguracji.



Rys. 16-14. Położenie trzech mas m_1 , m_2 i m_3 znajdujących się początkowo w nieskończoności

Tak samo jak energię potencjalną sprężystości możemy powiązać z rozciągniętym lub ściśniętym stanem sprężyny utrzymującej punkt materialny, również grawitacyjną energię potencjalną możemy powiązać ze stanem układu punktów materialnych utrzymywanych razem przez siły grawitacyjne. Podobnie, jeżeli chcemy uważać, że energia potencjalna sprężystości ciała jest zmagazynowana w sprężynie, to możemy też przyjąć, że grawitacyjna energia potencjalna jest zmagazynowana w polu grawitacyjnym układu ciał. Zmiana w którymkolwiek z tych stanów powoduje zmianę energii potencjalnej.

Pojęcia te pojawiają się znowu wtedy, gdy spotkamy się z siłami pochodzenia elektrycznego lub magnetycznego, czy nawet pochodzenia jądrowego. Zastosowanie ich w fizyce jest rozległe. Przewaga metody energetycznej nad metodą dynamiczną wynika z faktu, że metoda energetyczna posługuje się wielkościami i operacjami skalarnymi, w przeciwieństwie do wielkości i operacji wektorowych stosowanych w metodzie dynamicznej. Metoda energetyczna jest nieodzowna wtedy, kiedy faktyczne siły nie są znane, co często zdarza się w fizyce jądrowej.

Przykład 7. Jaka jest energia wiązania układu Ziemia-Słońce? Pominąć obecność innych planet i satelitów.

Założmy dla uproszczenia, że orbita Ziemi ma kształt okręgu o promieniu r_{zs} . Praca wykonana przeciwko sile grawitacyjnej w celu przeprowadzenia Ziemi o Słońca z nieskończonej odległości na odległość r_{zs} wynosi

$$-G \frac{M_z M_s}{r_{zs}} = -5,0 \cdot 10^{33} \text{ J},$$

gdzie przyjęliśmy $M_s = 330\,000 M_z$, $M_z = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $r_{zs} = 150 \cdot 10^9 \text{ m}$. Znak minus oznacza, że siła jest przyciągająca i praca wykonywana jest przez siłę grawitacyjną. Taką samą ilość pracy musiałby

wykonać czynnik zewnętrzny przy całkowitym rozdzieleniu tych ciał ze stanu spoczynkowego. Ponieważ energia kinetyczna Ziemi na jej orbicie równa się połowie wartości bezwzględnej energii potencjalnej układu Ziemia-Słońce, więc tylko połowa pracy potrzebna jest do rozerwania układu. Zakładając, że układ Ziemia-Słońce po rozerwaniu znajduje się w spoczynku, efektywna energia wiązania wynosi około $2,5 \cdot 10^{33}$ J.

Jaki wpływ na energię wiązania Ziemi w Układzie Słonecznym ma obecność Księżyca i innych planet?

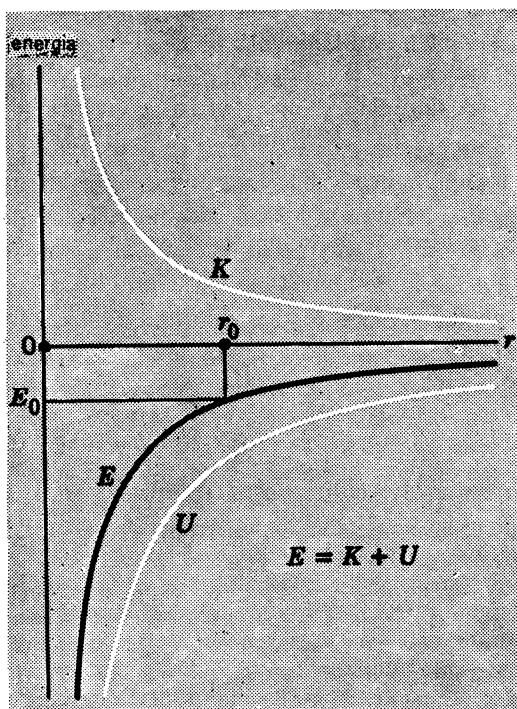
16-11. Zależności energetyczne w ruchach planet i satelitów

Rozważmy raz jeszcze ruch ciała o masie m (planety, czy satelity) dookoła masywnego ciała o masie M (Słońca czy Ziemi). Będziemy uważać, że ciało M znajduje się w spoczynku w inercjalnym układzie odniesienia, podczas gdy ciało m porusza się wokół M po orbicie kołowej. Energia potencjalna układu wynosi

$$U(r) = -\frac{GMm}{r},$$

gdzie r jest promieniem orbity kołowej. Energia kinetyczna równa się

$$K = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2,$$



Rys. 16-15. Energia kinetyczna K , energia potencjalna U i energia całkowita $E = U + K$ ciała w kołowym ruchu planetarnym. Planeta o energii $E_0 < 0$ pozostanie na orbicie o promieniu r_0 . Im dalej od Słońca znajduje się planeta, tym większa (mniej ujemna) jest jej (stała) energia całkowita E . Na to, żeby uciec od centrum siły i zachować pewną energię kinetyczną w nieskończoności, planeta musi mieć dodatnią energię całkowitą

ponieważ Słońce znajduje się w spoczynku. Ze związku poprzedzającego wzór (16-11) otrzymujemy

$$\omega^2 r^2 = \frac{GM}{r},$$

czyli

$$K = \frac{1}{2} \frac{GMm}{r}.$$

Energia całkowita wynosi

$$E = K + U = \frac{1}{2} \frac{GMm}{r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r}. \quad (16-18)$$

Energia ta jest stała i ujemna. Energia kinetyczna nigdy nie może być ujemna, ale z równania (16-18) widzimy, że musi ona dążyć do zera, gdy odległość dąży do nieskończoności. Energia potencjalna jest zawsze ujemna z wyjątkiem nieskończoności, gdzie równa się zeru. Fakt, że energia całkowita jest ujemna, oznacza, że opisywany układ jest zamknięty — planeta m jest zawsze związana ze słonecznym centrum przyciągającym M i nigdy nie ucieka od niego (rys. 16-15).

Energia całkowita jest ujemna również w przypadku, kiedy rozważamy orbity eliptyczne, dla których r i ω zmieniają się. Jest ona również stała, co odpowiada faktowi, że siły grawitacyjne są zachowawcze. Tak więc w ruchu planetarnym zarówno energia całkowita, jak i całkowity moment pędu są stałe. Wielkości te są często zwane *stałymi ruchu*. Rzeczywiste orbity planet względem Słońca otrzymujemy wychodząc z tych związków zachowania i eliminując zmienną czasową przy użyciu zasad dynamiki i prawa grawitacji. W wyniku tego postępowania otrzymujemy eliptyczne orbity planetarne.

Te tożsamościowe związki mechaniki były stosowane we wcześniejszych teoriach atomu (jak teoria atomu wodoru Bohra) do opisu ruchu elektronu dokoła przyciągającego centrum jądrowego. Były one także stosowane dla orbit „otwartych” (energia całkowita dodatnia), tak jak w doświadczeniach Rutherforda dotyczących rozpraszania naładowanych cząstek jądrowych. Siły centralne, w szczególności siły odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości, są często spotykane w układach fizycznych.

