

14. Równowaga ciał sztywnych

14-1. Ciała sztywne

Wieże podtrzymujące most wiszący muszą być dostatecznie wytrzymałe, aby nie zawalić się pod ciężarem samego mostu i pojazdów poruszających się po nim; podwozie samolotu musi wytrzymać obciążenia, nawet gdy pilot wykona niezbyt poprawnie manewr lądowania; zęby widelca nie mogą ulec zgięciu, kiedy wbijamy je w twarde stek. We wszystkich takich przypadkach inżyniera interesuje to, czy rozważane, z założenia sztywne układy rzeczywiście pozostaną sztywnymi pod działaniem określonych sił i towarzyszących im momentów sił.

W takich zagadnieniach inżynier musi postawić sobie dwa pytania: (1) Jakie siły działają na rozważane ciało sztywne i jakie są momenty tych sił? (2) Czy biorąc pod uwagę konstrukcję i użyte materiały ciało pozostanie sztywne pod działaniem tych sił? W rozdziale tym będziemy omawiać tylko pierwsze z tych pytań; odpowiedź na drugie pytanie Czytelnik znajdzie w podręcznikach technicznych.

14-2. Równowaga ciała sztywnego

Zwracamy uwagę, że każde z wymienionych w poprzednim paragrafie ciał sztywnych (wieże mostów, podwozie samolotu i widelec) znajdują się w stanie *równowagi mechanicznej*, jeżeli obserwowane z inercjalnego układu odniesienia (1) liniowe przyspieszenie $\mathbf{a}_{\text{śr.m.}}$ jego środka masy jest równe zeru i (2) jego kątowne przyspieszenie $\boldsymbol{\alpha}$ względem dowolnej osi nieruchomej w tym układzie odniesienia jest również równe zeru.

Definicja ta nie wymaga od ciała, aby było w spoczynku względem obserwatora, lecz tylko aby nie miało przyspieszenia. Jego środek masy np. może poruszać się ze stałą prędkością $\mathbf{v}_{\text{śr.m.}}$, a ciało może obracać się dookoła nieruchomej osi ze stałą prędkością kątową $\boldsymbol{\omega}$. Jeżeli ciało spoczywa (tzn. $\mathbf{v}_{\text{śr.m.}} = 0$ i $\boldsymbol{\omega} = 0$), mówimy, że znajduje się ono w stanie *równowagi statycznej*, będącej głównym przedmiotem rozważań tego rozdziału. Jednakże, jak zobaczymy, ograniczenia nałożone na siły i momenty sił są takie same, niezależnie od tego, czy stan równowagi ciała jest stanem równowagi statycznej, czy też niestatycznej. Poza tym, wybierając nowy, odpowiedni układ odniesienia, możemy każdy przypadek równowagi (niestatycznej) przetransformować do stanu równowagi statycznej.

Ruch postępowy ciała sztywnego o masie M opisuje równanie (9-10), czyli

$$\mathbf{F}_{zew} = M\mathbf{a}_{sr.m.},$$

w którym $\mathbf{F}_{zew}$ jest sumą wektorową wszystkich zewnętrznych sił działających na ciało. Ponieważ w stanie równowagi $\mathbf{a}_{sr.m.}$ musi być równe zeru, pierwszy warunek równowagi (statycznej albo nie) formułujemy następująco: *suma geometryczna wszystkich zewnętrznych sił działających na ciało w stanie równowagi musi równać się zeru.*

Możemy zatem zapisać warunek (1) jako

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots = 0; \quad (14-1)$$

w wyrażeniu tym opuściliśmy dla uproszczenia oznaczenie „zew” przy symbolu $\mathbf{F}$. To wektorowe równanie prowadzi do trzech równań skalarnych

$$\begin{aligned} F_x &= F_{1x} + F_{2x} + \dots = 0, \\ F_y &= F_{1y} + F_{2y} + \dots = 0, \\ F_z &= F_{1z} + F_{2z} + \dots = 0, \end{aligned} \quad (14-2)$$

z których widać, że suma składowych sił w każdym z trzech wzajemnie prostopadłych kierunków jest równa zeru.

Drugi warunek równowagi wymaga, aby przyspieszenie kątowe α równało się zeru dla dowolnej osi obrotu. Ponieważ przyspieszenie kątowe ciała sztywnego związane jest z momentem siły (przypominamy, że dla nieruchomej osi obrotu $\tau = I\alpha$) ten drugi warunek równowagi (statycznej albo nie) możemy wyrazić następująco: *suma geometryczna wszystkich zewnętrznych momentów sił działających na ciało w stanie równowagi musi równać się zeru.*

Warunek (2) piszemy jako

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 + \dots = 0. \quad (14-3)$$

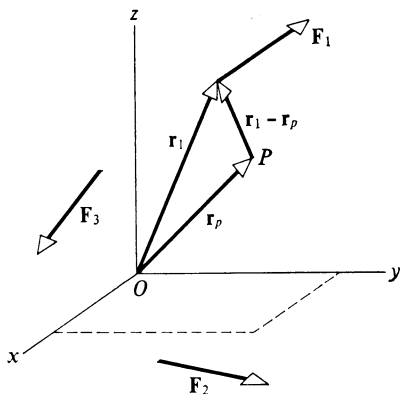
To wektorowe równanie prowadzi do trzech równań skalarnych

$$\begin{aligned} \tau_x &= \tau_{1x} + \tau_{2x} + \dots = 0, \\ \tau_y &= \tau_{1y} + \tau_{2y} + \dots = 0, \\ \tau_z &= \tau_{1z} + \tau_{2z} + \dots = 0, \end{aligned} \quad (14-4)$$

które mówią, że w stanie równowagi suma składowych momentów sił działających na ciało w każdym z trzech dowolnych prostopadłych do siebie kierunków jest równa zeru.

Wypadkowy moment siły $\boldsymbol{\tau}$ w równaniu (14-3), który równa się zeru w stanie równowagi mechanicznej, określony jest względem wybranego początku układu O . Wielkości τ_x , τ_y i τ_z w równaniu (14-4) są skalarnymi składowymi wektora $\boldsymbol{\tau}$ w dowolnym prostokątnym układzie osi o początku O . Ustawienie w przestrzeni tych osi nie ma w tym przypadku żadnego znaczenia. Wynika to z faktu, że jeżeli wektor jest równy zeru, to jego składowe muszą być również równe zeru, niezależnie od ustawienia osi układu współrzędnych. Czytelnik może zapytać, czy wybór początku układu ma jakieś znaczenie. Jak zobaczymy dalej, wybór ten nie ma znaczenia, ponieważ (dla ciała znajdującego się w stanie równowagi względem przesunięć), jeżeli $\boldsymbol{\tau} = 0$ względem punktu O , to jest również równy zeru względem każdego innego punktu w danym układzie odniesienia. W tym paragrafie zajmujemy się warunkiem (2) dla ciała będącego w równowadze względem przesunięć; warunek ten spełniony jest wówczas, gdy możemy pokazać, że albo (a) $\boldsymbol{\tau} = 0$ względem dowolnego punktu [równanie (14-3)], albo (b) składowe momentu siły wzdłuż dowolnych trzech prostopadłych do siebie osi są równe zeru [równanie (14-4)].

Przyjmijmy, że mamy ciało sztywne w stanie równowagi względem przesunięć, co oznacza, że $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots = 0$ [równanie (14-1)]. Chcemy teraz pokazać, że moment siły względem dowolnego punktu (takiego jak punkt P na rys. 14-1) będzie równy zeru, jeżeli ten moment siły względem wybranego punktu (takiego jak punkt O na rys. 14-1) jest równy zeru. Na rysunku przedstawione są trzy z n sił: $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$, przyłożone w różnych punktach ciała sztywnego i skierowane w różnych kierunkach. Punkty przyłożenia sił są wyznaczone względem początku układu O wektorami, takimi jak $\mathbf{r}_1$, dowolny punkt P jest określony wektorem $\mathbf{r}_P$, a wektor $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_P$ wyznacza punkt przyłożenia siły $\mathbf{F}_1$ względem punktu P .



Rys. 14-1. Trzy spośród n sił $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \dots, \mathbf{F}_n$ działających na ciało sztywne (nie zaznaczone na rysunku). Przy założeniu, że ciało jest w równowadze względem przesunięć, można pokazać (patrz tekst), że jeżeli $\tau = 0$ dla punktu O , to znika on dla dowolnego innego punktu, np. P .

Wypadkowy moment siły względem punktu O [patrz równanie (12-1)] możemy zapisać w postaci:

$$\tau_0 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_n,$$

a względem punktu P w postaci

$$\tau_P = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_P) \times \mathbf{F}_1 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_P) \times \mathbf{F}_2 + \dots + (\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_P) \times \mathbf{F}_n.$$

Ostatnie równanie można zapisać następująco:

$$\tau_P = [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_n] - [\mathbf{r}_P \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n)].$$

Jeżeli teraz, zgodnie z założeniem, pierwszy warunek równowagi jest spełniony, czyli że $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n = 0$, to wyrażenie w drugim nawiasie kwadratowym znika. Natomiast wyrażenie w pierwszym nawiasie kwadratowym jest to po prostu τ_0 (patrz wyżej), tak że przy tych warunkach

$$\tau_P = \tau_0.$$

Zatem, dla ciała będącego w stanie równowagi względem przesunięć, jeżeli $\tau_0 = 0$ to i $\tau_P = 0$, gdzie P jest dowolnym punktem.

