

8. Zasada zachowania energii

8-1. Wstęp

W rozdziale 7, korzystając z drugiej zasady dynamiki Newtona, wyprowadziliśmy twierdzenie o pracy i energii. Twierdzenie to głosi, że praca W wykonana przez wypadkową siłę $\mathbf{F}$ działającą na punkt materialny poruszający się wzdłuż pewnej drogi, jest równa zmianie energii kinetycznej ΔK tego punktu, czyli

$$W = \Delta K. \quad (8-1)$$

Często na punkt materialny działa kilka sił. Siła wypadkowa $\mathbf{F}$ jest ich sumą geometryczną, tzn. jeśli przyjmiemy, że sił jest n , to $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n$. Praca wykonana przez wypadkową siłę $\mathbf{F}$ jest sumą algebraiczną prac wykonanych przez poszczególne siły, czyli $W = W_1 + W_2 + \dots + W_n$. A zatem twierdzenie o pracy i energii (równanie (8-1)) możemy zapisać następująco:

$$W_1 + W_2 + \dots + W_n = \Delta K. \quad (8-2)$$

W niniejszym rozdziale będziemy rozważali układy, w których punkt materialny poddany jest działaniu sił różnych rodzajów, i będziemy obliczali W_1 , W_2 itd. dla tych sił; pozwoli to na zdefiniowanie różnych rodzajów energii, takich jak energia potencjalna czy energia cieplna. Na zakończenie sformułujemy jedną z najważniejszych zasad nauk przyrodniczych — *zasadę zachowania energii*.

8-2. Siły zachowawcze

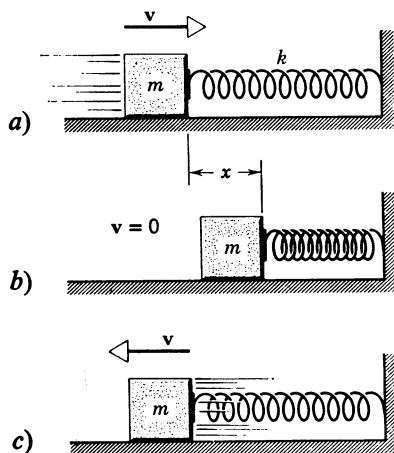
Zacznijmy od rozróżnienia dwu rodzajów sił: *zachowawczych* i *niezachowawczych*. Rozważymy jakiś przykład każdego rodzaju tych sił i omówimy go z kilku różnych, lecz pokrewnych punktów widzenia.

Wyobraźmy sobie sprężynę przymocowaną jednym końcem do sztywnej ściany, tak jak to przedstawiono na rys. 8-1. Przesuńmy ciało o masie m z prędkością v , dokładnie w kierunku sprężyny; zakładamy, że ruch po płaszczyźnie poziomej odbywa się bez tarcia oraz że sprężyna jest idealna, to znaczy że spełnia ona prawo Hooke'a (równanie (7-7));

$$F = -kx, \quad (8-3)$$

gdzie F jest siłą wywieraną przez sprężynę, kiedy jej swobodny koniec jest przemieszczony na odległość x ; dodatkowo zakładamy, że masa sprężyny jest tak mała w porównaniu z masą ciała, że możemy pominąć energię kinetyczną tej sprężyny. A więc w tym układzie (ciało + sprężyna) cała energia kinetyczna jest zgromadzona w ciele.

Przy ściskaniu przez ciało jego prędkość, a wobec tego i energia kinetyczna, zmniejsza się, aż wreszcie ciało zostaje zatrzymane w wyniku działania siły sprężystej, jak to pokazano na rys. 8-1b. Następnie ciało porusza się w odwrotnym kierunku, ponieważ ściśnięta sprężyna rozpręża się. Nabywa ono prędkości oraz energii kinetycznej i kiedy znowu osiąga położenie początkowego zetknięcia ze sprężyną, stwierdzamy, że ma taką samą prędkość i energię kinetyczną, jaką miało początkowo; jedynie kierunek jego ruchu jest przeciwny. Ciało traci energię kinetyczną w pierwszej fazie ruchu, lecz uzyskuje ją w całości z powrotem w drugiej fazie, gdy wraca do swego położenia wyjściowego (rys. 8-1c).



Rys. 8-1. (a) Ciało o masie m zostaje pchnięte z prędkością v w kierunku sprężyny. (b) Ciało zostaje zatrzymane w wyniku działania siły sprężystej. (c) Ciało odzyskuje swoją początkową prędkość v , gdy wraca do położenia początkowego

Zinterpretowaliśmy energię kinetyczną ciała jako zdolność do wykonania pracy kosztem jego ruchu. Jest zrozumiałe, że po przebyciu drogi zamkniętej zdolność ciała (rys. 8-1) do wykonania pracy pozostaje taka sama; jest ona *zachowana*. Siła sprężysta wywierana przez idealną sprężynę oraz inne siły, które działają w taki sam sposób, nazywają się *siłami zachowawczymi*. Siła ciężkości jest również siłą zachowawczą: jeżeli rzucimy piłkę w kierunku pionowym do góry (i założymy, że opór powietrza można pominąć), to wróci ona do naszych rąk z taką samą energią kinetyczną, jaką miała na początku.

Jeżeli jednak punkt materialny, na który działa jedna lub więcej sił, powraca do początkowego położenia i ma większą lub mniejszą energię kinetyczną niż na początku, oznacza to, że po przebyciu drogi zamkniętej jego zdolność do wykonania pracy uległa zmianie. W tym przypadku zdolność do wykonania pracy nie została zachowana i przynajmniej jedną z działających sił określa się jako *niezachowawczą*.

Aby zilustrować siłę niezachowawczą, założymy, że powierzchnia ciała i płaszczyzna nie są idealnie gładkie, lecz że pewna siła tarcia f jest wywierana przez płaszczyznę na ciało. Ta siła tarcia przeciwstawia się ruchowi ciała bez względu na to, po jakiej drodze ciało to się porusza. Stwierdzamy, że ciało wraca do swego położenia początkowego z energią kinetyczną mniejszą od tej, którą miało na początku. Ponieważ w naszym pierwszym doświadc-

czeniu wykazaliśmy, że siła sprężysta była zachowawcza, otrzymany obecnie wynik musimy przypisać działaniu siły tarcia*.

Mówimy, że siła tarcia i inne siły, które działają w taki sam sposób, są *niezachowawcze*. Siła indukcji, działająca w betatronie (paragraf 35-6, t. II) jest również siłą niezachowawczą. Jednak zamiast rozpraszania energii kinetycznej powoduje ona to, że elektron poruszający się po kołowej orbicie w betatronie będzie powracał do swego położenia początkowego z energią kinetyczną *większą* od tej, którą miał pierwotnie. Na drodze zamkniętej elektron uzyskuje energię kinetyczną, co stanowi o przydatności betatronu.

Możemy zdefiniować siłę zachowawczą z innego punktu widzenia, na podstawie pracy wykonanej przez tę siłę nad punktem materialnym. W naszym pierwszym przykładzie, podanym wyżej, praca wykonana przez siłę sprężystą nad ciałem w momencie, gdy sprężyna ulegała ściskaniu, była ujemna, ponieważ siła wywierana na ciało przez sprężynę (na rys. 8-1a — na lewo) była skierowana przeciwnie do przemieszczania się bloku (na rys. 8-1a — na prawo). Gdy sprężyna rozprężała się, praca, którą wykonała siła sprężysta nad ciałem, była dodatnia (siła i przemieszczenie jednakowo skierowane). W naszym pierwszym przykładzie praca, wykonana nad ciałem przez siłę sprężystą podczas pełnego cyklu lub na drodze zamkniętej, jest równa zeru.