16-12. Ziemia jako inercjalny układ odniesienia

Opisując doświadczenia, które były podstawą naszych definicji siły i masy, musieliśmy przyjąć jakiś układ odniesienia, względem którego można było mierzyć przyspieszenie. Gdyby układ odniesienia był nieregularnie przyspieszany, nie zaobserwowalibyśmy żadnej regularności w mierzonych przyspieszeniach. W istocie nasze doświadczenia laboratoryjne są przeprowadzane w układzie odniesienia, który jest nieruchomy względem Ziemi. Omawialiśmy już wpływ obrotu Ziemi dokoła jej osi na nasze pomiary. Jaki wpływ na te pomiary ma ruch Ziemi jako całości dokoła Słońca lub też obecność jakiegoś innego ciała kosmicznego?

Przyspieszenie Ziemi względem Słońca równa się $\omega^2 r$, czyli około $6 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$. Na pierwszy rzut oka wydawałoby się, że przyspieszenie to, chociaż małe, może zakłócać wyniki doświadczeń z udziałem niewielkich sił. Że tak jednak nie jest, wynika z uniwersalności prawa grawitacji. Nie tylko bowiem Ziemia, ale także wszystkie masy, z którymi mamy do czynienia w naszych urządzeniach laboratoryjnych, są przyspieszane w kierunku Słońca w tym samym, praktycznie, stopniu.

Obliczmy błąd popełniany w wyniku pominięcia przyspieszenia orbitalnego Ziemi. Przyspieszenie Ziemi w kierunku Słońca wynosi k/r^2 , gdzie r jest odległością od środka Słońca do środka Ziemi, a k równa się GM_S . Rozważmy teraz ciało znajdujące się na najbardziej odległej od Słońca stronie Ziemi. Wyobraźmy sobie, że ważymy na przykład to ciało na wadze sprężynowej. Wtedy ta część jego przyspieszenia w kierunku Słońca, która wywołana jest przyciąganiem grawitacyjnym samego Słońca, wynosi

$$\frac{k}{(r+r_0)^2} = \frac{k}{r^2} \left(1 - \frac{2r_0}{r} + \dots + \text{wyrazy dużo mniejsze} \right),$$

gdzie r_0 jest promieniem Ziemi. Różnica między przyspieszeniem Ziemi wywołanym przyciąganiem słonecznym (czyli k/r^2) a przyspieszeniem przyrządu wywołanym przyciąganiem słonecznym (powyższe wyrażenie) byłaby mniejsza niż $(k/r^2)(2r_0/r)$. Ale $2r_0/r$ równa się około 10^{-4} . Tak więc różnica byłaby mniejsza niż 10^{-4} przyspieszenia Ziemi, czyli mniejsza niż 10^{-6} m/s^2 . Względne przyspieszenie ciała i Ziemi wywołane przyciąganiem słonecznym wynosi około jednej dziesięciomilionowej przyspieszenia ziemskiego ciała. Księżyc ma podobny, porównywalny co do wartości, wpływ na ciało. W związku z tym jedynie wtedy, gdybyśmy mierzyli z dokładnością względną sięgającą jednej milionowej, musielibyśmy poważnie rozważyć przyspieszający charakter układu odniesienia związanego z Ziemią. Dla prawie wszystkich praktycznych celów Ziemia jest wystarczająco dobrym inercjalnym układem odniesienia.

16-13. Zasada równoważności

Rozważmy dwa układy odniesienia: 1) poruszający się bez przyspieszenia (inercjalny) układ odniesienia S , w którym działa jednorodne pole grawitacyjne, oraz 2) układ odniesienia S' , który porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym względem układu inercjalnego, ale w którym nie ma żadnego pola grawitacyjnego. Albert Einstein w swojej ogólnej teorii względności pokazał, że takie dwa układy są fizycznie całkowicie równoważne. Oznacza to, że doświadczenia przeprowadzone w obu tych układach, w takich samych warunkach, powinny dać takie same rezultaty. Jest to *zasada równoważności*.

Przypuśćmy, że w inercjalnym układzie odniesienia S , w którym znajduje się jednorodne pole grawitacyjne, powiedzmy na powierzchni Ziemi, spoczywa statek kosmiczny. Przedmioty wewnątrz statku (takie jak jabłko), które zostaną upuszczone, będą spadać w polu grawitacyjnym z przyspieszeniem powiedzmy g ; na przedmioty znajdujące się w spoczynku — takie jak astronauta siedzący na podłodze czy paczka zawieszona na wadze sprężynowej przymocowanej do sufitu — będą działały siły wywierane odpowiednio przez podłogę czy sprężynę, przeciwdziałające ich ciężarowi.

Przypuśćmy teraz, że zostały włączone silniki i statek kosmiczny udaje się w takie rejony przestrzeni kosmicznej, gdzie nie ma pola grawitacyjnego. Niech przyspieszenie statku, naszego nowego układu S' , względem inercjalnego układu odniesienia S będzie $a = -g$; znaczy to, że statek oddala się ruchem przyspieszonym od Ziemi, poza obszary, w których pole ziemskie (lub jakieś inne pole grawitacyjne) jest jeszcze zauważalne. Warunki w statku kosmicznym będą teraz podobne do tych, które były w statku spoczywającym na powierzchni Ziemi. Jeżeli astronauta upuści wewnątrz statku jabłko, będzie ono poruszać się względem statku w dół ruchem przyspieszonym z przyspieszeniem g . W istocie, ponieważ wszystkie ciała, na które nie działa żadna siła, poruszają się względem układu inercjalnego S ze stałą prędkością, wszystkie takie ciała spadają względem statku kosmicznego S' z *jednakowym* przyspieszeniem g . Co więcej, przedmioty spoczywające względem statku — takie, jak astronauta siedzący na podłodze czy paczka zawieszona na wadze sprężynowej przymocowanej do sufitu — będą doświadczać sił takich samych, jak siły, które równoważyły ich ciężar w przypadku, gdy statek spoczywał w polu grawitacyjnym w S .

W rzeczywistości, gdyby astronauta nie wiedział, że silniki przyspieszają jego statek względem S , byłby on usprawiedliwiony sądząc, że znajduje się w polu grawitacyjnym — w polu, którego działanie przyspiesza spadające w S' jabłko i którego działanie wymaga przyłożenia do paczki (siła napięcia sprężyny) oraz do astronauty (siła reakcji podłogi) pewnej równoważącej siły, w celu utrzymania ich w S' w spoczynku. Z obserwacji przeprowadzonych w jego własnym układzie astronauta nie mógłby po prostu wskazać różnicy między sytuacją, w której statek jego był przyspieszony względem układu inercjalnego w obszarze bez pola grawitacyjnego, i sytuacją, w której statek kosmiczny znajdował się nie przyspieszony w układzie inercjalnym, gdzie istniało jednorodne pole grawitacyjne. Obie te sytuacje są ściśle równoważne.