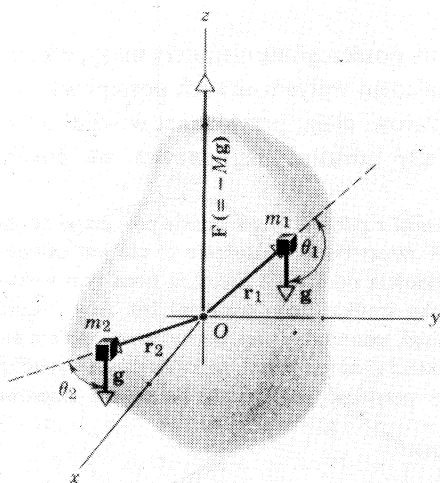
Zatem mamy sześć niezależnych warunków dla sił działających na ciało będące w stanie równowagi. Warunki te zapisaliśmy w postaci sześciu równań algebraicznych (14-2) i (14-4). Równania te odpowiadają sześciu stopniom swobody ciała sztywnego, czyli trzem stopniom swobody w ruchu postępowym i trzem stopniom swobody w ruchu obrotowym.

Często mamy do czynienia z zadaniami, w których wszystkie siły leżą w jednej płaszczyźnie. W takim przypadku mamy tylko trzy warunki. Suma składowych sił musi równać się zeru dla każdego z dwóch kierunków prostopadłych, leżących na płaszczyźnie i suma momentów sił względem dowolnej osi prostopadłej do tej płaszczyzny także musi się równać zeru. Warunki te odpowiadają trzem stopniom swobody dla ruchu w jednej płaszczyźnie: dwa dla ruchu postępowego i jeden dla obrotowego.

Aby uprościć obliczenia, ograniczymy się głównie do zadań na płaszczyźnie. Nie nałożymy w ten sposób żadnych zasadniczych ograniczeń na ogólną zasadę postępowania. Poza tym, również dla wygody, będziemy rozważać tylko przypadek równowagi statycznej, kiedy ciała znajdują się w stanie spoczynku, w aktualnie wybranym inercjalnym układzie odniesienia.

14-3. Środek ciężkości

Jedną z sił występujących w czasie ruchu ciał sztywnych jest siła ciężkości. W rzeczywistości nie jest to tylko jedna siła, lecz wypadkowa wielkiej liczby sił. Na każdy element ciała działa siła grawitacyjna. Jeśli ciało o masie M podzielimy na dużą liczbę elementów, powiedzmy n , to siła grawitacyjna Ziemi działająca na i -ty element o masie m_i wynosi $m_i g$. Siła ta jest skierowana w dół, do środka Ziemi. Jeżeli przyspieszenie grawitacyjne jest stałe w całej objętości wydzielonego obszaru, to mówimy wtedy o jednorodności pola grawitacyjnego. Wektor $\mathbf{g}$ ma ten sam kierunek i tę samą wartość bezwzględną w całym tym obszarze. Gdy ciało sztywne umieszczone jest w jednorodnym polu grawitacyjnym, wektor $\mathbf{g}$ jest jednakowy dla wszystkich elementów ciała i tym samym siły ciężkości tych elementów są do siebie równoległe. Jeżeli przyjmiemy, że ziemskie pole grawitacyjne jest jednorodne, możemy pokazać, że poszczególne siły ciężkości elementów można zastąpić jedną siłą $M\mathbf{g}$ przyłożoną do środka masy ciała. Innymi słowy, wszystkie siły ciężkości działające w dół może zrównoważyć pojedyncza siła $\mathbf{F} (= -M\mathbf{g})$ działająca w górę, pod warunkiem, że jest ona przyłożona do środka masy ciała.



Rys. 14-2. Ciało o dowolnym kształcie podzielono na n elementów, z których dwa m_1 i m_2 zaznaczono na rysunku. Ciało to może utrzymać w równowadze względem obrotów i przesunąć jedną siłą $\mathbf{F} (= -M\mathbf{g})$ skierowaną w górę i przyłożoną w środku masy. Dowód w tekście (przy założeniu, że pole grawitacyjne jest jednorodne)

Na rysunku 14-2 widzimy ciało sztywne, z którego wydzielono umownie dwa elementy masy m_1 i m_2 spośród n takich elementów, na które to ciało zostało podzielone. Siła $\mathbf{F} (= -M\mathbf{g})$ skierowana w górę działa na pewien punkt O . Pozostaje pokazać, że ciało znajduje się w stanie równowagi mechanicznej, jeżeli (i tylko wtedy, jeżeli) punkt O jest środkiem masy. Warunek 1 dla stanu równowagi [równanie (14-1)] został już spełniony przez wybór wartości i kierunku siły $\mathbf{F}$. To znaczy że

$$\mathbf{F} + m_1 \mathbf{g} + m_2 \mathbf{g} + \dots + m_n \mathbf{g} = 0$$

albo

$$\mathbf{F} = -(m_1 + m_2 + \dots + m_n) \mathbf{g} = -M\mathbf{g},$$

co odpowiada warunkowi pierwszemu, aby ciało znajdowało się w stanie równowagi.

Pozostaje jeszcze dowieść, że wektor $\tau = 0$ dla dowolnego pojedynczego punktu ciała, np. dla punktu O . Jest to właśnie drugi warunek na stan równowagi. Wybierając punkt O jako początek układu zapewniliśmy, że moment siły F względem tego punktu jest równy zeru, ponieważ ramię tej siły jest równe zeru. Natomiast moment siły względem punktu O , pochodzący od wszystkich poszczególnych elementów masy ciała, na które działa przyciąganie grawitacyjne, wynosi

$$\tau = \mathbf{r}_1 \times m_1 \mathbf{g} + \mathbf{r}_2 \times m_2 \mathbf{g} + \dots + \mathbf{r}_n \times m_n \mathbf{g};$$

ponieważ m_1 i m_2 itd. są skalarami, równanie to możemy napisać następująco:

$$\tau = m_1 \mathbf{r}_1 \times \mathbf{g} + m_2 \mathbf{r}_2 \times \mathbf{g} + \dots + m_n \mathbf{r}_n \times \mathbf{g}.$$

Ponieważ $\mathbf{g}$ jest takie samo we wszystkich wyrazach, możemy je jako stały czynnik wynieść poza nawias, otrzymując

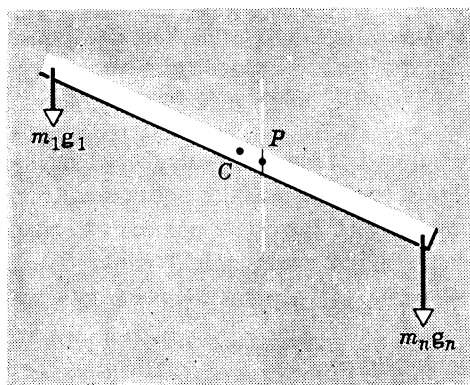
$$\tau = (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \dots + m_n \mathbf{r}_n) \times \mathbf{g} = \left(\sum_1^n m_i \mathbf{r}_i \right) \times \mathbf{g};$$

suma odnosi się tu do wszystkich elementów masy ciała.

Jeżeli teraz punkt O jest ośrodkiem masy ciała, to powyższa suma jest równa zeru. Wynika to z definicji środka masy (patrz równanie (9.5b) i późniejsza dyskusja). Wnioskujemy zatem, że jeżeli punkt O jest środkiem masy, to $\tau = 0$ i drugi warunek dla stanu równowagi mechanicznej jest spełniony*.

Widzimy więc, że siły grawitacyjne działające na poszczególne elementy masy, z których składa się ciało sztywne, są równoważne (pod względem wpływu na ruch postępowy i obrotowy ciała) pojedynczej sile $M\mathbf{g}$, całkowitemu ciężarowi ciała, przyłożonej w środku masy. Punkt przyłożenia równoważnej wypadkowej siły grawitacyjnej nazywa się *środkiem ciężkości*.

Pokrywanie się środka ciężkości ze środkiem masy wynika z założenia, że ziemskie pole grawitacyjne $\mathbf{g}$, jest takie samo dla wszystkich części ciała sztywnego. W rzeczywistości założenie to nie jest całkowicie prawdziwe, ponieważ wartość $\mathbf{g}$ zmienia się wraz z odległością od środka Ziemi, a poza tym wektor $\mathbf{g}$ dla każdego punktu jest skierowany radialnie, w kierunku środka Ziemi (rozdział 16). Aby stwierdzić niejednorodność pola grawitacyjnego, rozważmy bardzo długi, jednorodny pręt, pochylony względem pionu w ziemskim polu grawitacyjnym (rys. 14-3). Środkiem ciężkości ciała jest punkt, na który działa wypadkowa siła grawitacyjna. Jest to ten sam punkt, w którym należy przyłożyć pojedynczą, przeciwnie skierowaną

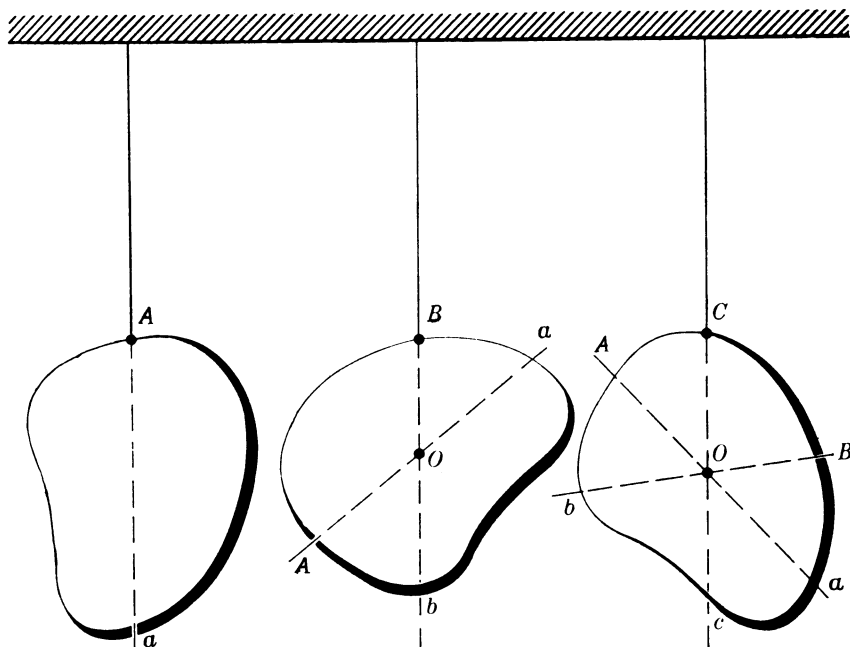


Rys. 14-3. Środek masy C i środek ciężkości P w rzeczywistości nie pokrywają się, ze względu na niejednorodność pola grawitacyjnego