W naszym drugim przykładzie rozpatrywaliśmy działanie siły tarcia. Praca wykonana nad ciałem przez tę siłę była ujemna dla każdej części cyklu, ponieważ siła tarcia zawsze przeciwstawia się ruchowi. Wskutek tego praca wykonana przez tarcie na drodze zamkniętej nie może być zerowa. Zatem ogólnie: *siła jest zachowawcza, jeżeli praca wykonana przez tę siłę nad punktem materialnym, który porusza się po dowolnej drodze zamkniętej, jest równa zeru. Siła jest niezachowawcza, jeżeli praca wykonana przez tę siłę nad punktem materialnym, który porusza się po dowolnej drodze zamkniętej, nie jest równa zeru.*

Twierdzenie o pracy i energii dowodzi, że ten drugi sposób określania sił zachowawczych i niezachowawczych jest w pełni równoznaczny z naszą pierwszą definicją. Jeżeli energia kinetyczna punktu materialnego poruszającego się po jakiejś drodze zamkniętej nie ulega zmianie, wtedy $\Delta K = 0$ oraz (z równania (8-1)) $W = 0$, a działająca siła wypadkowa musi być zachowawcza. Podobnie, jeżeli $\Delta K \neq 0$, to (z równania (8-1)) $W \neq 0$ i przynajmniej jedna z działających sił musi być niezachowawcza.

Możemy spojrzeć na tę sprawę nieco bardziej szczegółowo. Gdy w układzie przedstawionym na rys. 8-1 występuje tarcie, wtedy na ciało działają cztery siły i siła wypadkowa jest równa

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_s + \mathbf{W} + \mathbf{N} + \mathbf{f},$$

gdzie: $\mathbf{F}_s$ — siła sprężysta, $\mathbf{W}$ — ciężar ciała, $\mathbf{N}$ — siła normalna, wywierana na ciało przez płaszczyznę, i $\mathbf{f}$ — siła tarcia. Równanie (8-2), wyrażające twierdzenie o pracy i energii, możemy napisać następująco:

$$W_s + W_w + W_N + W_f = \Delta K,$$

gdzie wyrazy po lewej stronie równania określają prace wykonane nad ciałem przez wymienione wyżej cztery siły. Zauważyliśmy, że dla drogi zamkniętej $W_s = 0$. Podobnie $W_w = W_N = 0$, ponieważ odpowiednie siły są skierowane prostopadle do przemieszczenia ciała. A zatem zmianę energii kinetycznej spowodowaną całkowitą pracą W_f , czyli pracą wykonaną przez siłę tarcia.

* W rzeczywistości na ciało przedstawione na rys. 8-1 działają jeszcze dwie siły: jego ciężar $\mathbf{W}$ i siła normalna $\mathbf{N}$ wywierana przez płaszczyznę. Ponieważ siły te działają prostopadle do kierunku ruchu, nie mogą zmienić energii kinetycznej ciała, i dlatego w tym rozważaniu nie są uwzględnione.

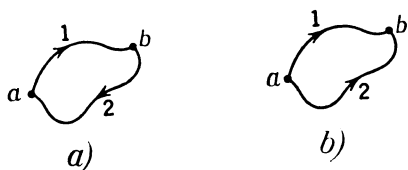
Możemy jeszcze trzecim sposobem rozważyć różnicę pomiędzy siłami zachowawczymi i niezachowawczymi. Przypuśćmy, że punkt materialny porusza się z punktu a do punktu b wzdłuż drogi 1 i z powrotem z b do a wzdłuż drogi 2 (rys. 8-2a). Podczas ruchu po drodze zamkniętej na ten punkt materialny może działać kilka sił; rozpatrzmy oddzielnie każdą siłę. Jeżeli rozpatrywana siła jest zachowawcza, to praca wykonana nad punktem materialnym przez tę szczególną siłę, dla drogi zamkniętej, jest równa zero, czyli

$$W_{ab,1} + W_{ba,2} = 0,$$

co możemy zapisać jako

$$W_{ab,1} = -W_{ba,2}.$$

Znaczy to, że praca wykonana przy przejściu od punktu a do punktu b wzdłuż drogi 1 jest równa pracy wykonanej przy przejściu od b do a wzdłuż drogi 2, lecz ze znakiem minus.



Rys. 8-2

Jednakże, jeżeli powodujemy, że punkt materialny porusza się od a do b wzdłuż drogi 2, jak widać na rys. 8-2b, to jedynie odwracamy kierunek poprzedniego ruchu wzdłuż drogi 2 tak, że

$$W_{ab,2} = -W_{ba,2}.$$

Stąd

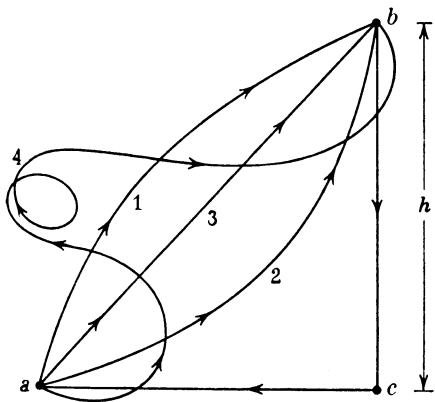
$$W_{ab,1} = W_{ab,2},$$

z czego widać, że praca wykonana przez siłę zachowawczą przy przemieszczaniu punktu materialnego od a do b jest taka sama dla każdej z tych dróg.

Drogi 1 i 2 mogą mieć dowolny kształt, byleby tylko łączyły te same punkty a i b , przy czym punkty a i b mogą być wybrane zupełnie dowolnie. Jeżeli siła jest zachowawcza, zawsze otrzymamy ten sam wynik. A więc mamy inną, równoznaczną definicję sił zachowawczych i niezachowawczych. *Siłę nazywamy zachowawczą, jeżeli praca wykonana przez nią nad punktem materialnym poruszającym się pomiędzy dwoma punktami zależy tylko od punktów, a nie od kształtu łączącej je drogi. Siłę nazywamy niezachowawczą, jeżeli praca wykonana przez tę siłę nad punktem materialnym poruszającym się pomiędzy dwoma punktami zależy od kształtu drogi łączącej te punkty.*

Aby zilustrować tę trzecią (równoważną) definicję sił zachowawczych, rozważmy drugi rodzaj siły zachowawczej, którą zawdzięczamy ciężeni. Przypuśćmy, że bierzemy do rąk kamień o masie m i podnosimy go na wysokość h ponad powierzchnię Ziemi, przy czym to przemieszczenie od a do b odbywa się po kilku różnych drogach, jak na rys. 8-3. Wiemy już, że całkowita praca wykonana na drodze zamkniętej przez siłę zachowawczą jest równa zero oraz że siła grawitacyjna jest zachowawcza. Praca wykonana przez siłę grawitacyjną podczas przemieszczenia kamienia wzdłuż drogi powrotnej bca wynosi po prostu mgh . Ponieważ siła grawitacyjna jest siłą zachowawczą, więc praca wykonana przez nią podczas ruchu kamienia wzdłuż dowolnej drogi od a do b musi wynosić $-mgh$, gdyż tylko wtedy całkowita praca wykonana przez siłę grawitacyjną na drodze zamkniętej będzie równa zero.