Einstein zwrócił uwagę na to, że z zasady równoważności wynika, że nie można mówić o bezwzględnym, lecz jedynie o względnym przyspieszeniu układu odniesienia, zupełnie tak samo, jak ze szczególnej teorii względności wynika, że nie można mówić o bezwzględnej, lecz jedynie o względnej prędkości układu odniesienia. Z zasady równoważności wynika także równość masy bezwładnej i grawitacyjnej. Wszystkie ciała, na które nie działają żadne siły, będą poruszać się względem inercjalnego układu odniesienia ze stałą prędkością, niezależnie od wartości ich mas bezwładnych. Powinny więc mieć jednakowe przyspieszenia względem przyspieszanego układu odniesienia. W związku z tym, z równoważności układów S i S' wynika, że wszystkie ciała powinny spadać w jednorodnym polu grawitacyjnym z jednakowym przyspieszeniem.

Z przeprowadzonej dotąd dyskusji widzimy, że jednorodne pole grawitacyjne może być imitowane przez „pole przyspieszenia”. Rzeczywiście, jednorodne pole grawitacyjne może być usunięte w wyniku przejścia (transformacji) do układu odniesienia poruszającego się ruchem przyspieszonym w kierunku tego pola; przyspieszenie układu musi być równe co do wartości przyspieszeniu wywołanemu przez rozważane pole grawitacyjne. W tym nowym układzie ciało, którego ruch początkowo podlegał polu grawitacyjnemu, jest teraz ciałem swobodnym. W sztucznym satelicie Ziemi jabłko upuszczone przez astronautę nie będzie spadać względem satelity; również na samego astronautę nie będą działać siły, które przeciwdziałały przyciąganiu grawitacyjnemu przed startem, tak że będzie on się znajdował w stanie nieważkości. Ogólnie biorąc, pola grawitacyjne, takie jak pole ziemskie, nie są jednak jednorodne w całej przestrzeni i nie można w całej przestrzeni zastąpić pola grawitacyjnego przejściem do jednego tylko układu odniesienia poruszającego się z przyspieszeniem względem źródła pola. Aby imitować całkowite pole grawitacyjne, trzeba by dla każdego punktu przestrzeni dobrać inny układ poruszający się ruchem przyspieszonym.

Pytania

1. Współczesna astronomia obserwacyjna oraz metody nawigacji przyjmują geocentryczny (Ptolemeusza) punkt widzenia (posługując się obracającą się „kulą niebieską”). Czy jest to błędne? Jeżeli nie, to jakie kryterium określa użycie przez nas danego układu (Kopernika albo Ptolemeusza)? Kiedy używalibyśmy układu heliocentrycznego (Kopernika)?

2. Dlaczego ciężkie ciała nie spadają odpowiednio szybciej niż lekkie, skoro siła grawitacyjna jest dla wszystkich ciał proporcjonalna do ich masy?

3. Jak zmienia się ciężar ciała na drodze z Ziemi na Księżyc? Czy zmienia się masa tego ciała?

4. Na powierzchni Ziemi swobodnie zawieszony przedmiot został poziomo uderzony młotkiem. Następnie przedmiot ten przeniesiono na Księżyc, zawieszono swobodnie i równie silnie uderzono, znów poziomo, tym samym młotkiem. Jaki jest związek uzyskanej w wyniku uderzenia poziomej prędkości na Księżycu z poziomą prędkością na Ziemi?

5. Gdzie mielibyśmy więcej cukru w kilogramie (1 kG ciężaru): na biegunie czy na równiku?

6. Jaka w przybliżeniu jest *grawitacyjna* siła przyciągania działająca między przeciętną kobietą i typowym mężczyzną odległymi o 10 m? A jaka kiedy tańczą? Porównaj te siły z typowymi ciężarami ciał.

7. Czy koncentracja masy Ziemi w pobliżu jej środka wpływa na zmianę g wraz z wysokością w porównaniu z kulą jednorodną? W jaki sposób?

8. Ponieważ Ziemia uwypuklona jest w pobliżu równika, źródła rzeki Missisipi, chociaż znajdują się wysoko nad poziomem morza, są bliżej środka Ziemi niż jej ujście. Jak rzeka może płynąć „pod górę”?

9. Ze względu na „spłaszczające” działanie ruchu obrotowego Ziemia jest spłaszczoną kulą. Czy jeden stopień szerokości geograficznej jest większy, czy też mniejszy w pobliżu jednego z biegunów w porównaniu z okolicami równika? Dlaczego?

10. Dlaczego badając ruch sztucznego satelity możemy więcej dowiedzieć się o kształcie Ziemi niż przez badania ruchu Księżyca?

11. Jak można określić masę Księżyca?

12. Podstawą działania jednego zegara jest drgająca sprężyna, drugiego zaś wahadło. Oba zegary zabrano na Marsa. Czy będą one odmierzać ten sam czas, co na Ziemi? Czy będą zgadzać się ze sobą? Uzasadnić odpowiedzi. (Mars ma masę równą 0,1 masy Ziemi i dwa razy mniejszy promień.)

13. Z drugiego prawa Keplera oraz z obserwacji ruchu Słońca widzianego z Ziemi wnioskujemy, że Ziemia znajduje się podczas zimy (na półkuli północnej) bliżej Słońca niż w czasie lata. Dlaczego w lecie nie jest zimniej niż w zimie?

14. Czy prawo powszechnego ciążenia wymaga, żeby planety naszego Układu Słonecznego miały takie właśnie orbity, jakie są w rzeczywistości obserwowane? Czy planety innych gwiazd podobnych do naszego Słońca powinny mieć takie same orbity? Zasugerować czynniki, które mogłyby określać szczególnie, obserwowane w naszym układzie orbity.

15. Jak prędkość orbitalna planety jest związana z promieniem orbity (kołowej)?

16. Siła grawitacyjna wywierana na Księżyc przez Słońce jest około dwukrotnie większa od siły grawitacyjnej wywieranej na Księżyc przez Ziemię. Dlaczego wobec tego Księżyc nie ucieka od Ziemi (na przykład podczas zaćmienia Słońca)?

17. Wyjaśnić, dlaczego następujące rozumowanie jest błędne. „Słońce przyciąga wszystkie ciała na Ziemi. O północy, kiedy Słońce znajduje się dokładnie pod nami, ciągnie ono przedmiot w tym samym kierunku, w którym ciągnie go Ziemia; w południe, kiedy Słońce jest bezpośrednio nad nami, ciągnie ono przedmiot w kierunku przeciwnym do kierunku ciągnięcia go przez Ziemię. W związku z tym wszystkie przedmioty powinny być o północy (w nocy) cięższe niż w południe (w dzień)”.

18. Działające na Ziemię przyciąganie grawitacyjne Słońca i Księżyca wywołuje zjawisko przypływów i odpływów. Wpływ Słońca na przypływy i odpływy jest około dwa razy mniejszy niż wpływ Księżyca. Bezpośrednie działanie przyciągające Słońca na Ziemię jest jednak około 175 razy większe niż działanie Księżyca. Dlaczego więc Księżyc wywołuje większe przypływy i odpływy?

19. Ponieważ przypływy i odpływy wywołane przez Księżyc hamują ruch obrotowy Ziemi (dzięki tarcia), moment pędu Ziemi maleje. Co dzieje się z ruchem Księżyca w wyniku zachowania momentu pędu? Czy Słońce (oraz przypływy i odpływy wywołane przez Słońce) odgrywa tutaj jakąkolwiek rolę? (patrz artykuły: Peter Goldreich, Tides and the Earth-Moon System, *Scientific American*, April 1972; Frank Sandon, Tides of the British Seas, *Physics Education*, June 1975).