* Ciało może osiągnąć stan równowagi względem obrotów dla dowolnego punktu zawieszenia. Jednakże środek masy jest *jedynym* punktem, który zapewnia to, że $\tau = 0$ dla ciała dowolnie obróconego względem tego punktu.

siłę, aby ciało znalazło się w równowadze. Gdyby pręt znajdował się w jednorodnym polu grawitacyjnym, pojedyncza, skierowana do góry siła o wartości Mg przyłożona w środku masy, utrzymywałaby go w stanie równowagi ze względu na przesunięcia i obroty. W niejednorodnym polu wartość przyspieszenia g w punkcie m_1 jest mniejsza niż w punkcie m_2 . Punktem, w którym należy przyłożyć pojedynczą siłę, aby utrzymać ciało w równowadze, będzie teraz pewien punkt P leżący nieco poniżej środka masy. Poza tym, gdy zmienimy ustawienie ciała, wtedy jednocześnie zmieni się położenie punktu P . W takich przypadkach położenie środka ciężkości nie jest ściśle ustalone. Nie tylko nie pokrywa się ono ze środkiem masy, lecz zmienia się w zależności od ustawienia ciała w polu grawitacyjnym.

W prawie wszystkich zagadnieniach mechaniki opisywane przedmioty mają rozmiary małe w porównaniu z odległościami, na których g zmienia się w sposób dający się zauważyć. Dlatego też mamy prawo założyć, że g jest jednorodne w całej objętości rozpatrywanych przedmiotów. Zatem środek masy i środek ciężkości można traktować jako ten sam punkt. Dzięki tej zgodności możemy znaleźć doświadczalnie środek masy przedmiotów o nieregularnych kształtach. Wyznamy np. środek masy ciężkiej płyty, takiej jak na rys. 14-4. Ciało zawieszamy na sznurku w pewnym punkcie A znajdującym się na krawędzi



Rys. 14-4. Ponieważ środek masy O znajduje się zawsze dokładnie pod punktem zawieszenia, wieszając płytę na dwa różne sposoby, wyznaczamy punkt O

tego ciała. Po ustaleniu się równowagi przeprowadzamy linię pionową Aa , na której musi się znajdować środek ciężkości. Tylko bowiem w tym przypadku moment siły, jakim działa sznurek i moment siły ciężkości równoważą się. Następnie zawieszamy ciało w punkcie B i przeprowadzamy linię Bb , na której również znajduje się środek ciężkości. Jedynym punktem wspólnym tych dwóch linii jest punkt przecięcia O ; jest to właśnie środek ciężkości, a jednocześnie przy założeniu jednorodności pola grawitacyjnego, środek masy ciała. Jeżeli teraz zawiesimy ciało w jakimkolwiek innym punkcie C znajdującym się na jego krawędzi, to linia Cc przejdzie również przez punkt O . Tak więc środek masy pokrywa się ze środkiem ciężkości i znajduje się w punkcie O .

14-4. Przykłady równowagi

Stosując warunki równowagi do konkretnych zadań (zerowa siła wypadkowa i zerowy moment sił względem dowolnej osi), możemy uprościć rozważania, postępując w sposób opisany niżej.

Po pierwsze, określamy granice rozważanego układu. W ten sposób będziemy wyraźnie wiedzieli, do jakiego ciała albo układu ciał mamy stosować prawa równowagi statycznej. Proces ten nazywamy *wyodrębnianiem układu*.

Po drugie, opisujemy siły *zewnętrzne*, podając ich wartość, kierunek i punkt przyłożenia. Dla wydzielonego poprzednio układu siłami zewnętrznymi są tylko takie siły, które działają spoza jego granic. Przykładami sił zewnętrznych często spotykanych w statyce są siły grawitacyjne, siły przenoszone przez sznurki, druty, pręty i belki przekraczające granice układu. Czasami trudno jest określić kierunek siły. W takim przypadku przecinamy na granicy układu element przenoszący siłę i patrzymy, jak zachowują się otrzymane z przecięcia końce. Jeżeli końce zaczynają się oddalać, siła jest skierowana na zewnątrz. W przypadku wątpliwym zwrot wybieramy dowolnie. Jeśli rozwiązując zadanie otrzymamy na siłę wartość ujemną, będzie to oznaczało, że siła działa w kierunku przeciwnym niż przyjęliśmy. Podkreślamy, że wystarczy wziąć pod uwagę tylko siły zewnętrzne. Wszystkie siły wewnętrzne redukują się nawzajem parami.

Po trzecie, zanim zastosujemy pierwszy warunek równowagi [równanie (14-2)], wybieramy w sposób jak najbardziej wygodny dla nas układ współrzędnych, wzdłuż osi którego rozłożymy na składowe siły zewnętrzne. W ten sposób uproszczamy wyliczenia. Zwykle jest oczywiste, jaki układ współrzędnych należy wybrać.

Po czwarte, zanim zastosujemy drugi warunek równowagi [równanie (14-4)], wybieramy taki układ współrzędnych, wzdłuż osi którego rozłożymy na składowe momenty sił zewnętrznych, aby nasze obliczenia uległy uproszczeniu. Poszukując dwóch warunków na stan równowagi statycznej ciała możemy wybrać dwa różne układy współrzędnych, jeżeli okaże się to wygodne. Przypuśćmy, że mamy oś przechodzącą przez punkt, do którego przyłożone są dwie siły i prostopadłą do płaszczyzny utworzonej przez te siły; składowe momentów tych sił wzdłuż takiej osi automatycznie znikają. W stanie równowagi moment wypadkowy wszystkich sił zewnętrznych względem dowolnej osi musi być równy zeru. Momenty sił wewnętrznych redukują się parami i nie ma potrzeby nimi się zajmować.

Przykład 1. (a) Jednorodna belka stalowa o długości 1 m opiera się swymi końcami o dwie wagi (rys. 14-5). Ciężar belki wynosi 4 kG. Jakie będą wskazania wag?

Naszym układem jest belka. Siły działające na tę belkę są następujące: W przyłożona w środku ciężkości i skierowana w dół oraz wywierane przez wagi F_1 i F_2 skierowane w górę (rys. 14-5a). Z trzeciej zasady Newtona wynika, że siłom F_1 i F_2 odpowiadają równe, lecz przeciwnie skierowane siły działające na wagi. Aby znać wskazania wag, wystarczy obliczyć siły F_1 i F_2 .

Zapiszmy warunek równowagi względem przesunięć [równanie (14-1)]:

$$F_1 + F_2 + W = 0.$$

Ponieważ wszystkie siły działają w kierunku pionowym, wystarczy rozpatrzyć tylko ustawioną pionowo oś y . W ten sposób równanie wektorowe przejdzie w równanie skalarne

$$F_1 + F_2 - 4 \text{ kG} = 0.$$

Warunek równowagi względem obrotów wymaga, aby znikła składowa wypadkowego momentu sił działających na belkę wzdłuż *dowolnej* osi obrotu. Wiemy już, że w tym celu wystarczy pokazać, że znikają

składowe tego momentu dla dowolnego układu trzech wzajemnie prostopadłych osi. Składowe te z pewnością są równe zero dla każdych dwóch prostopadłych osi leżących w płaszczyźnie rys. 14-5a (dlaczego?). Wystarczy więc zażądać, aby znikał wypadkowy moment sił dla dowolnie wybranej osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku. Weźmy oś prostopadłą do płaszczyzny rysunku, przechodzącą przez środek ciężkości. Jeżeli przyjmujemy, że obrót zgodny z ruchem wskazówek zegara jest dodatni, a przeciwnie skierowany — ujemny, to warunek równowagi względem obrotów [równanie (14-4)] zapiszemy w postaci:

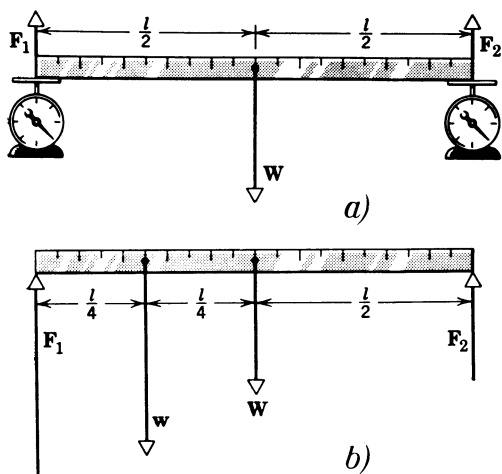
$$F_1 \left(\frac{l}{2} \right) - F_2 \left(\frac{l}{2} \right) + W(0) = 0, \quad \text{czyli} \quad F_1 - F_2 = 0,$$

skąd otrzymujemy

$$F_1 + F_2 = 2F_1 = 2F_2 = 4 \text{ kG},$$

$$F_1 = F_2 = 2 \text{ kG}.$$

Jak mogliśmy oczekiwać, każda waga wskazuje 2 kG.



Rys. 14-5. (a) Przykład 1a. Jednorodna belka stalowa opiera się na dwóch wagach sprężynowych. (b) Przykład 1b. Ciężar w jest zawieszony w jednej czwartej odległości od jednego z końców belki

Ten sam wynik otrzymamy wybierając oś przechodzącą przez jeden z końców belki. Dla osi przechodzącej np. przez prawy koniec otrzymujemy

$$F_1(l) - W \left(\frac{l}{2} \right) + F_2(0) = 0,$$

czyli

$$F_1 = \frac{W}{2} = \frac{4 \text{ kG}}{2} = 2,0 \text{ kG}.$$

Podstawiając ten wynik do równania $F_1 + F_2 = 4,0 \text{ kG}$, otrzymujemy $F_2 = 2,0 \text{ kG}$, jak poprzednio.