Znaczy to, że siła grawitacyjna wykonuje ujemną pracę podczas ruchu kamienia od a do b , albo, innymi słowy, wzdłuż jakiegokolwiek drogi ab praca musi być wykonana przeciw sile ciężkości. Można tu również bezpośrednio obliczyć, że praca wykonana przez siłę grawitacyjną wzdłuż jakiegokolwiek drogi ab równa się $-mgh$. Każdą z tych dróg można bowiem rozłożyć na sumę nieskończenie małych przesunięć w kierunku poziomym i pionowym, przy czym przy przesunięciach poziomych siła grawitacyjna nie wykonuje żadnej pracy, natomiast wypadkowe przemieszczenie pionowe dla wszystkich dróg jest jednakowe. Stąd praca wykonana przez siłę grawitacyjną nad kamieniem poruszającym się od a do b zależy tylko od położenia a i b , nie zależy zaś w ogóle od drogi łączącej te punkty.



Rys. 8-3. Kamień przesuwany się od punktu a do punktu b po różnych drogach: 1, 2, 3 i 4

Dla siły niezachowawczej, takiej jak tarcie, wykonana praca nie jest niezależna od drogi wybranej pomiędzy dwoma ustalonymi punktami. Musimy jedynie zwrócić uwagę na to, że gdy popychamy ciało po (chropowatym) stole, po różnych drogach pomiędzy dwoma jakimiś punktami a i b , wtedy zmienia się przebyta odległość, a wobec tego i praca wykonana przez siłę tarcia. Zależy ona od drogi.

Definicje siły zachowawczej, które tu podajemy, są równoważne. Używamy jednej z nich w zależności od tego, która jest dla nas wygodniejsza. Ta koncepcja, w której jest mowa o drodze zamkniętej, wykazuje jasno, że energia kinetyczna nie ulega zmianie, gdy działają siły zachowawcze. Wprowadzenie pojęcia energii potencjalnej będzie jednak wygodniejsze, jeżeli skorzystamy ze stwierdzenia o niezależności pracy od kształtu drogi.

8-3. Energia potencjalna

W tym paragrafie skupimy uwagę nie na poruszającym się ciele z rys. 8-1, lecz na odosobnionym układzie (ciało + sprężyna). Z tego punktu widzenia, zamiast mówić, że ciało porusza się, powiemy, że stan układu zmienia się. Mierzmy zarówno położenie ciała, jak i stan układu w jakiejś chwili, przy pomocy tego samego parametru x , a mianowicie: przemieszczenia swobodnego końca sprężyny z jej normalnego położenia odpowiadającego nie rozciągniętej sprężynie. Energia kinetyczna układu i ciała jest taka sama, ponieważ zrobiliśmy założenie, że sprężyna jest pozbawiona masy.

Widzieliśmy, że energia kinetyczna układu przedstawionego na rys. 8-1 zmniejsza się w pierwszej fazie ruchu, staje się równa zero, a następnie zwiększa się w drugiej fazie. Jeżeli

nie występuje tarcie i jeżeli układ odzyskał stan początkowy, to energia kinetyczna układu wraca do wartości początkowej.

W tych warunkach (działają siły zachowawcze) staje się celowe wprowadzenie pojęcia *energii stanu* lub *energii potencjalnej* U . Mówimy, że jeżeli energia kinetyczna K dla tego układu zmienia się o wartość ΔK , a więc gdy następuje zmiana stanu układu (tzn. gdy porusza się ciało w układzie z rys. 8-1), to energia potencjalna U dla tego układu musi się zmienić o wartość równą co do wartości bezwzględnej, lecz przeciwną co do znaku, tak że suma tych dwóch zmian jest równa zeru, czyli

$$\Delta K + \Delta U = 0. \quad (8-4a)$$

Innymi słowy, możemy powiedzieć, że każda zmiana energii kinetycznej K układu jest równoważona przez równą co do wartości, a przeciwną co do znaku zmianę energii potencjalnej U układu, tak że ich suma pozostaje stała przez cały czas trwania ruchu:

$$K + U = \text{const.} \quad (8-4b)$$

Energia potencjalna układu przedstawia pewną formę nagromadzonej energii, która może być całkowicie odzyskana i zamieniona na energię kinetyczną. Nie możemy zatem wiązać energii potencjalnej z siłą niezachowawczą, taką jak siła tarcia, ponieważ energia kinetyczna układu, w którym działają siły niezachowawcze, *nie* wraca do początkowej wartości, gdy układ wraca do stanu początkowego.

Równania (8-4) stosuje się do zamkniętego układu obiektów oddziałujących wzajemnie na siebie, takiego jak układ (ciało + sprężyna) przedstawiony na rys. 8-1. Ponieważ w tym przykładzie przyjęliśmy, że sprężyna jest praktycznie pozbawiona masy, energia kinetyczna może być związana z samym poruszającym się ciałem. Ciało porusza się ruchem opóźnionym (lub przyspieszonym), ponieważ wywierana jest na nie siła *przez sprężynę*; w takim razie właściwe jest powiązanie energii potencjalnej układu z tą siłą, a więc ze sprężyną. Tak więc w tym prostym przypadku mówimy, że zlokalizowana w ciele energia kinetyczna zmniejsza się w pierwszej fazie ruchu, podczas gdy zlokalizowana w sprężynie energia potencjalna zwiększa się w tym samym czasie*.

Równania (8-4) stanowią w zasadzie bilans energii. Jednak zarówno one, jak i pojęcie energii potencjalnej nie mają rzeczywistego znaczenia, dopóki nie pokażemy, jak należy obliczać U jako funkcję stanu układu, w którym działają siły zachowawcze; w przykładzie przedstawionym na rys. 8-1 oznacza to, że musimy umieć obliczyć $U(x)$, gdzie x jest przemieszczeniem sprężyny.

Aby przeanalizować nasze pojęcie energii potencjalnej U , rozważmy twierdzenie o pracy i energii: $W = \Delta K$, gdzie W jest pracą wykonaną przez siłę wypadkową nad punktem materialnym, gdy punkt ten porusza się od a do b . Dla uproszczenia założymy, że na punkt materialny działa tylko jedna siła F , co jest rzeczywiście prawdziwe w układzie przedstawionym na rys. 8-1. Jeżeli siła F jest zachowawcza, to możemy połączyć twierdzenie o pracy i energii (równanie (8-1)) z równaniem (8-4a); otrzymamy wtedy

$$W = \Delta K = -\Delta U. \quad (8-5a)$$

* Tak jak założyliśmy, że sprężyna jest praktycznie pozbawiona masy, tak samo zakładamy, że ciało jest sztywne, to znaczy praktycznie „pozbawione sprężystości”. W ogólnym przypadku energia kinetyczna i potencjalna mogłyby występować w różnych częściach układu; stosunki między tymi energiami byłyby zmienne, gdyby stan układu ulegał zmianom.

Praca W wykonana przez siłę zachowawczą zależy jedynie od początkowego i końcowego punktu w tym ruchu, a nie zależy od drogi łączącej te punkty. Taka siła może być zależna jedynie od położenia punktu materialnego, np. nie zależy ona ani od jego prędkości, ani od czasu.

W przypadku ruchu jednowymiarowego, gdy punkt materialny porusza się od x_0 do x , równanie (8-5a) przyjmuje postać

$$\Delta U = -W = - \int_{x_0}^x F(x) dx. \quad (8-5b)$$

Równanie (8-5b) wskazuje, jak należy obliczać zmianę energii potencjalnej ΔU , kiedy punkt materialny pod działaniem siły zachowawczej $F(x)$ porusza się z punktu a , oznaczonego przez x_0 , do punktu b , oznaczonego przez x . Z tego równania wynika, że możemy obliczyć ΔU tylko wtedy, gdy siła F zależy jedynie od położenia punktu materialnego (tzn. od stanu układu). Jest to równoznaczne ze stwierdzeniem, że energia potencjalna ma znaczenie jedynie dla sił zachowawczych.