20. Czy należałoby oczekiwać, że całkowita energia Układu Słonecznego jest stała? A całkowity moment pędu? Uzasadnić swoje odpowiedzi.

21. Pewne urządzenie ma zostać przeniesione, przy pomocy rakiety, z Ziemi na trwałą orbitę satelitarną wokół Ziemi. Przedyskutuj zmiany okresu wahadła prostego stanowiącego część tego urządzenia.

22. Czy rzeczywiście rakietą w celu ucieczki z Ziemi musi otrzymać początkową prędkość ucieczki równą 40 000 km/h?

23. Przedmioty spoczywające na powierzchni Ziemi poruszają się po torach kołowych z okresem równym 24 h. Czy znajdują się one „na orbicie” w takim sensie, w jakim na orbicie znajduje się satelita Ziemi? Dlaczego nie? Jaka musiałaby być długość „doby”, żeby przedmioty te zostały wysłane na prawdziwą orbitę?

24. Sztuczny satelita Ziemi gubi paczkę. Zaniedbując wpływ oporu powietrza określić czy paczka zderzy się z Ziemią, a jeśli tak to gdzie — w punkcie leżącym w chwili zderzenia przed, bezpośrednio pod, czy poza satelitą, czy może pod miejscem gdzie satelita był w chwili upuszczenia paczki.

25. Pomijając opór powietrza i trudności techniczne, odpowiedzieć, czy satelita może być wysłany na orbitę przez wystrzelenie go z ogromnej armaty umieszczonej na powierzchni Ziemi? Uzasadnić odpowiedź.

26. Czy satelita może poruszać się po trwałej orbicie w płaszczyźnie nie przechodzącej przez środek Ziemi? Uzasadnić odpowiedź.

27. Czy powinna być jakakolwiek różnica w mierzonych (przez obserwatora na Ziemi) okresach dwóch satelitów, z których każdy znajduje się na bliskiej Ziemi orbicie kołowej w płaszczyźnie równika, ale jeden porusza się w kierunku wschodnim, a drugi zachodnim?

28. Kiedy wysłany został Sputnik I, mówiło się, że nie wróci on na Ziemię, ale spali się podczas opadania. Jak to jest możliwe, skoro się weźmie pod uwagę fakt, że nie spłonął on podczas wznoszenia się?

29. W jakiej sytuacji astronauta doświadcza większego przyspieszenia — kiedy są wysyłani na orbitę, czy też podczas powrotu na Ziemię?

30. Pokazać, że satelita może przyspieszać swój lot podczas opadania; innymi słowy, pokazać, że jeżeli siły tarcia wywołują utratę energii całkowitej satelity, będzie on przenosił się na orbitę bliższą Ziemi i może w tym czasie zwiększać swoją energię kinetyczną.

31. Sztuczny satelita Ziemi znajduje się na orbicie kołowej. Jak zmieni się jego orbita, jeżeli jeden z silników odrzutowych zostanie na chwilę włączony: a) w kierunku Ziemi, b) w stronę przeciwną do Ziemi, c) w kierunku ruchu, d) w kierunku przeciwnym do ruchu, e) w kierunku prostym do płaszczyzny orbity?

32. Jakie trudności napotkałbyś w trakcie chodzenia wewnątrz statku kosmicznego? A jakie podczas skakania? Podczas picia?

33. Widzieliśmy wszyscy transmisje telewizyjne z satelitów orbitalnych i oglądaliśmy różne przedmioty unoszące się tu i tam w stanie efektywnie zerowej grawitacji. Przypuśćmy, że astronauta przymocowany do obudowy satelity kopnie unoszącą się kulę do gry w kręgle. Czy uderzy się wtedy w palec u nogi?

34. Gdyby planetę o danej gęstości uczyniono większą, siła przyciągania działająca na przedmiot znajdujący się na powierzchni planety wzrosłaby ze względu na zwiększoną masę i równocześnie zmalałaby ze względu na powiększenie odległości między przedmiotem i środkiem planety. Który efekt będzie dominujący?

35. Rozważmy pustą powłokę kulistą. Jaka jest różnica w potencjałach grawitacyjnych wewnątrz i na powierzchni powłoki? Jakie jest natężenie pola grawitacyjnego wewnątrz powłoki?

36. Wzdłuż osi głębokiego, pionowego szybu upuszczono kamień. (Pominąć opór powietrza, ale uwzględnić ruch obrotowy Ziemi). Czy kamień będzie kontynuował ruch wzdłuż osi szybu? Jeżeli nie, opisać jego ruch.

37. Wyjaśnić, używając jakościowych argumentów, dlaczego następujące cztery okresy są równe (wszystkie wynoszą 84 min. przy założeniu jednorodnej gęstości Ziemi): (a) okres obrotu satelity bezpośrednio ponad powierzchnią Ziemi, (b) okres drgań przesyłki w tunelu przekopanym przez Ziemię, (c) okres wahadła prostego mającego długość równą promieniowi Ziemi w jednorodnym polu $9,8 \text{ N/kg}$, (d) okres nieskończonego długiego wahadła prostego w ziemskim (niejednorodnym) polu grawitacyjnym.

38. Pogląd o „działaniu na odległość” sił ciążenia implikuje, że działanie ich jest natychmiastowe. W rzeczywistości współczesna teoria fizyczna zakłada, że grawitacja rozchodzi się ze skończoną prędkością, co bierze się pod uwagę w gruntownie zmodyfikowanej teorii klasycznej, jaką jest ogólna teoria względności (przegląd odpowiednich idei i prób doświadczalnej ich weryfikacji znajduje się w artykule: Jonathan L. Logan, Gravitational Waves — a Progress Report, *Physics Today*, March 1973). Co stałoby się z klasycznym wnioskowaniem, gdybyśmy założyli, że działanie nie jest natychmiastowe? (patrz również artykuł: I. J. Good, Infinite Speed of Propagation of Gravitation in Newtonian Physics, *American Journal of Physics*, July 1975).

39. Czy można uważać siłę grawitacyjną nie za siłę „rzeczywistą”, ale za siłę „pozorną”, powstającą w wyniku przyspieszenia odpowiedniego układu odniesienia względem pewnego układu inercjalnego?

Zadania

Paragraf 16-2

1. Jak daleko od Ziemi w kierunku Słońca musi znajdować się ciało, ażeby przyciąganie grawitacyjne Słońca zrównoważyło przyciąganie ziemskie? Słońce znajduje się w odległości $1,49 \cdot 10^8 \text{ km}$ od Ziemi, a jego masa równa się $3,24 \cdot 10^5 M_Z$.

Odp.: $2,6 \cdot 10^5 \text{ km}$.

Paragraf 16-3

2. Jaka jest zmiana procentowa w przyspieszeniu Ziemi w kierunku Słońca od całkowitego zaćmienia Słońca do chwili, w której Księżyc i Słońce są dokładnie po przeciwnych stronach Ziemi?

Paragraf 16-5

3. Na jakiej wysokości nad powierzchnią Ziemi przyspieszenie ziemskie wynosi $4,9 \text{ m/s}^2$? Masa Ziemi wynosi $6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, zaś jej średni promień $6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$.