(b) Przypuśćmy, że na belce położyliśmy ciało ważące 6 kG w odległości 25 cm od końca. Jakie będą obecnie wskazania wag?

Rozkład sił przedstawiony jest na rys. 14-5b, na którym w oznacza ciężar ciała. Pierwszy warunek równowagi zapiszemy następująco:

$$F_1 + F_2 - W - w = 0.$$

Gdy $w = 6,0 \text{ kG}$, a $W = 4,0 \text{ kG}$, wtedy

$$F_1 + F_2 = 10 \text{ kG}.$$

Dla osi przechodzącej przez lewy koniec belki drugi warunek równowagi wygląda następująco:

$$w \left(\frac{l}{4} \right) + W \left(\frac{l}{2} \right) - F_2(l) = 0,$$

skąd

$$F_2 = 3,5 \text{ kG}.$$

Podstawiając ten wynik do pierwszego równania, otrzymujemy

$$F_1 + 3,5 \text{ kG} = 10 \text{ kG},$$

$$F_1 = 6,5 \text{ kG}.$$

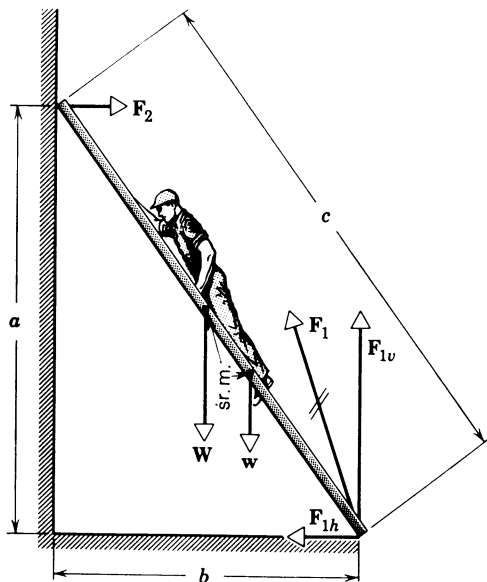
Zatem po ustaleniu się stanu równowagi waga po lewej stronie wskaże 6,5 kG, a po prawej 3,5 kG. Dlaczego w zadaniu tym uzyskaliśmy tylko dwa warunki na siły, zamiast trzech, jak oczekuje się zazwyczaj, gdy siły leżą w jednej płaszczyźnie?

Przykład 2. (a) Drabina o długości 20 m i ciężarze 30 kG opiera się o ścianę na wysokości 16 m. Środek ciężkości drabiny przypada na jednej trzeciej jej wysokości. Człowiek o ciężarze 54 kG wszedł do połowy długości drabiny. Znaleźć siły, jakimi układ działa na ścianę i podłogę przyjmując, że ściana jest doskonale gładka (a podłoga nie).

Rozkład sił przedstawiony jest na rys. 14-6. Ciężar człowieka oznaczamy przez W , a drabiny przez w . Podłoga działa na drabinę siłą F_1 . Siła F_{1v} jest jej składową pionową, a F_{1h} — składową poziomą (wynikającą z istnienia tarcia). Ściana działa na drabinę siłą normalną F_2 (brak tarcia). Mamy następujące dane liczbowe:

$$W = 54 \text{ kG}, \quad w = 30 \text{ kG}, \quad a = 16 \text{ m}, \quad c = 20 \text{ m}.$$

Z geometrii układu wynika, że $b = 12 \text{ m}$. Linia działania siły W przecina podłogę w odległości $b/2$ od ściany, a linia działania w — w odległości $2b/3$.



Rys. 14-6. Przykład 2

Obieramy oś x wzdłuż podłogi, a oś y wzdłuż ściany. Wtedy warunki równowagi względem przesunięć [równanie (14.2)] mają postać

$$F_2 - F_{1h} = 0,$$

$$F_{1v} - W - w = 0.$$

Jeżeli oś przechodzi przez punkt zetknięcia drabiny z podłogą, warunek równowagi względem obrotów dla tej osi [równanie (14-4)] ma postać

$$F_2(a) - W\left(\frac{b}{2}\right) - w\left(\frac{b}{3}\right) = 0.$$

Podstawiając dane liczbowe otrzymujemy

$$F_2(16 \text{ m}) - (54 \text{ kG})(6 \text{ m}) - (30 \text{ kG})(4 \text{ m}) = 0,$$

$$F_2 = 28 \text{ kG},$$

$$F_{1h} = F_2 = 28 \text{ kG},$$

$$F_{1v} = 54 \text{ kG} + 30 \text{ kG} = 84 \text{ kG}.$$

Na podstawie trzeciej zasady Newtona siłom tym odpowiadają siły reakcji, równe i przeciwnie skierowane, czyli na ścianę działa siła normalna równa 28 kG, a składowe siły działającej na podłogę wynoszą odpowiednio 84 kG i 28 kG.

(b) Współczynnik tarcia statycznego między podłogą a drabiną $\mu_s = 0,40$. Jak wysoko może na taką drabinę wejść człowiek, zanim drabina zacznie się ześlizgiwać?

Oznaczamy tę część długości drabiny, na którą może jeszcze wejść człowiek, przez x . Warunki równo wagi będą następujące:

$$F_2 - F_{1h} = 0,$$

$$F_{1v} - W - w = 0,$$

oraz

$$F_2 a - W b x - w \left(\frac{b}{3} \right) = 0.$$

Otrzymujemy więc

$$F_2 \cdot 16 \text{ m} = 54 \text{ kG} \cdot 12 \text{ m} \cdot x + 30 \text{ kG} \cdot 4 \text{ m},$$

$$F_2 = (40,5x + 7,5) \text{ kG}.$$

Wobec tego

$$F_{1h} = (40,5x + 7,5) \text{ kG}$$

oraz, jak poprzednio,

$$F_{1v} = 84 \text{ kG}.$$

Maksymalna siła tarcia statycznego wynosi

$$F_{1h} = \mu_s F_{1v} = 0,40 \cdot 84 \text{ kG} = 21 \text{ kG},$$

wobec tego

$$F_{1h} = (40,5x + 7,5) \text{ kG} = 21 \text{ kG},$$

oraz

$$x = 0,34,$$

a więc człowiek może się wspinać po drabinie na wysokość

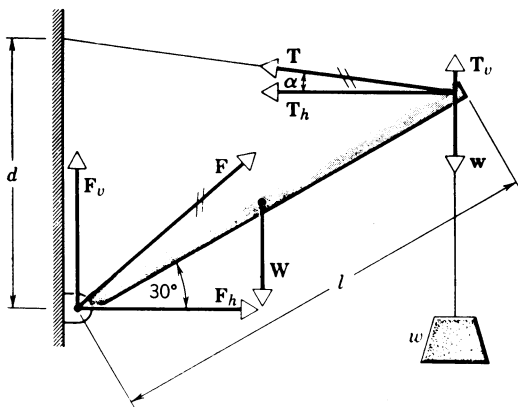
$$20 \text{ m} \cdot x = 6,8 \text{ m},$$

zanim drabina zacznie się ześlizgiwać.

W przykładzie tym drabinę traktujemy jako obiekt jednowymiarowy, stykający się w jednym punkcie ze ścianą i podłogą. Czytelnik powinien zastanowić się, w jaki sposób ogranicza to rozważania w porównaniu z mniej sztucznym przypadkiem, kiedy drabina na każdym końcu opiera się w dwóch punktach.

Powody, dla których przyjęliśmy, że ściana jest doskonale gładka, przedyskutujemy dalej, w tym paragrafie. Czy łatwo się domyślić, jakie są te powody?

Przykład 3. (a) Jednorodna belka przymocowana jest do ściany. Na wysokości d ponad zawiasem zaczepiony jest drut, który łączy ścianę z drugim końcem belki. Kiedy na belce zawiesimy ciężar w , ustawi się ona pod kątem 30° do poziomu. Ciężar belki wynosi W , a jej długość l . Znaleźć naprężenie drutu i siły działające na zawias.



Rys. 14-7. Przykład 3

Rysunek 14-7 przedstawia wszystkie siły działające na belkę. Drut podtrzymujący belkę tworzy pewien kąt α z poziomem, tak że naprężenie T drutu ma składową poziomą T_h i składową pionową T_v (jak widzimy na rys. 14-7). Siła F , jaką działa zawias na belkę, ma także składową poziomą F_h i składową pionową F_v . Wektor w jest ciężarem zawieszonego ciała, a W ciężarem belki zaczepionej w jej środku ciężkości.