Skoro wiemy, że energia potencjalna U zależy tylko od położenia punktu materialnego, możemy obecnie zapisać równanie (8-4b) następująco:

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = E \quad (\text{przypadek jednowymiarowy}), \quad (8-6a)$$

gdzie E , która pozostaje wielkością stałą podczas ruchu punktu materialnego, nazywana jest *całkowitą energią mechaniczną*. Przypuśćmy, że punkt materialny porusza się z punktu a (gdzie jego położenie wyraża się przez x_0 , a prędkość przez v_0) do punktu b (gdzie jego położenie wyraża się przez x , a prędkość przez v); jeżeli siła jest zachowawcza, to całkowita energia mechaniczna E musi być taka sama dla każdego stanu układu, czyli z równania (8-6a) mamy

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = \frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0). \quad (8-6b)$$

Wielkość po prawej stronie równania zależy tylko od początkowego położenia x_0 i od początkowej prędkości v_0 , które mają określone wartości; dlatego jest ona *stałą podczas ruchu*. Określa ona stałą całkowitą energię mechaniczną E . Zwróćmy uwagę, że w równaniu tym nie występuje siła i przyspieszenie, lecz jedynie położenie i prędkość. Równania (8-6) są często nazywane *prawem zachowania energii mechanicznej* dla sił zachowawczych.

W wielu zadaniach okaże się, że chociaż niektóre siły nie są zachowawcze, są one tak małe, że możemy je pominąć. W takich przypadkach możemy stosować z dobrym przybliżeniem równania (8-6). I tak, chociaż występuje opór powietrza, to może on mieć tak mały wpływ na ruch, że można go nie uwzględniać.

Zwracamy uwagę, że gdy występują tylko siły zachowawcze, wtedy zamiast brać za punkt wyjścia zasady Newtona, możemy uprościć rozwiązanie opierając się na równaniach (8-6). Zależności te wynikają oczywiście z zasad Newtona, lecz szybciej prowadzą do rozwiązania danego problemu (tzw. pierwsza całka ruchu). Często rozwiązujemy zadania bez analizowania sił czy też wypisywania zasad Newtona, szukając jedynie jakiejś stałej ruchu. W podanym przykładzie energia mechaniczna jest stała i równania (8-6) możemy uważać za pierwszy krok w naszych rozważaniach.

Dla ruchu jednowymiarowego możemy również zapisać zależność pomiędzy siłą a energią potencjalną (równanie 8-5b):

$$F(x) = - \frac{dU(x)}{dx}. \quad (8-7)$$

Aby wykazać słuszność równania (8-7), podstawmy do równania (8-5b) to wyrażenie na $F(x)$; okaże się wówczas, że otrzymujemy tożsamość. Równanie (8-7) pozwala nam spojrzeć w inny sposób na zagadnienie energii potencjalnej. *Energia potencjalna jest to funkcja położenia, której ujemna pochodna daje wyrażenie na siłę.*

Należy zwrócić uwagę, że w równaniach (8-6) zapisaliśmy wielkość $U(x)$, chociaż potrafimy obliczyć tylko zmiany U (z równania (8-5b)), a nie samą U . Wyobraźmy sobie, że punkt materialny porusza się od a do b wzdłuż osi x oraz że działa nań jedna siła zachowawcza $F(x)$. Aby wyznaczyć wartość U_b , czyli energię potencjalną w punkcie b , napiszemy

$$\Delta U = U_b - U_a$$

lub [zob. równanie (8-5b)]

$$U_b = \Delta U + U_a = - \int_{x_a}^{x_b} F(x) dx + U_a. \quad (8-8)$$

Nie możemy wyznaczyć wartości U_b , dopóki nie wyznaczymy wartości U_a . Jeżeli punkt b odpowiada jakiemuś dowolnemu położeniu x , takiemu że $U_b = U(x)$, to funkcji $U(x)$ nadajemy znaczenie przez wybranie punktu a tak, aby był wygodnym punktem odniesienia, określonym przez $x_a = x_0$, oraz przez dowolne przypisanie wartości energii potencjalnej $U_a = U(x_0)$, gdy ciało znajduje się w tym punkcie. A zatem równanie (8-8) przyjmuje postać

$$U(x) = - \int_{x_0}^x F(x) dx + U(x_0). \quad (8-9)$$

Energię potencjalną ciała znajdującego się w punkcie odniesienia, czyli $U(x_0)$, przyjmuje się zazwyczaj jako równą zero.

Często wygodnie jest tak wybrać punkt odniesienia x_0 , aby siła działająca w nim na punkt materialny była równa zero. Tak więc siła wywierana przez sprężynę jest równa zero, kiedy sprężyna ma swoją normalną długość w stanie nie rozciągniętym; mówimy zwykle, że w tych warunkach energia potencjalna jest również równa zero. Podobnie siła przyciągania jakiegoś ciała przez Ziemię zmniejsza się w miarę oddalania się tego ciała od Ziemi i staje się równa zero w nieskończenie wielkiej odległości. Zwykle jako punkt odniesienia przyjmujemy nieskończoność i w tym położeniu ustalamy wartość energii potencjalnej, związanej z siłą grawitacyjną, jako równą zero (zob. rozdział 16). Jednak dotychczas byliśmy bardziej zainteresowani przyciąganiem grawitacyjnym takich ciał, jak np. piłki, itp., które w porównaniu z promieniem Ziemi nie poruszają się zbyt daleko od jej powierzchni. W tym przypadku siła grawitacyjna ($= mg$) jest zasadniczo stała i dochodzimy do wniosku, że wygodnie jest przyjąć zerową wartość energii potencjalnej nie w nieskończoności, lecz na powierzchni Ziemi.

Zmieniając współrzędną x_0 wzorcowego punktu odniesienia lub dowolną wartość, jaką przyjęliśmy dla $U(x_0)$, powodujemy po prostu zmianę wartości $U(x)$ przez dodanie do niej jakiejś stałej. Obecność jakiejś dowolnie dodanej stałej w wyrażeniu na energię potencjalną [równanie (8-9)] nie powoduje zmian w równaniach, które dotychczas zapisaliśmy. Dodaje się ten sam stały wyraz do każdej strony, np. równanie (8-6b), pozostawiając to równanie niezmienione. Ponadto, zmieniając $U(x)$ przy pomocy dodanej jakiejś stałej,

nie powoduje się zmiany siły obliczonej z równania (8-7), gdyż pochodna stałej jest równa zeru. Wszystko to oznacza po prostu, że dla energii potencjalnej wybór punktu odniesienia jest nieistotny, ponieważ interesują nas zawsze tylko *różnice* energii potencjalnej, a nie jakaś absolutna wartość tej energii w danym punkcie.

Pewna dowolność istnieje również przy określaniu energii kinetycznej. Aby określić prędkość, a zatem energię kinetyczną, musimy ustalić układ odniesienia. Jeżeli przyjmujemy pociąg za układ odniesienia, to prędkość człowieka siedzącego w pociągu jest równa zeru, ale jest ona różna od zera dla obserwatora na Ziemi, który widzi, że człowiek w pociągu porusza się ze stałą prędkością. Wartość energii kinetycznej zależy od układu odniesienia przyjętego przez obserwatora. Skutkiem tego w przypadku energii mechanicznej E , która jest sumą energii kinetycznej i potencjalnej, *nie* jest rzeczą ważną jej wartość rzeczywista podczas danego ruchu (zależna od obserwatora), ale fakt, że wartość ta, jeżeli siły są zachowawcze, *nie zmienia się* podczas ruchu dla żadnego obserwatora.