Odp.: $2,6 \cdot 10^6 \text{ m}$.

4. Ile wynosi okres „wahadła sekundowego” (na Ziemi okres = 2 s) na powierzchni Księżyca? Masa Księżyca wynosi $7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$, a jego promień 1720 km . (b) Dlaczego „wahadło sekundowe” powinno mieć okres równy dwóm sekundom, a nie jednej?

5. Sądzi się, że niektóre gwiazdy neutronowe (gwiazdy o skrajnie dużych gęstościach) wirują z szybkością około jednego obrotu na sekundę. Przyjmując, że taka gwiazda ma promień równy 20 km , obliczyć jaką musi być jej masa na to, by przedmioty znajdujące się na jej powierzchni były przyciągane do gwiazdy, a nie „odrzućane” przez szybką rotację?

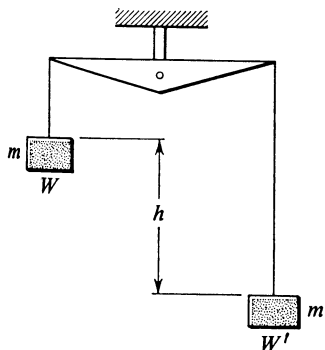
Odp.: $4,7 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.

6. Na fakt, że g zmienia się od miejsca do miejsca na powierzchni Ziemi zwrócono uwagę w 1672 roku, kiedy Jean Richer zabrał zegar wahadłowy z Paryża do Cayenne w Gujanie Francuskiej i zauważył spóźnienie wynoszące 2,5 min/dzień. Ile wynosi wartość g w Cayenne, jeżeli w Paryżu $g = 9,81 \text{ m/s}^2$?

7. Jaki będzie okres wahadła na biegunie południowym, jeżeli na równiku wahadło to ma okres dokładnie równy jednej sekundzie?

Odp.: 0,9974 s.

8. Dwie masy m , z założenia równe, są zawieszone na dwóch, różnej długości, nitkach wagi umieszczonej na powierzchni Ziemi (rys. 16-16). Jeżeli masę nitek można pominąć i różnica długości wynosi h , (a) pokazać, że błąd w ważeniu związany z faktem, że W' jest bliżej Ziemi niż W wynosi $W' - W = 8\pi G \rho m h / 3$, gdzie ρ jest średnią gęstością Ziemi ($5,5 \text{ g/cm}^3$). (b) Znaleźć różnicę długości, przy której błąd względny będzie wynosił jedną milionową.



Rys. 16-16. Zadanie 8

9. Naukowiec wykonuje precyzyjny pomiar g w pewnym punkcie na Oceanie Indyjskim (na równiku) za pomocą pomiaru okresu wahań dla wahadła o dokładnie znanej budowie. W celu otrzymania nieruchomej podstawy pomiary są przeprowadzane w zanurzonej łodzi podwodnej. Zaobserwowano, że nieco inny wynik dla g otrzymuje się w zależności od tego, czy łódź porusza się przez badany punkt w kierunku wschodnim, czy też zachodnim. Prędkość w każdym wypadku wynosiła 16 km/h. Wyjaśnić tę różnicę i obliczyć względny błąd $\Delta g/g$.

Odp.: $6,6 \cdot 10^{-5}$.

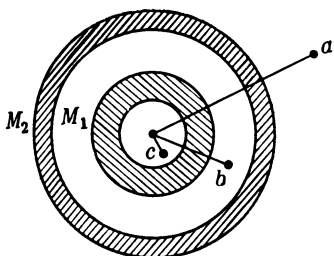
10. Na statku płynącym wzdłuż równika z prędkością v zawieszono ciało na wadze sprężynowej. (a) Pokazać, że odczyt na skali wagi będzie bardzo bliski wartości $W_0(1 \pm 2\omega v/g)$, gdzie ω jest prędkością kątową Ziemi, a W_0 jest odczytem na skali, gdy okręt znajduje się w spoczynku. (b) Wyjaśnić znak plus-minus we wzorze.

Paragraf 16-6

11. Dwie współśrodkowe powłoki kuliste o jednorodnej gęstości i masach M_1 i M_2 są umieszczone tak, jak na rys. 16-17. Znaleźć siłę działającą na punkt o masie m , kiedy punkt ten jest umieszczony w odległości (a) $r = a$, (b) $r = b$ oraz (c) $r = c$. Odległość r jest mierzona od środka powłok.

Odp.: (a) $G(M_1 + M_2)m/a^2$. (b) $GM_1 m/b^2$. (c) Zero.

12. Z jaką prędkością minęłaby przesyłka środek Ziemi, gdyby została przesłana tunelem z przykładu 3?



Rys. 16-17. Zadanie 11

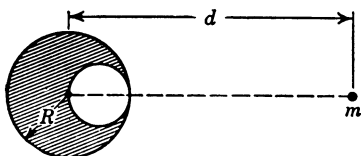
13. Słońce (masa $2,0 \cdot 10^{30}$ kg) porusza się dokoła środka Galaktyki (Drogi Mlecznej) znajdującego się w odległości $2,4 \cdot 10^{20}$ m. Każdy obrót trwa $2,5 \cdot 10^8$ lat. Zakładając, że orbita Słońca jest kołowa oceń liczbę gwiazd w Drodze Mlecznej.

Odp.: $6,5 \cdot 10^{10}$.

14. Rozważmy inercjalny układ odniesienia, którego początek jest umieszczony w środku masy układu Ziemia + spadający przedmiot. (a) Pokazać, że przyspieszenie któregośkolwiek z obu ciał w kierunku środka masy nie zależy od masy tego ciała. (b) Pokazać, że wzajemne, czy też względne przyspieszenie tych dwóch ciał zależy od sumy ich mas. Skomentować następnie twierdzenie, że ciało spada na Ziemię z przyspieszeniem, które nie zależy od masy ciała.

15. Zadanie to pochodzi z olimpiady fizycznej na Uniwersytecie Moskiewskim z 1946 roku (patrz rys. 16-18): W ołowianej kuli o promieniu R wydrążono kulistą wnękę tak, że powierzchnia wydrążenia styka się z zewnętrzną powierzchnią kuli oraz przechodzi przez jej środek. Masa kuli przed wydrążeniem wynosiła M . Jaką siłą, zgodnie z prawem powszechnego ciążenia, kula ołowiana będzie przyciągać małą kulkę o masie m , umieszczoną w odległości d od środka kuli na prostej łączącej środki kul i wydrążenia?

Odp.: $\frac{GmM}{d^2} \left[1 - \frac{1}{8(1 - R/2d)^2} \right]$.