Kierunki osi współrzędnych obieramy zgodnie z kierunkami działania składowych poziomej i pionowej siły F . Równowaga względem przesunięć będzie zapewniona, jeżeli

$$F_v + T_v - W - w = 0$$

oraz

$$F_h - T_h = 0.$$

Wybierając oś przechodzącą przez punkt przecięcia wektorów T i w (dlaczego?), otrzymujemy warunek równowagi względem obrotów w postaci:

$$F_v(l \cos 30^\circ) - F_h(l \sin 30^\circ) - \frac{W(l \cos 30^\circ)}{2} = 0.$$

T_h , T_v , F_h i F_v są wielkościami nieznanymi. Wielkościom znanym przyporządkujemy następujące liczby:

$$W = 60 \text{ N}, \quad w = 40 \text{ N}, \quad l = 3,0 \text{ m}, \quad d = 2,0 \text{ m}.$$

Zatem

$$(1) \quad F_v + T_v = 100 \text{ N},$$

$$(2) \quad F_h = T_h$$

oraz

$$F_v(3) (0,866) = F_h(1,5) + (60) (1,5)(0,866),$$

albo

$$(3) \quad F_v = F_h(5,0/8,66) + 30 \text{ N}.$$

Przypominamy, że mieliśmy cztery niewiadome, a mianowicie F_v , F_h , T_v i T_h . Jeżeli chcemy rozwiązać zadanie, musimy mieć dodatkową zależność pomiędzy tymi wielkościami. Ta dodatkowa zależność wynika z faktu, że T_v i T_h dają w sumie wypadkowy wektor T , skierowany wzdłuż drutu. Drot bowiem nie może dostarczać ani przenosić siły prostopadłej do jego kierunku. (Zwracamy uwagę, że nie jest to prawdziwe dla belki.) Zatem naszą czwartą zależnością jest

$$T_v = T_h \operatorname{tg} \alpha,$$

gdzie, $\operatorname{tg} \alpha = (d - l \sin 30^\circ) / (l \cos 30^\circ) = 1,0/5,2$, czyli że

$$(4) \quad T_v = T_h/5,2.$$

Łącząc wyrażenia (1) i (4) otrzymujemy

$$F_v = 100 \text{ N} - \frac{T_h}{5,2}.$$

Łącząc z kolei (2) i (3) otrzymujemy

$$F_v = T_h \left(\frac{5,0}{8,66} \right) + 30 \text{ N}.$$

Rozwiązując równocześnie te równania, otrzymujemy

$$T_h = 91,0 \text{ N} \quad \text{oraz} \quad F_v = 82,5 \text{ N}.$$

Z równania (2) otrzymujemy

$$F_h = 91,0 \text{ N},$$

a z równania (1)

$$T_v = 17,5 \text{ N}.$$

Naprężenie drutu obliczamy zatem z zależności

$$T = \sqrt{T_h^2 + T_v^2} = 92,7 \text{ N},$$

a zawiasy oddziałują na belkę siłą poziomą 91,0 N i siłą pionową 82,5 N.

W poprzednich przykładach liczba niewiadomych była równa liczbie niezależnych równań. Kiedy wszystkie siły działają w jednej płaszczyźnie, mamy trzy niezależne równania określające warunki równowagi: jeden warunek równowagi względem obrotów i dwa względem przesunięć na płaszczyźnie. Jednakże często możemy mieć więcej niż trzy niewiadome siły. W zadaniu z drabiną (przykład 2a), gdyby usunąć sztuczne założenie o doskonale gładkiej ścianie, mielibyśmy cztery niewiadome. Zamiast jednej występowałyby dwie składowe (pozioma i pionowa) siły działające na górny koniec drabiny. Jeżeli mamy układ trzech równań skalarnych o czterech niewiadomych, to nie możemy go rozwiązać. Dopiero gdy dla jednej z niewiadomych ustalimy jakąś wartość, pozostałe trzy możemy obliczyć. Gdy nie mamy żadnych podstaw do przyjęcia dla jednej z niewiadomych określonej wartości, wtedy istnieje nieskończona liczba matematycznie możliwych rozwiązań. Jeśli chcemy rozwiązać zadanie jednoznacznie, musimy mieć możliwość znalezienia jeszcze jednego niezależnego równania.

Inny prosty przykład, gdzie występuje więcej niewiadomych niż równań, może stanowić samochód. Chcemy określić siły, jakie wywiera każde z czterech kół samochodu na Ziemię, kiedy samochód stoi na poziomej powierzchni. Jeśli przyjmiemy, że siły te są prostopadłe do powierzchni Ziemi, będziemy mieli cztery niewiadome wielkości skalarnie. Wszystkie inne siły, takie jak ciężar samochodu i pasażerów również działają prostopadłe do powierzchni ziemi. Wobec tego możemy napisać tylko trzy niezależne warunki równowagi: jeden warunek względem przesunięć w kierunku działania wszystkich sił (pionowym) i dwa warunki równowagi względem obrotów dookoła dwóch wzajemnie prostopadłych osi, leżących w płaszczyźnie poziomej. Jest to więc znowu zadanie, którego jednoznacznie rozwiązać nie możemy. Układem podobnym do spoczywającego samochodu jest stół o czterech nogach, z których każda styka się z podłogą.

Każde fizyczne zagadnienie w rzeczywistości ma jednak jednoznaczne rozwiązanie, musimy tylko znaleźć fizyczne uzasadnienie dodatkowego niezależnego równania, które pozwoli dane zagadnienie rozwiązać. Dotychczas zakładaliśmy, że ciała są doskonale sztywne. W rzeczywistości są one mniej lub bardziej sprężyste i ten fakt pozwala nam uzyskać dodatkowe niezależne równania. Łatwo możemy zauważyć, że w naszych przykładach opony samochodu, jezdnia, drabina i ściana pod wpływem sił ulegają odkształceniu. Prawa rządzące odkształceniami i właściwości sprężyste ciał prowadzą do dodatkowej zależności między czterema siłami. W celu przeprowadzenia pełnej analizy tych zagadnień, musimy skorzystać nie tylko z praw mechaniki ciała sztywnego, lecz także z praw mechaniki ciał sprężystych. W wykładach dotyczących inżynierii lądowej i wodnej oraz budowy maszyn często spotykamy się z tego rodzaju zagadnieniami i analizujemy je. Tu jednak tymi zagadnieniami szerzej nie będziemy się zajmowali.

14-5. Równowaga trwała, nietrwała i obojętna ciała sztywnego w polu grawitacyjnym

Z rozdziału 8 wiemy, że siła grawitacyjna jest siłą zachowawczą. Dla sił zachowawczych możemy wprowadzić pewną funkcję, energię potencjalną $U(x, y, z)$, związaną z $\mathbf{F}$ w następujący sposób:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

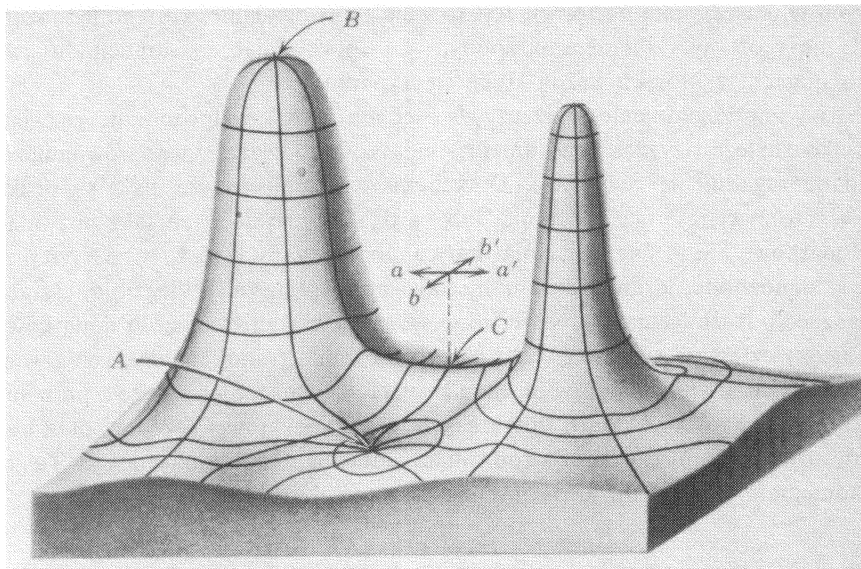
W miejscach, gdzie $\partial U/\partial x$ równa się zero, punkt materialny znajduje się w stanie równowagi względem przesunięć w kierunku osi x , ponieważ składowa F_x równa się zero. Podobnie dla miejsc, gdzie pochodne $\partial U/\partial y$ albo $\partial U/\partial z$ znikają, punkt materialny jest w stanie równowagi względem przesunięć odpowiednio wzdłuż y i z . Pochodne funkcji U przyjmują w danym punkcie wartość zero, jeżeli w tym punkcie funkcja przyjmuje wartość ekstremalną (minimum albo maksimum) albo jest w tym punkcie stała ze względu na zmienną współrzędną.

Kiedy U przyjmuje wartość minimalną, punkt materialny znajduje się w stanie równowagi *trwałej*. Po każdym odchyleniu od położenia równowagi trwałej pojawia się siła, która stara się go sprowadzić z powrotem do punktu równowagi. Inaczej mówiąc, siły zewnętrzne muszą wykonać pracę, aby wytrącić ciało z położenia równowagi trwałej. Powoduje to wzrost jego energii potencjalnej.

Przy maksymalnej wartości energii potencjalnej U punkt materialny znajduje się w stanie równowagi *nietrwałej*. Przy każdym odchyleniu od położenia równowagi nietrwałej pojawia się siła, która oddala ciało od tego położenia. W tym przypadku, przy zmianie położenia ciała siły zewnętrzne nie wykonują żadnej pracy. Praca potrzebna do przemieszczenia tego ciała jest pracą wewnętrzną, wykonywaną przez siłę zachowawczą i rezultatem jej jest zmniejszenie energii potencjalnej ciała.

Przy stałej energii potencjalnej U punkt materialny znajduje się w stanie równowagi *obojętnej*. W tym przypadku, gdy przemieszczamy nieznacznie punkt materialny, nie pojawia się żadna siła, ani przyciągająca, ani odpychająca. Zwracamy uwagę, że punkt materialny może być w stanie równowagi trwałej ze względu na jedną współrzędną, a w stanie równowagi nietrwałej ze względu na inną. Przykładem tego może być punkt materialny znajdujący się w punkcie siodłowym (rys. 14-8).