8-4. Jednowymiarowe układy zachowawcze

Obliczmy teraz energię potencjalną w jednowymiarowym ruchu dla dwóch przykładów sił zachowawczych: siły grawitacyjnej dla ruchów w pobliżu powierzchni Ziemi i siły (sprężystej) przywracającej równowagę (idealnej) rozciągniętej sprężyny.

Dla siły grawitacyjnej przyjmujemy, że jednowymiarowy ruch jest pionowy wzdłuż osi y . Kierunek osi y w górę traktujemy jako dodatni; zatem siła grawitacyjna jest skierowana w ujemnym kierunku osi y , czyli ku dołowi. Mamy $F(y) = -mg$, czyli F jest stała. Energię potencjalną w położeniu y określamy z równania (8-9), czyli

$$U(y) = -\int_0^y F(y)dy + U(0) = -\int_0^y (-mg)dy + U(0) = mgy + U(0).$$

Możemy przyjąć, że energia potencjalna jest równa zeru, gdy $y = 0$, tak że $U(0) = 0$, natomiast

$$U(y) = mgy. \quad (8-10)$$

Energia potencjalna związana z siłą grawitacyjną wynosi zatem mgy . Zależność $F(y) = -dU/dy$ [równanie (8-7)] jest spełniona, ponieważ $-d(mgy)/dy = -mg$. Dla ułatwienia przyjmujemy, że na powierzchni Ziemi $y = 0$, czyli grawitacyjna energia potencjalna na powierzchni Ziemi jest równa zeru i wzrasta liniowo wraz z wysokością y .

Jeżeli porównamy punkty y oraz $y = 0$, to zasada zachowania energii kinetycznej i potencjalnej [równanie (8-6b)] daje nam zależność

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = \frac{1}{2}mv_0^2,$$

która pod względem matematycznym jest równoznaczna z dobrze znanym wzorem [zob. równanie (3-17)]:

$$v^2 = v_0^2 - 2gy.$$

Jeżeli punkt materialny porusza się od wysokości h_1 do wysokości h_2 , to możemy zastosować równanie (8-6b); otrzymamy wtedy

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2,$$

co jest zgodne z wynikiem przykładu 5 w rozdziale 7. Całkowita energia mechaniczna E jest stała i nie zmienia się podczas ruchu, chociaż gdy zmienia się stan układu (punkt materialny + Ziemia), energia kinetyczna i potencjalna ulegają zmianom.

Drugim przykładem siły zachowawczej jest siła wywierana przez elastyczną sprężynę na ciało o masie m , przymocowane do tej sprężyny i poruszające się po poziomej powierzchni bez tarcia. Jeśli przyjąć $x_0 = 0$ jako położenie końca sprężyny nierozciągniętej, to siła, którą działa ona na ciało, gdy jest rozciągnięta na odległość x od położenia równowagi, wynosi $F = -kx$. Energię potencjalną obliczamy z równania (8-9):

$$U(x) = - \int_0^x F(x) dx + U(0) = - \int_0^x (-kx) dx + U(0).$$

Jeżeli przyjmiemy $U(0) = 0$, to energia potencjalna, podobnie jak siła, równa się zeru, kiedy sprężyna nie jest rozciągnięta i stąd

$$U(x) = - \int_0^x (-kx) dx = \frac{1}{2} kx^2.$$

Wynik jest niezależny od tego czy ściskamy, czy rozciągamy sprężynę, tzn. że jest niezależny od znaku x .

Zależność $F(x) = -dU/dx$ [równanie (8-7)] jest spełniona, ponieważ $-d(\frac{1}{2}kx^2)/dx = -kx$. Energia potencjalna sprężyny związana z siłą sprężystą wynosi

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2. \quad (8-11)$$

Ciało o masie m będzie podlegało ruchowi, w którym całkowita energia E jest zachowana (rys. 8-4). Z równania (8-6b) mamy

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_0^2,$$

gdzie v_0 jest prędkością ciała w punkcie $x = 0$. W praktyce ruch taki możemy osiągnąć rozciągając sprężynę do pewnego położenia x_m , przy pomocy odpowiedniej siły, następnie zaś usuwając tę siłę. Zwracamy uwagę, że dla $x = 0$ energia układu (ciało + sprężyna) jest w całości energią kinetyczną. Dla $x = x_m$ (maksymalna wartość x), v musi być równe zeru, a więc w tym przypadku energia układu jest w całości energią potencjalną. W punkcie $x = x_m$ mamy

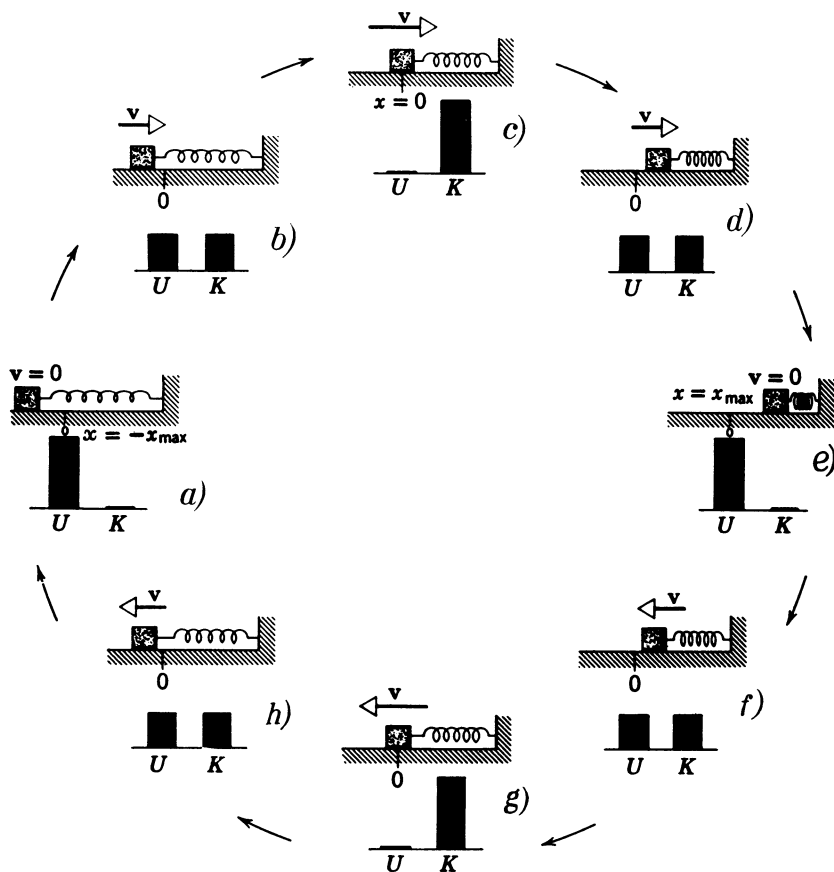
$$\frac{1}{2}kx_m^2 = \frac{1}{2}mv_0^2, \quad \text{czyli} \quad x_m = \sqrt{\frac{m}{k}} v_0.$$

Dla położzeń pomiędzy punktami x_1 i x_2 z równania (8-6b) otrzymujemy

$$\frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}mv_2^2.$$

Widzieliśmy, że *energia kinetyczna ciała jest równa pracy, którą może ono wykonać do chwili zatrzymania się*. Energię kinetyczną wyrażamy przy pomocy wzoru $K = \frac{1}{2}mv^2$. Nie możemy jednak podać podobnej, ogólnej formuły, która wyrażałaby energię potencjalną. *Energia potencjalna układu ciał jest równa pracy, którą ten układ może wykonać zmieniając względne położenie swoich części, czyli zmieniając swój stan*. W każdym przypadku musimy określić, jaką pracę może wykonać układ przechodząc z jednego stanu do innego i potraktować tę pracę jako różnicę energii potencjalnej układu między tymi dwoma stanami.