Rys. 16-18. Zadanie 15

16. W załączonej tabelce przedstawiono zmiany g we wnętrzu Ziemi. Promień Ziemi wynosi 6400 km.

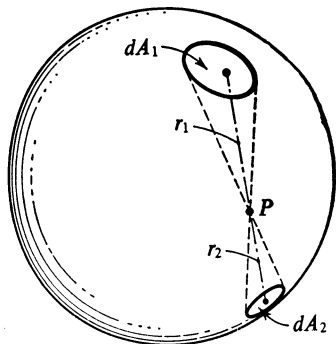
Głębokość km	g m/s ²	Głębokość km	g m/s ²
0	9,82	1400	9,88
33	9,85	1600	9,86
100	9,89	1800	9,85
200	9,92	2000	9,86
300	9,95	2200	9,90
413	9,98	2400	9,98
600	10,01	2600	10,09
800	9,99	2800	10,26
1000	9,95	2900	10,37
1200	9,91	4000	8,00

Wewnątrz ziemskiego rdzenia centralnego (poniżej 2900 km) wartości g zmniejszają się monotonicznie (nie liniowo) od 10,37 m/s² do zera. Rzeczywista zmiana g poniżej 4000 km nie jest pewna. (a) Wykreślić jakościowo g jako funkcję r (gdzie r jest odległością od środka Ziemi) w przedziale od 0 do 6400 km. (b) Szczegółowo wyjaśnić, jak musi zmieniać się gęstość Ziemi w trakcie posuwania się od powierzchni do środka, żeby tłumaczyło to powyższe zmiany g . (c) Przyjąć $\rho = 1$ na powierzchni (średnia wartość ρ wynosi w rzeczywistości 3,0 g/cm³) i wykreślić jakościową zależność ρ od r . We wszystkich rozważaniach przyjąć, że ρ i g są kulisto-symetryczne.

17. (a) Wykazać, że ruch przedmiotu w tunelu przekopanym poprzez Ziemię wzdłuż dowolnej cięciwy (nie tylko wzdłuż średnicy) będzie prostym ruchem harmonicznym; założyć jednorodną gęstość Ziemi. (b) Znaleźć okres ruchu. (c) Czy w ruchu wzdłuż cięciwy przedmiot osiągnie tę samą maksymalną prędkość, co wzdłuż średnicy?

Odp.: (b) 84 min. (c) Nie.

18. Rozważmy punkt materialny znajdujący się w punkcie P , gdziekolwiek wewnątrz wydrążonej kuli. Załóżmy, że powłoka otaczająca punkt ma jednorodną grubość i gęstość. Zbudujemy wąski stożek podwójny z wierzchołkiem w P , wycinający na powłoce powierzchnie dA_1 i dA_2 (rys. 16-19). (a) Pokazać, że wypadkowa siła grawitacyjna wywierana przez wycięte elementy na masę znajdującą się w P równa się zeru. (b) Pokazać następnie, że wypadkowa siła grawitacyjna całej powłoki, działająca na wewnętrzny punkt materialny, jest wszędzie równa zeru (ten sposób postępowania został wymyślony przez Newtona).



Rys. 16-19. Zadanie 18

Paragraf 16-7

19. (a) Czy satelita może być wysłany na taką odległość, na której będzie się obracał dookoła Ziemi z prędkością kątową równą prędkości kątowej Ziemi, tak że będzie on zawsze znajdował się ponad tym samym punktem na Ziemi? (b) Jaki byłby promień orbity takiego, zwanego synchronicznym, satelity ziemskiego?

Odp.: (a) Tak. Płaszczyzna orbity musi pokrywać się z płaszczyzną równika. (b) $4,2 \cdot 10^4$ km.

20. (a) Z jaką prędkością poziomą musi być wyrzucony satelita, żeby na wysokości 160 km nad powierzchnią Ziemi zaczął poruszać się wokół niej po orbicie kołowej? Przyjąć, że promień Ziemi wynosi 6400 km. (b) Jaki będzie okres obrotu?

21. Średnia odległość Marsa od Słońca jest 1,524 razy większa od średniej odległości Ziemi od Słońca. Obliczyć, ile lat musi upłynąć, żeby Mars wykonał jeden obrót dookoła Słońca.

Odp.: 1,87 lat.

22. Określić masę Ziemi na podstawie okresu T i promienia r orbity Księżyca dookoła Ziemi; $T = 27,3$ dni i $r = 3,85 \cdot 10^5$ km.

23. (a) Satelita A znajduje się na kołowej orbicie ziemskiej o promieniu R , zaś satelita B na podobnej orbicie o promieniu $4R$. Obliczyć stosunek okresów obiegu, T_A/T_B . (b) Wahadło oraz układ: masa na sprężynie, drgają na powierzchni Ziemi w przybliżeniu z taką samą częstotliwością. Jakie będą ich częstotliwości w przypadku, gdy umieścimy je najpierw w satelicie A , a następnie w satelicie B ?

Odp.: (a) $T_A/T_B = \frac{1}{8}$. (b) Częstota wahadła wyniesie zero; częstota układu: masa na sprężynie nie ulegnie zmianie.

24. Rozważmy sztuczny satelitę Ziemi znajdującego się na orbicie kołowej. Ustalić, jak wraz ze zmianą promienia r orbity zmieniają się następujące własności tego satelity: (a) okres, (b) energia kinetyczna, (c) moment pędu, (d) prędkość.

25. Pokazać, jak Newton wiedziony przez trzecie prawo Keplera (str. 388) mógł wywnioskować, że siła utrzymująca Księżyc na orbicie kołowej (zróbmy to założenie) musi zmieniać się jak odwrotność kwadratu odległości od środka Ziemi.

26. Satelita ziemski znajdujący się na orbicie eliptycznej ma perigeum (punkt największego zbliżenia) leżące 300 km ponad powierzchnią Ziemi i apogeum (punkt największego oddalenia) 2000 km ponad powierzchnią Ziemi. Ile wynosi stosunek prędkości orbitalnych w perigeum i w apogeum?

27. W wierzchołkach równobocznego trójkąta o boku L umieszczono trzy identyczne ciała o masie M . Z jaką prędkością muszą poruszać się te ciała, ażeby każde obracało się — pod wpływem ciężenia pozostałych — po orbicie w kształcie koła opisanego na trójkącie, przy zachowaniu w czasie ruchu pierwotnej konfiguracji.

Odp.: $\sqrt{GM/L}$.

28. (a) Pokazać, że zagadnienie dwóch ciał z paragrafu 16-7 może być sprowadzone do prostszego zagadnienia jednego ciała przez wykorzystanie wprowadzonego w paragrafie 15-8 pojęcia masy zredukowanej. Innymi słowy, pokazać, że używając masy $\mu = mM/(m+M)$ zamiast m , możemy rozwiązać ruch m względem M tak, jakby M było początkiem naszego inercyjnego układu odniesienia. (b) Pokazać, że zrobione w paragrafie 16-7 założenie o małej wartości R w porównaniu z wartością r jest równoważne założeniu, że masa zredukowana μ jest równa m . (c) Porównać μ dla układu Ziemia-Słońce z masą Ziemi, porównać μ dla układu Księżyc-Ziemia z masą Księżyca. (d) Jaką zmianę we wzorach paragrafu 16-7 wprowadziłoby użycie masy zredukowanej μ układu dwóch ciał zamiast masy m ?

Paragraf 16-9

29. Średnica Marsa wynosi średnio 6900 km, natomiast średnica Ziemi 13 000 km. Masa Marsa wynosi $0,11M_Z$. (a) Jaka jest zależność pomiędzy średnimi gęstościami Marsa i Ziemi? (b) Jaka jest wartość g na Marsie? (c) Jaka jest prędkość ucieczki na Marsie?