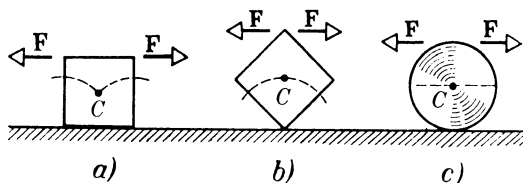
Wszystkie powyższe uwagi odnoszą się do punktów materialnych, a więc do ruchu postępowego. Przejdźmy teraz do równowagi ciała sztywnego. Musimy tu brać pod uwagę zarówno równowagę względem obrotów jak i względem przesunięć. Zagadnienie ciała sztywnego w polu grawitacyjnym jest wyjątkowo proste, ponieważ siły grawitacyjne działające na punkty materialne ciała sztywnego możemy zastąpić jedną siłą zaczepioną w jednym punkcie, zarówno przy rozważaniu przesunięć jak i obrotów. Szukając równowagi



Rys. 14-8. Potencjalna powierzchnia grawitacyjna, mogąca istnieć realnie. Punkt materialny umieszczony w A , B albo C pozostaje w spoczynku, gdy styczna do powierzchni w każdym z tych punktów jest linią poziomą. Mówimy, że jest on wtedy w stanie równowagi. Gdy nieznacznie oddalimy go od punktu A , sam tam powróci. Jest to *punkt równowagi trwałej*. Oddalony nieco od punktu B , samorzutnie oddala się jeszcze bardziej. B jest *punktem równowagi nietrwałej*. Gdy oddalimy punkt materialny od punktu C w kierunku aa' , będzie starał się wrócić z powrotem, natomiast gdy odsuniemy go w kierunku bb' , będzie się oddalał. Punkt C nazywamy *punktem siodłowym*, ponieważ powierzchnia ma w tym miejscu kształt siodła. Równowaga obojętna dla punktu materialnego znajdującego się na płaszczyźnie poziomej nie jest tu zilustrowana

w polu sił grawitacyjnych, możemy zastąpić ciało sztywne pojedynczym punktem materialnym o tej samej masie, umieszczonym w środku ciężkości tego ciała.

Weźmy jako przykład sześcián leżący jednym bokiem na poziomym stole. Środek ciężkości jest tu jednocześnie środkiem geometrycznym, wyznaczonym przez przecięcie się przekątnych (rys. 14-9a). Przyłożymy do sześcianu siłę tak, aby go obrócić bez poślizgu. W takim przypadku środek ciężkości sześcianu podnosi się i zostaje wykonana praca, która powiększa jego energię potencjalną. Gdy siła zewnętrzna przestaje działać, sześcián wraca do swego pierwotnego położenia, a uzyskana energia potencjalna zamienia się na energię kinetyczną. Początkowe położenie sześcianu jest więc dla niego położeniem równowagi *trwałej*. Jeżeli sześcián zastąpimy punktem materialnym o tej samej masie, umieszczonym w jego środku ciężkości, ruch będzie się odbywał wzdłuż linii przerywanej, przedstawiającej drogę przebywaną przez środek ciężkości w czasie procesu. Na rysunku widać, że jak należało oczekiwać, punkt materialny ma minimalną energię potencjalną w położeniu równowagi *trwałej*. Ogólnie możemy powiedzieć, że ciało sztywne znajduje się w stanie równowagi *trwałej*, jeżeli przyłożona do niego siła może podnieść środek ciężkości tego ciała, a nie może obniżyć go.



Rys. 14-9. Równowaga ciała o skończonych rozmiarach. (a) sześcián spoczywający na jednym z boków znajduje się w *stanie równowagi trwałej*, ponieważ środek ciężkości C podnosi się, gdy siła F go obraca. (b) Sześcián oparty na krawędzi znajduje się w *stanie równowagi nietrwałej*, ponieważ punkt C obniża się pod wpływem siły F . (c) Walec o przekroju kołowym ma równowagę obojętną, ponieważ środek ciężkości C zachowuje swoją wysokość w czasie obrotu. Porównać powyższe kryteria równowagi z danymi z rys. 14-8. W jaki sposób są powiązane kryteria równowagi podane na obydwu rysunkach?

Obracając sześcián dookoła jego krawędzi, jak na rys. 14-9b, natrafimy na nowe położenie równowagi, które jest położeniem równowagi *nietrwałej*. Już nawet nieznaczna siła pozioma zakłóca bezpowrotnie ten stan równowagi i energia potencjalna sześcianu zmniejsza się. Jeżeli zastąpimy sześcián punktem materialnym o tej samej masie, umieszczonym w jego środku ciężkości, ruch tego punktu będzie się odbywał wzdłuż linii przerywanej. W położeniu równowagi *nietrwałej*, jak należało oczekiwać, punkt ma maksimum energii potencjalnej. Możemy więc powiedzieć, że ciało sztywne znajduje się w stanie równowagi *nietrwałej*, jeżeli przyłożenie jakiegokolwiek poziomej siły powoduje obniżenie środka ciężkości tego ciała.

Walec leżący na poziomej powierzchni ilustruje przypadek równowagi obojętnej (rys. 14-9c). Przy działaniu jakiegokolwiek siły poziomej, środek ciężkości walca nie ulega ani podwyższeniu, ani obniżeniu, lecz porusza się wzdłuż linii poziomej. Energia potencjalna walca podczas ruchu nie zmienia się, podobnie jak energia punktu materialnego o tej samej masie, umieszczonego w środku ciężkości. Po usunięciu poziomej siły walec nie przejawia tendencji do ruchu w żadnym kierunku. Możemy powiedzieć, że ciało sztywne znajduje się w stanie równowagi obojętnej, jeżeli przyłożona siła pozioma nie obniża ani nie podwyższa jego środka ciężkości.

Jakie warunki muszą być spełnione, aby *zawieszone* ciało sztywne znajdowało się w stanie równowagi *trwałej*, *nietrwałej* i obojętnej?

Pytania

1. Czy równania (14-1) i (14-3) są warunkami koniecznymi i dostatecznymi dla zachowania równowagi mechanicznej? A dla równowagi statycznej?

2. Koło obracające się ze stałą prędkością kątową ω dookoła nieruchomej osi jest w równowadze mechanicznej, ponieważ żadne wypadkowe siły ani momenty nie działają na nie. Jednakże poszczególne punkty tego koła mają przyspieszenie dośrodkowe a skierowane w kierunku osi obrotu. Jeżeli $a \neq 0$, to dlaczego możemy powiedzieć, że koło znajduje się w stanie równowagi?

3. Podać kilka przykładów ciał, które nie znajdują się w równowadze, mimo że wypadkowa wszystkich sił działających na te ciała jest równa zero.

4. Ciało nie znajduje się w równowadze względem przesunięć. Czy moment siły względem dowolnego punktu tego ciała będzie równy zero, gdy jest on równy zero względem pewnego wybranego punktu?

5. W którym przypadku hamak może łatwiej ulec zerwaniu: czy jeżeli używa się go, gdy jest silnie naciągnięty między dwoma drzewami, czy też gdy jest zawieszony swobodnie?

6. Drabina znajduje się w spoczynku, jej górny koniec oparty jest o ścianę, a dolny o ziemię. Co jest bardziej prawdopodobne: czy to, że drabina zacznie się ślizgać, gdy człowiek będzie na niej wysoko, czy gdy będzie stał nisko? Wyjaśnić to.

7. Gdyby omawiana w przykładzie 2 ściana była chropowata, czy otrzymywane doświadczalnie prawa tarcia dostarczyłyby nam dodatkowego warunku potrzebnego do określenia dodatkowej (pionowej) siły, z jaką ściana działa na drabinę?

8. Dlaczego w przykładzie 3 nie musimy brać pod uwagę tarcia występującego w zawiasach?

9. Dwie linki utrzymują wiszący na ścianie obraz. Jak powinny być skierowane te linki, aby ich naprężenie było minimalne? Wyjaśnić, dlaczego zachodzi równowaga przy każdym kierunku i naprężeniu linek, mimo że masa obrazu jest ściśle określona.

10. Pokazać, jak zastosować wagę sprężynową do ważenia przedmiotów, których ciężar jest większy od ciężaru odpowiadającego maksymalnemu odczytowi na skali.

11. Czy dla budynku środek masy ma inne położenie niż środek ciężkości? A dla jeziora? Jakie przyczyny powodują różnice w położeniu środka masy i środka ciężkości ciała?

12. Jeżeli ciało zostało wyrzucone bez nadania mu ruchu obrotowego, to w przypadku gdy pomijamy opór powietrza, ciało to nie będzie się obracać w czasie swego lotu. Czy ten prosty wynik obserwacji zawiera w sobie informacje na temat położenia środka ciężkości?

13. Wy tłumaczyć, rozważając odpowiednie siły i momenty sił, jak to się dzieje, że drzewo może utrzymać równowagę podczas silnego wiatru.

14. Czy istnieje coś takiego jak ciało naprawdę sztywne?

15. Osoba siedząca na miejscu kierowcy, w zaparkowanym samochodzie dowiaduje się, że siły wywierane na podłoże przez każde z czterech kół samochodu nie są jednakowe. Przedyskutować, jakie czynniki należy uwzględnić przy rozważaniu zagadnienia, czy stwierdzenie to jest prawdziwe, czy też nie?

16. Jednorodny blok w kształcie prostokątnego równoległościanu, o krawędziach mających się do siebie jak 1:2:3, kładziemy na poziomej płaszczyźnie. Na którym boku należy go położyć, aby znajdował się w najbardziej trwałej równowadze?

17. W wirówce napełnionej cieczą cząstka porusza się ruchem jednostajnym po okręgu (tzn. znajduje się ona w ruchu *przyspieszonym*) względem obserwatora znajdującego się na zewnątrz wirówki. Obserwator obracający się razem z wirówką stwierdziłby, że cząstka *nie porusza się ruchem przyspieszonym*. Wyjaśnić, dlaczego cząstka może być w stanie równowagi z punktu widzenia drugiego obserwatora, a nie jest z punktu widzenia pierwszego obserwatora.

18. W rozdziale 5 zdefiniowaliśmy siłę przy pomocy przyspieszenia, które nadaje ona danej masie, co wyraża się zależnością $F = ma$. Dla ciała znajdującego się w stanie równowagi nie występują żadne przyspieszenia. W jaki sposób możemy więc nadać jakieś znaczenie pojęciu sił działających na takie ciało?