Energia potencjalna sprężyny zależy od względnego położenia jej części. Gdy pozwolimy sprężynie wrócić do jej stanu równowagi, otrzymamy pracę. Podczas tego ruchu spręży-



Rys. 8-4. Ciało o pewnej masie, przymocowane do sprężyny, ślizga się tam i z powrotem po poziomej powierzchni, bez tarcia. Układ taki nazywamy oscylatorem harmonicznym. Zilustrowany jest tu ruch ciała w ciągu jednego cyklu. Zaczniemy rozpatrywać ten ruch od położenia (a) przedstawionego z lewej strony rysunku (położenie odpowiadające godzinie 9; ciało ma wtedy skrajne wychylenie w lewo i chwilowo spoczywa, $K = 0$). Wtedy sprężyna ma maksymalne wydłużenie, czyli $U = U_{\max}$ (K i U są wyobrażone przy pomocy klocków widocznych poniżej każdego położenia). Po upływie jednej ósmej okresu (następne położenie (b)) ciało uzyskało energię kinetyczną, a sprężyna częściowo utraciła wydłużenie; K i U są tu sobie równe, czyli $K = U = \frac{1}{2} U_{\max}$. W górnym położeniu (c) sprężyna ma długość naturalną i prędkość ciała jest maksymalna, zatem $U = 0$, a $K = K_{\max} = U_{\max}$. W następnych fazach ruchu całkowita energia $E = K + U$ również jest zachowana, $E = K_{\max} = U_{\max}$. Ruch oscylatora harmonicznego będziemy dokładnie analizować w rozdziale 15

na działa z określoną siłą na określonej drodze. Jeżeli przymocujemy do sprężyny ciało o pewnej masie, tak jak w naszym przykładzie, to pod wpływem tej siły ciało uzyska przyspieszenie i energia potencjalna przejdzie w energię kinetyczną. W przypadku przyciągania grawitacyjnego przedmiot zajmuje pewne położenie względem Ziemi. Energia potencjalna jest właściwością tego przedmiotu i Ziemi, traktowanych jako pewien układ ciał. Energię potencjalną tego układu określa względne położenie jego obu części. Jest ona większa, kiedy te części są bardziej oddalone niż wtedy, gdy są blisko siebie. Ubytek energii potencjalnej równy jest pracy wykonanej przy zbliżaniu się części układu. Ta praca ulega zamianie na energię kinetyczną elementów układu. W naszym przykładzie pominęliśmy energię kinety-

czną uzyskaną przez samą Ziemię, gdy spadał na nią jakiś przedmiot. W zasadzie przedmiot ten oddziałuje pewną siłą na Ziemię, nadając jej przyspieszenie względem pewnego układu inercjalnego. Jednak wynikająca stąd zmiana prędkości jest nadzwyczaj mała i pomimo olbrzymiej masy Ziemi jej dodatkową energię kinetyczną możemy pominąć w porównaniu z energią kinetyczną uzyskaną przez spadający przedmiot. Udowodnimy to w jednym z dalszych rozdziałów. W innych przypadkach, takich jak ruch planetarny, gdzie masy obiektów są porównywalne, nie możemy pomijać żadnej z części składowych układu. Ogólnie biorąc, *energii potencjalnej nie można przyporządkować ciału odosobnionemu, lecz należy ją traktować jako właściwość całego układu.*

Przykład 1. Jaka jest zmiana grawitacyjnej energii potencjalnej, gdy winda o ciężarze 726 kG wjeżdża na szczyt wieżowca Empire w Nowym Jorku, 368 m ponad poziom ulicy?

Grawitacyjna energia potencjalna układu (windy + Ziemia) wynosi $U = mgy$. Zatem

$$\Delta U = U_2 - U_1 = mg(y_2 - y_1).$$

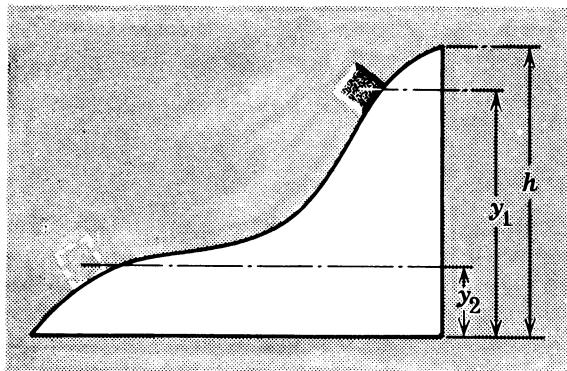
Ponieważ

$$mg = W = 726 \text{ kG}, \quad y_2 - y_1 = 368 \text{ m},$$

więc

$$\Delta U = 726 \cdot 368 \text{ kGm} = 277 \cdot 10^3 \text{ kGm}.$$

Przykład 2. Jako przykład przydatności pojęcia energii, ułatwiającego rozwiązywanie zadań z dynamiki, rozważmy zagadnienie przedstawione na rys. 8-5. Ciało o masie m ześlizguje się po doskonale gładkiej powierzchni zakrzywionej. Siła, którą powierzchnia działa na ciało, jest zawsze prostopadła do tej po-



Rys. 8-5. Przykład 2. Ciało ześlizguje się bez tarcia po powierzchni zakrzywionej

wierzchni i do kierunku ruchu ciała, a więc siła ta nie wykonuje pracy. Jedyne siła grawitacyjna wykonuje pracę nad ciałem, a ta siła jest siłą zachowawczą. Dlatego też energia mechaniczna E jest zachowana, możemy więc napisać:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2,$$

skąd

$$v_2^2 = v_1^2 + 2g(y_1 - y_2).$$

Prędkość przy podstawie tej powierzchni zakrzywionej zależy tylko od początkowej prędkości ciała i zmiany wysokości liczonej w kierunku pionowym, a nie zależy w ogóle od jej kształtu. W istocie, jeżeli ciało znajdowało się początkowo w spoczynku na wysokości $y_1 = h$ i jeżeli przyjmiemy $y_2 = 0$, to otrzymamy

$$v_2 = \sqrt{2gh}.$$

W tym miejscu Czytelnik powinien przypomnieć sobie rozważania na temat niezależności od drogi pracy wykonywanej przez siły zachowawcze i powinien zastosować rozważania dotyczące ruchu jednowymiarowego do przypadku ruchu w przestrzeni dwuwymiarowej.

W omawianym zagadnieniu wartość siły zależy od nachylenia powierzchni w każdym punkcie. Skutkiem tego przyspieszenie nie jest stałe, lecz jest funkcją położenia. W celu obliczenia prędkości na podstawie zasad Newtona należałoby najpierw znaleźć przyspieszenie dla każdego punktu, a potem scałkować funkcję przyspieszenia wzdłuż całej drogi. Unikamy tej niepotrzebnej pracy opierając się na fakcie, że energia mechaniczna jest stała podczas ruchu.

Przykład 3. Sprężyna w karabinie sprężynowym ma współczynnik sprężystości $k = 715 \text{ G/cm}$. Po ściśnięciu jej długość zmniejszyła się o $2,5 \text{ cm}$. W lufie znajduje się pocisk o masie $13,6 \text{ g}$. Zakładając brak tarcia i poziome ustawienie lufy obliczyć prędkość pocisku w chwili opuszczania lufy.