Odp.: (a) $\rho_M = 0,73\rho_Z$. (b) $3,7 \text{ m/s}^2$. (c) $5,0 \text{ km/s}$.

30. (a) Pokazać, że warunkiem koniecznym na to, żeby cząsteczka uciekła z atmosfery planety, jest, żeby miała ona prędkość taką, że $v^2 > 2GM/r$, gdzie M jest masą planety i r odległością cząsteczki od środka planety. (b) Wyznaczyć prędkość ucieczki z Ziemi dla cząsteczki atmosfery znajdującej się na wysokości 1000 km ponad powierzchnią Ziemi. (c) Wykonać takie same rachunki dla Marsa.

31. Sądzi się, że „wypalona” gwiazda może zapaść się do obiektu o rozmiarach równych „promieniowi grawitacyjnemu” zdefiniowanemu jako promień, przy którym praca konieczna do usunięcia przedmiotu o masie m_0 z powierzchni gwiazdy do nieskończoności równa się energii spoczynkowej ($m_0 c^2$) przedmiotu. Pokazać, że promień grawitacyjny Słońca wynosi GM_S/c^2 i obliczyć tę wartość w jednostkach obecnego promienia Słońca (przegląd tego zjawiska znajduje się w artykule Philipa C. Petersa, Black Holes: New Horizons in Gravitational Theory, *American Scientist*, Sept.-Oct. 1974).

Odp.: $2 \cdot 10^{-6} R_S$.

32. Pokazać, że prędkość ucieczki ze Słońca w odległości równej odległości Ziemi od Słońca jest $\sqrt{2}$ razy większa niż prędkość Ziemi na jej orbicie. Założyć, że orbita ziemską jest kołową.

33. Z powierzchni Ziemi w kierunku pionowym wystrzelono raketę z prędkością początkową 10 km/s . Jak wysoko wzniesie się ta raketa nad powierzchnię Ziemi, przy pominięciu działania hamującego atmosfery? Przyjąć dla promienia Ziemi wartość 6400 km .

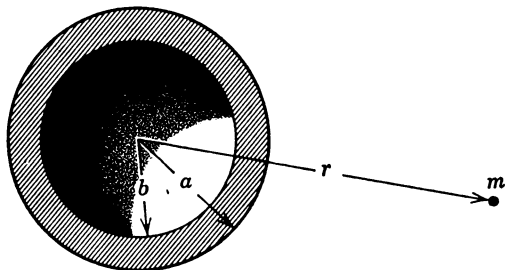
Odp.: $2,6 \cdot 10^4 \text{ km}$.

34. Raketa została przyspieszona blisko powierzchni Ziemi do prędkości $v = 2\sqrt{gR_Z}$ i następnie poleciała w górę. (a) Pokazać, że ucieknie ona od Ziemi. (b) Pokazać, że bardzo daleko od Ziemi jej prędkość wyniesie $v = \sqrt{2gR_Z}$.

35. Fizycy rozważali możliwość istnienia ciał z ujemną masą; dla takich hipotetycznych ciał postulują się, że we wzorach fizycznych m powinno być zastąpione przez $-m$. Przypuśćmy, że w odległości d umieszczono dwa punkty materialne o masach m i $-m$. Podać (a) siłę działającą na każdy punkt i (b) ich przyspieszenia. Zakładając, że początkowo oba punkty są w spoczynku, opisać ich oczekiwany ruch oraz pokazać, że ruch ten nie podważa praw zachowania pędu i energii mechanicznej. Takie cząstki o ujemnej masie nie zostały dotąd znalezione.

Odp.: (a) Na podstawie prawa ciężenia Newtona siła jest odpychająca. (b) Na podstawie drugiej zasady dynamiki Newtona przyspieszenia są skierowane w tę samą stronę, od masy ujemnej do dodatniej.

36. Kula materialna o masie M i promieniu a ma współśrodkowe wydrążenie o promieniu b , tak jak przedstawia przekrój na rys. 16-20. (a) Naskicować wykres siły grawitacyjnej F_0 , wywieranej przez kulę



Rys. 16-20. Zadanie 36

na cząstkę o masie m położoną w odległości r od środka kuli, jako funkcji r w przedziale $0 \leq r < \infty$. Uwzględnić w szczególności punkty $r = 0$, b , a i ∞ . (b) Naskicować odpowiedni wykres dla energii potencjalnej $U(r)$ układu. (c) W jaki sposób można otrzymać z tych rysunków wykresy natężenia pola grawitacyjnego i potencjału grawitacyjnego, wywołanych przez kulę?

37. Dwa punkty materialne o masach m i M znajdują się początkowo w spoczynku w nieskończonej odległości od siebie. Pokazać, że w każdej chwili czasu względna prędkość ich zbliżania się, wywołanego przyciąganiem grawitacyjnym, wynosi $\sqrt{2G(M+m)/d}$, gdzie d jest odległością punktów w tej chwili.

38. Ile czasu potrzeba komete poruszającej się po torze parabolicznym na to, by przesunęła się od punktu największego zbliżenia do Słońca o kąt 90° mierzony ze Słońca? Niech odległość punktu największego zbliżenia do Słońca równa się promieniowi orbity ziemskiej, z założenia kołowej (Wskazówka: patrz przykład 4 i zadanie 32).

Paragraf 16-10

39. W gwiazdzie podwójnej obie gwiazdy o masach $3 \cdot 10^{30}$ kg każda obracają się we wzajemnej odległości 10^{11} m dokoła ich wspólnego środka masy. (a) Jaka jest ich wspólna prędkość kątowna? (b) Przypuśćmy, że przez środek masy prostopadle do płaszczyzny orbitalnej gwiazd przelatuje meteor. Jaka musi być jego prędkość, ażeby uciekł on z pola grawitacyjnego gwiazdy podwójnej?

Odp.: (a) $2 \cdot 10^{-7}$ rad/s. (b) $9 \cdot 10^4$ m/s.

40. Masa 800 kg i masa 600 kg znajdują się w odległości 0,25 m. (a) Jakie jest natężenie pola grawitacyjnego wywołanego przez te masy w punkcie znajdującym się w odległości 0,20 m od 800 kg masy i 0,15 m od 600 kg masy? (b) Jaki jest potencjał grawitacyjny w tym punkcie?

41. Ciała o masach 200 g i 800 g znajdują się w odległości 12 cm od siebie. (a) Znaleźć siłę grawitacyjną działającą na masę jednostkową leżącą na linii łączącej te ciała w odległości 4,0 cm od masy 200 g. (b) Znaleźć energię potencjalną na jednostkę masy w tym punkcie, (c) Jaką pracę trzeba wykonać, żeby przesunąć tę masę jednostkową do punktu oddalonego o 4,0 cm od masy 800 g wzdłuż linii łączącej środki ciał?

Odp.: (a) Zero. (b) $-10 \cdot 10^{-5}$ erg/g. (c) $-5,0 \cdot 10^{-6}$ erg.