Zadania

Paragraf 14-2

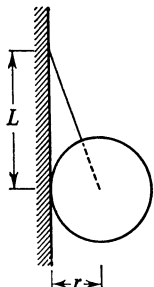
1. Wykazać, że gdy na ciało znajdujące się w stanie równowagi działają trzy siły, muszą one znajdować się w tej samej płaszczyźnie, a kierunki ich działania muszą się przeciąć w jednym punkcie lub w nieskończoności.

2. Jednorodna kula o ciężarze w i promieniu r wisi na sznurku zaczepionym na gładkiej ścianie, w odległości L ponad środkiem kuli, jak na rys. 14-10. Znaleźć (a) naprężenie sznurka i (b) siłę wywieraną na kulę przez ścianę.

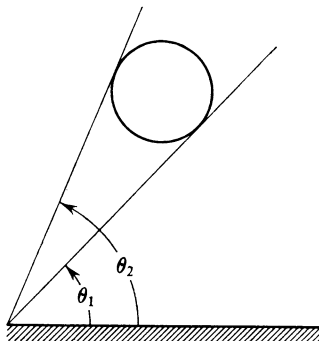
3. Jednorodna kula o ciężarze W spoczywa wciśnięta pomiędzy dwie nachylone względem siebie płaszczyzny, o kątach nachylenia względem poziomu θ_1 i θ_2 (rys. 14-11). (a) Zakładając, że nie ma tarcia,

określić, jakimi siłami (wartości i kierunki) płaszczyzny te działają na kulę. (b) Jakie zmiany, ogólnie biorąc, spowodowałyby uwzględnienie tarcia?

Odp.: (a) $F_1 = W \sin \theta_2 / \sin(\theta_2 - \theta_1)$; $F_2 = W \sin \theta_1 / \sin(\theta_2 - \theta_1)$; kierunki sił prostopadłe do płaszczyzn.

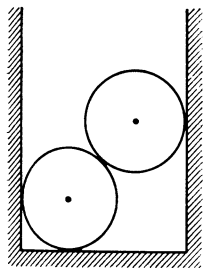


Rys. 14-10. Zadanie 2



Rys. 14-11. Zadanie 3

4. Dwie jednakowe, jednorodne, gładkie kule o ciężarze W każda, spoczywają w pozycji przedstawionej na rys. 14-12, na dnie nieruchomego, prostokątnego pudełka. Wyrazić przy pomocy W siły wywierane na kule (a) przez powierzchnie pudełka i (b) przez siebie nawzajem, jeżeli linia łącząca środki kul tworzy kąt 45° z poziomem.



Rys. 14-12. Zadanie 4



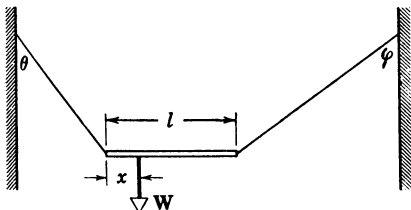
Rys. 14-13. Zadanie 5

5. Między dwoma nieruchomymi punktami A i B znajdującymi się na tym samym poziomie, wisi łańcuch o ciężarze W (rys. 14-13). Znaleźć: (a) wektor siły, z jaką oddziałuje łańcuch na każdy punkt zawieszenia, oraz (b) naprężenie łańcucha w najniższym punkcie.

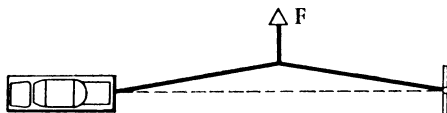
Odp.: (a) $\frac{1}{2}W/(2 \sin \theta)$, stycznie do łańcucha. (b) $\frac{1}{2}W \cot \theta$.

Paragraf 14-3

6. Niejednorodny pręt o ciężarze W zawieszony na dwóch lekkich linkach, znajduje się w spoczynku w pozycji poziomej, jak to widzimy na rys. 14-14. Linka z lewej strony tworzy z kierunkiem pionowym kąt $\theta = 36,9^\circ$, a z prawej strony kąt $\varphi = 53,1^\circ$. W jakiej odległości x od lewego końca pręta znajduje się jego środek ciężkości, jeżeli długość pręta wynosi 6,1 m.



Rys. 14-14. Zadanie 6



Rys. 14-15. Zadanie 9

7. Z jednorodnego krążka o promieniu R wycięto koło o promieniu r . Środek wyciętego otworu znajduje się w odległości $R/2$ od geometrycznego środka krążka. Znaleźć położenie środka ciężkości krążka po wycięciu w nim otworu.

Odp.: Na linii przechodzącej przez środek otworu i środek krążka, w odległości $Rr^2/2(R^2-r^2)$ poza tym ostatnim punktem.

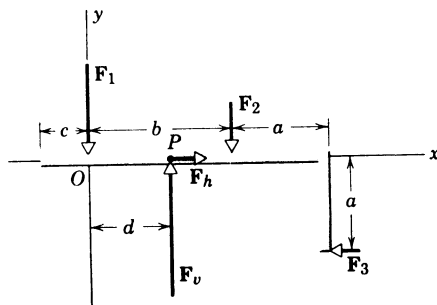
Paragraf 14-4

8. Trzej mężczyźni niosą belkę; jeden trzyma belkę za jeden koniec, dwaj pozostali niosą ją za pomocą poprzecznego drążka podpierającego belkę w takim miejscu, że wszyscy trzej są obciążeni równomiernie. Znaleźć położenie drążka. Masę poprzecznego drążka pominąć.

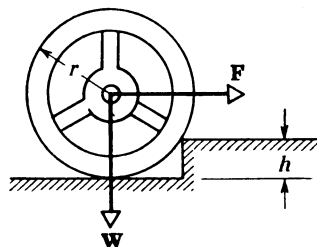
9. Mężczyzna usiłuje wyciągnąć z błota na drogę samochód (rys. 14-15). W tym celu przywiązał on jeden koniec liny do przedniego zderzaka samochodu, a drugi koniec do słupa telefonicznego, znajdującego się w odległości 18 m od samochodu, przy czym linę silnie napiął. Następnie, pchając linę w bok w jej środku siłą 57 kG, spowodował przesunięcie środka liny o 0,3 m od jego poprzedniego położenia i poruszył samochód. Jaką siłą lina działa na samochód? (Pod wpływem naprężenia lina nieco rozciąga się.)

Odp.: 860 kG.

10. Siły F_1 , F_2 i F_3 działają na element konstrukcji przedstawiony na rys. 14-16. Chcemy doprowadzić układ do stanu równowagi, przykładając w punkcie P siłę o składowych wektorowych F_h i F_v . Mamy następujące dane liczbowe $a = 2,0$ m, $b = 3,0$ m, $c = 1,0$ m, $F_1 = 20$ kG, $F_2 = 10$ kG i $F_3 = 5,0$ kG. Znaleźć (a) F_h , (b) F_v i (c) d .



Rys. 14-16. Zadanie 10



Rys. 14-17. Zadanie 11

11. Jaka siła F przyłożona poziomo do osi koła o promieniu r i ciężarze W spowoduje wjechanie tego koła na przeszkodę o wysokości h (rys. 14-17)?

Odp.: $W \sqrt{h(2r-h)}/(r-h)$.

12. Podnoszona, kwadratowa pokrywa w suficie, mająca powierzchnię $0,81$ m² i ciężar 11 kG jest zawieszona na zawiasach z jednego boku, a uchwyt ma umieszczony przy boku przeciwnym. Środek ciężkości pokrywy znajduje się w odległości 10 cm od jej środka geometrycznego, bliżej zawiasów. Jaką siłę musi wytrzymać (a) uchwyt i (b) zawiasy.

13. Linijka o metrowej długości oparta na ostrzu znajduje się w równowadze, jeżeli jest podparta w miejscu oznaczonym jako $50,0$ cm. Po umieszczeniu dwóch monet na znaku 12 cm, stan równowagi uzyskujemy przesuwając punkt podparcia do $45,5$ cm. Masa jednej monety wynosi $5,0$ g. Jaka jest masa linijki? Spróbujcie sami wykonać doświadczenie opisane w tym zadaniu.

Odp.: $74,4$ g.

14. Wagę wykonano ze sztywnego pręta mogącego się obracać wokół osi nie przechodzącej przez środek pręta. Równowagę osiąga się przez umieszczenie na szalkach zawieszonych na obu końcach pręta nierównych ciężarków. Jeżeli ciało o nieznannej masie m leży na lewej szalce, to aby osiągnąć równowagę na prawą szalkę trzeba położyć ciężarek o masie m_1 , i podobnie — jeżeli ciało o masie m leży na prawej szalce, to równowagę osiąga się przez położenie ciała o masie m_2 na szalce lewej. Wykazać, że

$$m = \sqrt{m_1 m_2},$$

oraz wymienić założenia, jakie muszą być spełnione, żeby zależność ta była prawdziwa.

15. Samochód o ciężarze 1360 kG ma rozstaw osi równy 305 cm. Jego środek ciężkości znajduje się w odległości 178 cm za przednią osią. Wyznaczyć: (a) siłę, jaką podłoże działa na każde przednie koło (zakładamy, że siły te są jednakowe), oraz (b) siłę, jaka działa na każde tylne koło (zakładając, że siły te również są jednakowe).

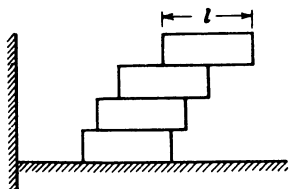
Odp.: (a) 2780 N, (b) 3890 N.

16. Skrzynia mająca kształt sześcianu o krawędzi 1,2 m zawiera element maszyny o takim kształcie, że środek ciężkości skrzyni wraz z zawartością jest położony o 0,3 m wyżej niż jej środek geometryczny. (a) Jaki maksymalny kąt może tworzyć z poziomem pochylnię, po której ma zsuwać się skrzynia, jeżeli chcemy żeby skrzynia się nie przewróciła. (b) Przy jakiej maksymalnej wartości współczynnika tarcia statycznego (pomiedzy skrzynią i pochylnią) dla tego kąta skrzynia jeszcze się ześlizguje?