Siła jest zachowawcza, a więc i energia mechaniczna jest zachowana w całym procesie. Początkową energią mechaniczną jest energia potencjalna sprężyny $\frac{1}{2}kx$, a końcową energią mechaniczną jest energia kinetyczna pocisku $\frac{1}{2}mv^2$. Wobec tego

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2,$$

czyli

$$v = \sqrt{\frac{k}{m} x} = \sqrt{\frac{715 \cdot 981 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}}}{13,6 \text{ g}} \cdot 2,5 \text{ cm}} = 570 \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

8-5. Ogólne rozwiązanie równania ruchu dla sił w przestrzeni jednowymiarowej, zależnych tylko od położenia

Równanie (8-6a) daje związek między położeniem i prędkością punktu materialnego dla ruchu w przestrzeni jednowymiarowej w przypadku, gdy siła zależy tylko od położenia. Siła i przyspieszenie przy formułowaniu tego równania zostały wyeliminowane. Aby całkowicie rozwiązać to zagadnienie dynamiczne, musimy jeszcze wyeliminować prędkość i przedstawić położenie punktu jako funkcję czasu. Mianowicie, z równania (8-6a) mamy

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = E.$$

Rozwiązując to równanie względem v otrzymujemy

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]} \quad (8-12)$$

albo

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]}} = dt.$$

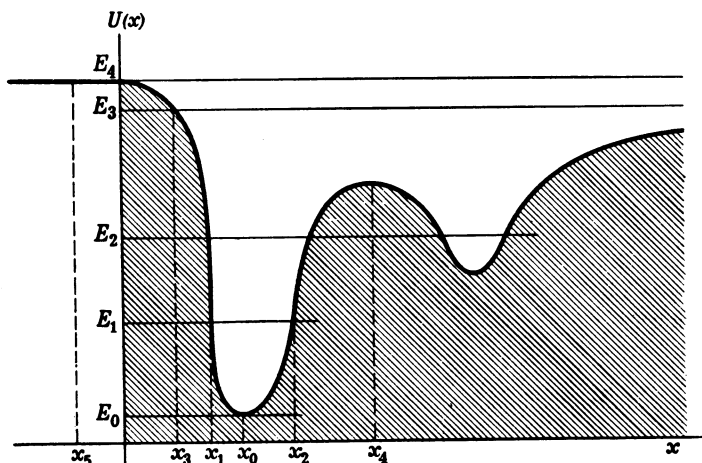
Teraz możemy znaleźć funkcję $x(t)$, rozwiązując względem x równanie

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]}} = \int_{t_0}^t dt = t - t_0. \quad (8-13)$$

W równaniu tym przyjęto, że punkt materialny w chwili t_0 znajduje się w punkcie x_0 , a E jest stałą energią całkowitą. Znak pierwiastka w tym równaniu zależy od tego, czy v ma zwrot dodatniego, czy też ujemnego kierunku osi x . Gdy v zmienia zwrot podczas ruchu, może się okazać potrzebne wykonanie oddzielnego całkowania dla każdego odcinka drogi.

Nawet kiedy nie możemy obliczyć całki lub gdy równania otrzymanego w ostatecznym wyniku nie możemy przedstawić w postaci funkcji $x(t)$, równanie ruchu otrzymane na podstawie zachowania energii dostarcza nam wielu informacji o samym ruchu. Na przykład, przy danej energii całkowitej E na podstawie równania (8-12) wnioskujemy, że punkt materialny może znajdować się w takich obszarach osi x , gdzie $E > U(x)$. W fizyce nie występuje pojęcie urojonej prędkości, ani ujemnej energii kinetycznej. Zatem $E - U(x)$ musi być równe zeru lub większe od zera. Poza tym możemy otrzymać dobry jakościowo opis możliwych rodzajów ruchu wykreślając $U(x)$ jako funkcję x . Opis taki opiera się na fakcie, że prędkość jest proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z różnicy energii E i U .

Rozważmy na przykład funkcję energii potencjalnej, przedstawioną na rys. 8-6. Można sobie wyobrazić, że jest to profil doskonale gładkiego toru karkołomnej kolejki; wykres ten jednak przedstawia energię potencjalną jakiegoś układu niegrawitacyjnego. Ponieważ dla ruchu rzeczywistego musi być $E \geq U(x)$, więc najmniejsza możliwa energia całkowita wynosi E_0 . Wtedy $E_0 = U$, a energia kinetyczna musi być równa zero. Zatem punkt materialny musi spoczywać w punkcie x_0 . W przypadku nieco większej energii E_1 punkt materialny może się poruszać tylko w przedziale od x_1 do x_2 . Gdy punkt materialny oddala się od x_0 , jego prędkość maleje w miarę zbliżania się do x_1 albo x_2 , gdzie zatrzymuje się i zmienia kierunek ruchu. Zatem punkty x_1 i x_2 nazywamy *punktami zwrotnymi ruchu*. Przy energii całkowitej E_2 mamy cztery punkty zwrotne i punkt materialny może oscylować w jednej z dwóch jam potencjału. Przy energii całkowitej E_3 jest już tylko jeden punkt zwrotny w x_3 . Jeżeli punkt materialny porusza się początkowo w ujemnym kierunku osi x , zatrzyma się w punkcie x_3 , a następnie będzie się poruszał w dodatnim kierunku tej osi. Prędkość punktu materialnego będzie wzrastała w miarę zmniejszania się U i będzie malała w miarę wzrostu U . Przy energiach większych od E_4 nie ma punktów zwrotnych i punkt materialny nie będzie zmieniał kierunku. Jego prędkość będzie się zmieniać zgodnie z wartością energii potencjalnej w każdym punkcie.



Rys. 8-6. Krzywa energii potencjalnej

W punkcie, gdzie $U(x)$ osiąga minimum, tak jak dla $x = x_0$, nachylenie krzywej jest zerowe, wobec czego siła jest tam równa zero, to znaczy że $F(x_0) = -(dU/dx)_{x=x_0} = 0$. Punkt materialny spoczywający w tym położeniu pozostanie w spoczynku. Natomiast, jeżeli punkt materialny zostanie nieco przemieszczony w jednym z kierunków, to siła $F(x) = -dU/dx$ będzie starała się go zawrócić, w wyniku czego nastąpi oscylacja cząstki wokół położenia równowagi. Taki punkt równowagi będziemy nazywać *punktem równowagi trwałej*.

W punkcie, gdzie $U(x)$ przyjmuje wartość maksymalną, np. w $x = x_4$, nachylenie krzywej jest zerowe, wobec czego siła jest równa zero, to znaczy, że $F(x_4) = -(dU/dx)_{x=x_4} = 0$. Punkt materialny spoczywający w tym położeniu pozostanie w spoczynku. Jednak gdy zostanie on przemieszczony z tego położenia, nawet na nieznaczną odległość, to siła $F(x) = -dU/dx$ będzie dążyła do zepchnięcia go dalej od tego położenia równowagi. Taki punkt równowagi będziemy zatem nazywać *punktem równowagi nietrwałej*.

W przedziale, w którym $U(x)$ jest stała, jak np. w pobliżu $x = x_5$, nachylenie krzywej jest zerowe, wobec czego siła jest równa zero; znaczy to, że $F(x_5) = -(dU/dx)_{x=x_5} = 0$. Taki przedział nazywamy *przedziałem równowagi obojętnej*, ponieważ punkt materialny może być nieco przemieszczony, a mimo to nie dozna ani siły przyciągającej, ani odpychającej.

Z tego, co powiedzieliśmy, widać wyraźnie, że gdy znamy funkcję energii potencjalnej dla obszaru x , w którym porusza się ciało, wtedy wiemy już bardzo dużo o ruchu tego ciała.