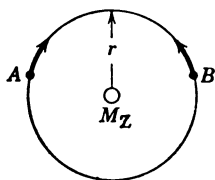
42. Statek kosmiczny wybierający się w podróż międzygwiazdową musi przezwyciężyć pole grawitacyjne Ziemi, a także Słońca. (a) Ile wynosi całkowita ilość energii konieczna na to, by statek o masie 1,0 kilotonny znajdujący się na orbicie wznoszącej się 480 km ponad powierzchnią Ziemi uwolnił się od wspólnego pola grawitacyjnego Ziemi i Słońca? Pominąć obecność wszelkich innych ciał w Układzie Słonecznym. (b) Jaka część tej energii zostanie zużyta do przezwyciężania pola słonecznego?

43. (a) Napisać wyrażenie na energię potencjalną ciała o masie m znajdującego się w polu grawitacyjnym układu Ziemia-Księżyc. Niech M_Z będzie masą Ziemi, M_K masą Księżyca, R odległością od środka Ziemi oraz r odległością od środka Księżyca. (b) W jakim punkcie między Ziemią i Księżycem natężenie całkowitego pola grawitacyjnego wywołanego przez Ziemię i Księżyc będzie równe zero? (c) Jaki będzie potencjał grawitacyjny i natężenie pola na powierzchni Ziemi? (d) A na powierzchni Księżyca.

Odp.: (a) $-Gm(M_Z/R + M_K/r)$. (b) $3,4 \cdot 10^8$ m od Ziemi. (c) $-6,3 \cdot 10^7$ J/kg; $9,8$ m/s². (d) $-3,9 \cdot 10^6$ J/kg; $1,6$ m/s².

Paragraf 16-11

44. Rozważmy dwa satelity A i B o równych masach m , poruszające się dokoła Ziemi Z po tej samej orbicie kołowej o promieniu r , ale w przeciwnych kierunkach, i w związku z tym dążące do zderzenia (patrz rys. 16-21). (a) Znaleźć w zależności od G , M_Z , m i r , całkowitą energię mechaniczną $E_A + E_B$ układu: oba satelity plus Ziemia przed zderzeniem. (b) Znaleźć całkowitą energię mechaniczną bezpośrednio po zderzeniu, w przypadku gdy zderzenie jest całkowicie niesprężyste tak, że pozostanie po nim wrak w postaci jednego kawałka spletanego materiału (masa = $2m$). (c) Opisać ruch wraka od tej chwili.

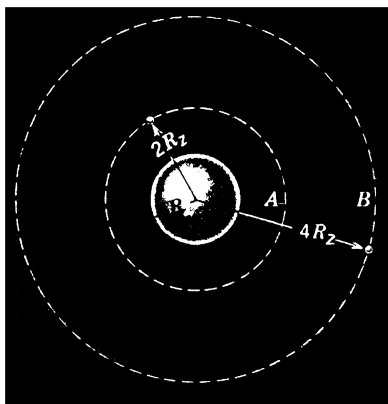


Rys. 16-21. Zadanie 44

45. (a) Czy trzeba zużyć więcej energii na to, żeby wynieść satelitę na wysokość 1600 km ponad Ziemię, niż na to, by umieścić go na orbicie gdy już się na tej wysokości znalazł. (b) A jak przedstawia się sytuacja dla wysokości 3200 km? (c) A co dla 1800? Przyjąć dla promienia Ziemi wartość 6400 km.

Odp.: (a) Nie. (b) Też nie. (c) Tak.

46. Dwa satelity, *A* i *B*, każdy o masie *m*, mają być wysłane na (prawie) kołowe orbity dokoła środka Ziemi. Satelita *A* ma krążyć na wysokości 6400 km, a satelita *B* na wysokości 19 200 km. Promień Ziemi R_Z wynosi 6400 km (rys. 16.22). (a) Jaki jest stosunek energii potencjalnych satelitów *B* i *A* na orbitach? (Wyjaśnić wynik posługując się pojęciem pracy koniecznej na przeniesienie każdego satelity z jego orbity do nieskończoności.) (b) Jaki jest stosunek energii kinetycznych satelitów *B* i *A* na orbitach? (c) Który satelita ma większą energię całkowitą, jeżeli masa każdego wynosi 15 kg? O ile większą?



Rys. 16-22. Zadanie 46

47. Para gwiazd obraca się dokoła wspólnego środka masy. Jedna z gwiazd ma masę *M*, dwukrotnie większą od masy *m* drugiej gwiazdy, $M = 2m$. Ich środki znajdują się w odległości *d*, przy czym *d* jest duże w porównaniu z rozmiarami którejkolwiek z gwiazd. (a) Wyprowadzić, w zależności od *d*, *m* i *G*, wzór na okres obrotu gwiazd dokoła ich wspólnego środka masy. (b) Porównać momenty pędu obu gwiazd w ruchu dokoła wspólnego środka masy, znajdując ich stosunek L_m/L_M . (c) Porównać energie kinetyczne obu gwiazd, znajdując ich stosunek K_m/K_M .

Odp.: (a) $2\pi d^{3/2}/\sqrt{3Gm}$. (b) 2. (c) 2.

48. Satelita krąży początkowo po kołowej, w przybliżeniu, orbicie na wysokości 640 km nad powierzchnią Ziemi; jego masa wynosi 220 kg. (a) Wyznaczyć jego prędkość. (b) Wyznaczyć jego okres. (c) Satelita z różnych powodów traci energię mechaniczną ze (średnią) szybkością $1,4 \cdot 10^5$ J na jeden obrót. Przyjmując rozsądne przybliżenie, że tor jest „kołem o wolno zmniejszającym się promieniu”, wyznaczyć odległość od powierzchni Ziemi, prędkość i okres satelity w końcu 1500-ego obrotu. (d) Ile wynosi średnia siła hamująca? (e) Czy moment pędu jest zachowany?

49. Punkt materialny o masie *m* znajduje się pod wpływem przyciągającej siły centralnej o wartości k/r^2 , gdzie *k* jest pewną stałą. Wiedząc, że w chwili gdy punkt znajduje się na swojej orbicie zamkniętej w położeniu ekstremalnym, w odległości *a* od centrum siły, jego prędkość wynosi $\sqrt{k/2ma}$, znaleźć (a) drugie położenie ekstremalne oraz (b) prędkość punktu w tym położeniu.

Odp.: (b) $3\sqrt{k/2ma}$.

Paragraf 16-12

50. Wahadło Foucaulta. Używając wahadła przymocowanego w górnym końcu tak, że może ono wykonywać swobodnie ruch wahadłowy w każdym kierunku, możemy powtórzyć doświadczenie po raz pierwszy pokazane publicznie przez Foucaulta w Paryżu w roku 1851. Jeżeli wahadło wprowadzi się w ruch wahadłowy, wtedy płaszczyzna wahań powoli obraca się względem linii narysowanej na podłodze, chociaż siła napięcia linki podtrzymującej ciężarek oraz działające nań przyciąganie grawitacyjne Ziemi leżą w płaszczyźnie pionowej. (a) Pokazać, że zjawisko to jest rezultatem tego, że Ziemia nie jest inercyjnym układem odniesienia. (b) Pokazać, że okres obrotu płaszczyzny wahadła Foucaulta, znajdującego się na szerokości geograficznej θ , wynosi $(24/\sin\theta)$ h. (c) Uzasadnić w prosty sposób otrzymany wynik dla $\theta = 90^\circ$ (bieguny) i $\theta = 0^\circ$ (równik).