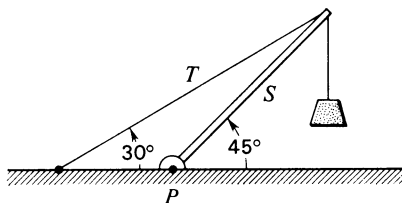
17. Drzwi o wysokości 2,1 m oraz szerokości 0,9 m ważą 27 kG. Każdy z dwóch zawiasów utrzymuje połowę ciężaru drzwi; jeden z nich umieszczony jest w odległości 30 cm od góry, a drugi 30 cm od dołu drzwi. Przyjmując, że środek ciężkości drzwi znajduje się w ich środku geometrycznym, znaleźć składową pionową i poziomą siły, z jaką każdy z zawiasów działa na drzwi.

Odp.: Składowe pionowe 130 N; składowe poziome 80 N, przeciwnie skierowane.

18. Cztery cegły, każda o długości l , ułożono jedna na drugiej, jak to widzimy na rysunku 14-18. Wykazać, że największym przesunięciem, dla którego istnieje jeszcze stan równowagi, jest: (a) najwyższa cegła przesunięta jest względem poprzedniej o pół długości, czyli $\frac{1}{2}l$, (b) druga od góry cegła przesunięta jest względem trzeciej o $\frac{1}{4}l$ i (c) trzecia od góry cegła przesunięta jest względem poprzedniej o $\frac{1}{6}l$.



Rys. 14-18. Zadanie 18

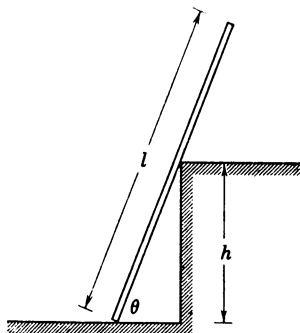


Rys. 14-19. Zadanie 19

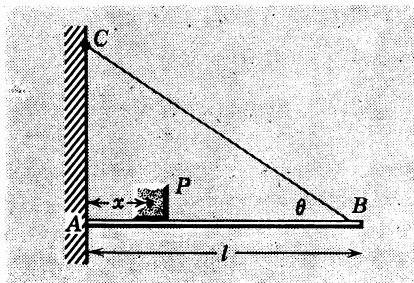
19. Układ przedstawiony na rys. 14-19 znajduje się w równowadze. Ciężar wiszący na końcu pręta S waży 230 kG, a waga samego pręta wynosi 45 kG. Znaleźć (a) naprężenie T linki oraz (b) siłę wywieraną na pręt w punkcie obrotu P .

Odp.: (a) 6800 N, (b) $F_h = 5900$ N; $F_v = 6100$ N.

20. Bal o długości $l = 6$ m i ciężarze 45 kG spoczywa na podłożu i opiera się o wałek mogący obracać się bez tarcia (nie uwidoczniiony na rysunku), umocowany na krawędzi ściany na wysokości $h = 3$ m (patrz rys. 14-20). Środek ciężkości bala znajduje się w jego środku geometrycznym. Bal znajduje się w stanie równowagi dla dowolnego kąta $\theta \geq 70^\circ$, natomiast ześlizguje się dla kątów $\theta < 70^\circ$. (a) Narysować rozkład wszystkich sił działających na bal. (b) Znaleźć współczynnik tarcia statycznego pomiędzy balem i podłogą.



Rys. 14-20. Zadanie 20

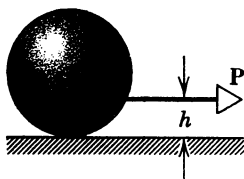


Rys. 14-21. Zadanie 21

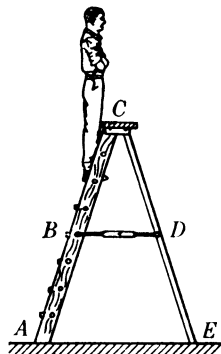
21. Cienki poziomy pręt AB , o długości l , którego masę możemy pominąć, jest przymocowany do pionowej ściany w punkcie obrotu A oraz podtrzymywany w punkcie B za pomocą cienkiej linki BC , tworzącej z poziomem kąt θ . Wzdłuż pręta można przesuwając ciężar P , którego położenie określa odległość od ściany x (rys. 14-21). (a) Znaleźć naprężenie T linki jako funkcję x . Znaleźć składową (b) poziomą oraz (c) pionową siły działającej na pręt w punkcie zaczepienia A .

Odp.: (a) $Wx/(l\sin\theta)$, (b) $Wx/(l\lg\theta)$, (c) $W(1-x/l)$.

22. Jednorodna kula o promieniu r i ciężarze W ślizga się po podłodze pod wpływem działającej na nią poziomo siły P , przyłożonej do linki, jak na rys. 14-22. (a) Wykazać, że jeżeli współczynnik tarcia kinetycznego między podłogą a kulą wynosi μ , wysokość h jest dana wzorem: $h = r(l - \mu W/P)$. (b) Pokazać, że w tych warunkach kula nie znajduje się w stanie równowagi względem przesunięć. Czy istnieje jakikolwiek punkt, względem którego kula jest w stanie równowagi względem obrotów? (c) Czy można otrzymać stan równowagi zarówno względem przesunięć jak i obrotów wybierając inną wartość h ? Albo wybierając inny kierunek P ? Wyjaśnić to.



Rys. 14-22. Zadanie 22

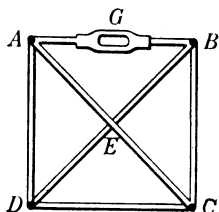


Rys. 14-23. Zadanie 23

23. Na drabinie przedstawionej na rys. 14-23 odcinki AC i CE wynoszą 2,4 m każdy. W punkcie C znajdują się zawiasy. Pręt BD o długości 0,75 m znajduje się w połowie wysokości drabiny. Człowiek o ciężarze 86 kG wchodzi na wysokość 1,8 m, licząc wzdłuż drabiny. Przyjmując, że podłoga jest doskonale gładka i pomijając ciężar drabiny, znaleźć (a) naprężenie pręta i (b) siły, jakie podłoga wywiera na drabinę. (Wskazówka: Zastosować warunki równowagi dla poszczególnych części drabiny oddzielnie.)

Odp.: (a) 206 N, (b) $F_A = 530$ N; $F_E = 313$ N.

24. Sześcienne pudło wypełnione piaskiem waży 890 N. Pudło to trzeba „przetoczyć” pchając poziomo jedną z jego górnych krawędzi. (a) Jaką minimalną siłę należy przyłożyć? (b) Jaki powinien być współczynnik tarcia statycznego? (c) Czy jest jakiś bardziej wydajny sposób na przetoczenie pudła? Jeżeli tak, znaleźć najmniejszą siłę jaką trzeba przyłożyć do pudła.



Rys. 14-24. Zadanie 25

25. Przy pomocy ściągacza (nakrętki dwustronnej) G wytwarzamy naprężenie T wzdłuż krawędzi AB kwadratowej ramy $ABCD$, utworzonej ze sztywnych prętów (rys. 14-24). Określić siły działające wzdłuż pozostałych krawędzi i przekątnych kwadratu. Przekątne AC i BD są ze sobą związane w punkcie E . Uwzględnienie symetrii prowadzi do uproszczenia tego i podobnych zadań.

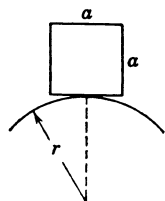
Odp.: Pręty AD , BC i DC są rozciągane (siłą T); przekątne AC i BD są ściskane (siłą $\sqrt{2}T$).

26. Rozpatrzmy dobrze znane zagadnienie (patrz np. *Scientific American*, November 1964, str.128):

jednorodne cegły umieszczono jedna na drugiej w taki sposób, aby mieć maksymalne przesunięcie. Można to osiągnąć przez specjalne ustawienie cegieł. Cegła leżąca najwyżej ma środek ciężkości nad krawędzią cegły leżącej bezpośrednio pod nią. Środek ciężkości dwóch górnych cegieł znajduje się nad krawędzią trzeciej cegły licząc od góry, itd. (a) Uzasadnić powyższe kryterium na maksymalne przesunięcie. (b) Pokazać, że jeżeli proces ustawiania cegieł w dół będzie kontynuowany, to można otrzymać przesunięcie dowolnie duże. (W artykule cytowanym powyżej, Martin Gardner pisze: „Jeżeli ustawimy w ten sposób 52 karty do gry, tak aby krawędź najniższej pokrywała się z krawędzią stołu, karty mogą wystawać poza stół nieco dalej niż o $2\frac{1}{4}$ długości jednej karty”). (c) Przypuśćmy teraz, że ustawiamy stos jednorodnych cegieł w nieco inny sposób. Każda cegła następna wystaje poza poprzednią o $1/n$ długości cegły l . Ile cegieł N można w ten sposób ułożyć, zanim stos się zawali? Sprawdzić wiarygodność odpowiedzi dla $n = 1$, $n = 2$, $n = \infty$.

Paragraf 14-5

27. Na chropowatym, poziomym stole spoczywa czasza o promieniu krzywizny r . Pokazać, że czasza będzie w stanie równowagi trwałej względem środkowego punktu jej dna tylko wówczas, jeżeli środek masy substancji wypełniającej wnętrze czaszy jest położony ponad tym punktem, na wysokości mniejszej niż r .



Rys. 14-25. Zadanie 28

28. Jednorodny sześcian o krawędzi a spoczywa (w równowadze) na cylindrycznej powierzchni o promieniu r , jak pokazano na rys. 14-25. Pokazać, że kryterium na trwałą równowagę sześcianu jest $r > a/2$, przy założeniu, że dostatecznie duże tarcie zapobiega ześlizgiwaniu się sześcianu.