Przykład 4. Funkcję energii potencjalnej dla siły działającej między atomami w dwuatomowej cząsteczce można wyrazić, w przybliżeniu, następująco:

$$U(x) = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6},$$

gdzie a i b — dodatnie stałe, x — odległość między atomami.

(a) Dla jakiej wartości x funkcja $U(x)$ jest równa zero? Dla jakiej wartości x funkcja $U(x)$ osiąga minimum?

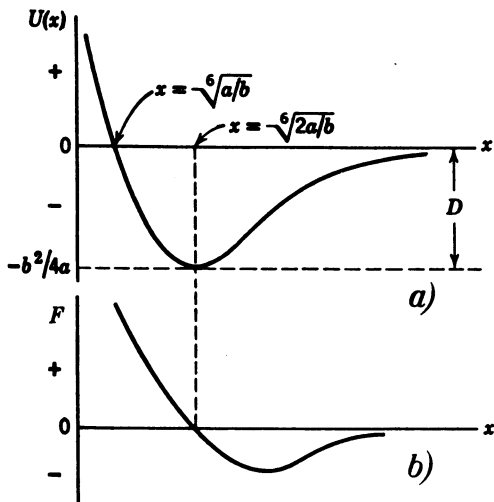
Na rysunku 8-7a przedstawiamy $U(x)$ jako funkcję x . Wartości x , dla których $U(x)$ równa się zero, znajdujemy z równania

$$\frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6} = 0,$$

skąd

$$x^6 = \frac{a}{b}, \quad x = \sqrt[6]{\frac{a}{b}}.$$

$U(x)$ przyjmuje także wartość zero, gdy $x \rightarrow \infty$ [widać to z rysunku lub z podstawienia $x = \infty$ do równania na $U(x)$], czyli $x = \infty$ jest także rozwiązaniem.



Rys. 8-7. Przykład 4. (a) Energia potencjalna i (b) siła działająca między dwoma atomami w dwuatomowej cząsteczce jako funkcja ich odległości x

Wartość x , dla której $U(x)$ osiąga minimum, znajdujemy z równania

$$\frac{d}{dx}U(x) = 0,$$

to znaczy

$$\frac{-12a}{x^{13}} + \frac{6b}{x^7} = 0$$

lub

$$x^6 = \frac{2a}{b}, \quad x = \sqrt[6]{\frac{2a}{b}}.$$

(b) Obliczyć siłę działającą między atomami.

Z równania (8-7) mamy

$$F(x) = -\frac{d}{dx}U(x),$$

$$F = -\frac{d}{dx}\left(\frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6}\right) = \frac{12a}{x^{13}} - \frac{6b}{x^7}.$$

Na rysunku 8-7b wykreśliśmy siłę jako funkcję odległości między atomami. Kiedy siła jest dodatnia (od $x = 0$ do $x = \sqrt[6]{2a/b}$), atomy wzajemnie się odpychają (siła jest skierowana w kierunku wzrastających wartości x). Kiedy siła jest ujemna (od $x = \sqrt[6]{2a/b}$ do $x = \infty$), atomy wzajemnie się przyciągają (siła jest skierowana w kierunku malejących wartości x). W punkcie $x = \sqrt[6]{2a/b}$ siła równa się zero; jest to punkt równowagi trwałej.

(c) Przyjawszy, że jeden z atomów pozostaje w spoczynku, a drugi porusza się wzdłuż osi x , opisać możliwe ruchy.

Z analizy przeprowadzonej w tym paragrafie widać wyraźnie, że atom oscyluje wokół położenia równowagi $x = \sqrt[6]{2a/b}$ w górę i w dół, po doskonale gładkich zboczach jamy potencjału.

(d) Energię potrzebną do rozdzielenia cząsteczki na dwa oddzielne atomy nazywamy *energią dysocjacji*. Obliczyć tę energię dla omawianej cząsteczki.

Jeżeli jeden z atomów ma dostateczną energię kinetyczną, aby przekroczyć barierę potencjału, to nie jest on już związany z drugim atomem. Zatem energia dysocjacji D równa jest zmianie energii potencjalnej od minimalnej wartości w punkcie $x = \sqrt[6]{2a/b}$ do wartości w punkcie $x = \infty$, czyli po prostu:

$$U(x = \infty) - U\left(x = \sqrt[6]{\frac{2a}{b}}\right) = 0 - \left(\frac{a}{4a^2/b^2} - \frac{b}{2a/b}\right) = \frac{b^2}{4a}.$$

Jeżeli energia kinetyczna jest równa albo większa od tej wartości, to cząsteczka ulegnie dysocjacji.

8-6. Układy zachowawcze dwu- i trójwymiarowe

Dotychczas omówiliśmy energię potencjalną i zagadnienie zachowania energii dla układów jednowymiarowych, w których kierunek siły pokrywał się z kierunkiem ruchu dla układów. Możemy łatwo uogólnić tę dyskusję na przypadek ruchu w przestrzeni trójwymiarowej.

Jeżeli praca wykonana przez siłę $\mathbf{F}$ zależy tylko od krańcowych punktów ruchu, a jest niezależna od drogi łączącej te punkty, to siła ta jest zachowawcza. Energię potencjalną U definiujemy analogicznie jak dla układu jednowymiarowego. Jest ona funkcją trzech współrzędnych przestrzennych, tzn. $U = U(x, y, z)$. Możemy tu ponownie otrzymać wyrażenie na zasadę zachowania energii mechanicznej.

Uogólnienie równania (8-5b) dla ruchu trójwymiarowego wyraża się następująco

$$\Delta U = - \int_{x_0}^x F_x dx - \int_{y_0}^y F_y dy - \int_{z_0}^z F_z dz \quad (8-5c)$$

lub, bardziej zwięźle, w zapisie wektorowym:

$$\Delta U = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}, \quad (8-5d)$$

gdzie ΔU jest zmianą energii potencjalnej układu, gdy punkt materialny porusza się z punktu (x_0, y_0, z_0) określonego przez wektor położenia $\mathbf{r}_0$, do punktu (x, y, z) określonego przez wektor położenia $\mathbf{r}$. F_x , F_y i F_z są to składowe siły zachowawczej $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(x, y, z)$.

Uogólnienie równania (8-6b) dla ruchu trójwymiarowego wyraża się wzorem

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x, y, z) = \frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0, y_0, z_0), \quad (8-6c)$$

co w zapisie wektorowym można przedstawić następująco:

$$\frac{1}{2}m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0 + U(\mathbf{r}_0), \quad (8-6d)$$

gdzie

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2; \quad \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + v_{0z}^2 = v_0^2.$$

Podobnie, równanie (8-6a) przyjmuje postać:

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x, y, z) = E;$$

w przypadku trójwymiarowym E jest całkowitą, stałą energią mechaniczną.

A zatem uogólnienie równania (8-7) na przypadek trójwymiarowy przedstawia się następująco:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\mathbf{i}\frac{\partial U}{\partial x} - \mathbf{j}\frac{\partial U}{\partial y} - \mathbf{k}\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Jeżeli to wyrażenie na $\mathbf{F}$ podstawimy do równania (8-5d), to znowu otrzymamy tożsamość. W języku analizy wektorowej mówi się o sile zachowawczej $\mathbf{F}$, że jest ona *ujemnym gradientem* energii potencjalnej $U(x, y, z)$.

Można wykazać, że wszystkie te wyrażenia redukują się do równań opisujących poprawnie ruch jednowymiarowy wzdłuż osi x .

Przykład 5. Rozważmy wahadło proste (paragraf 7-4, rys. 7-8a). Ruch tego układu odbywa się w płaszczyźnie xy , a więc jest to ruch w przestrzeni dwuwymiarowej. Naprężenie sznura działa zawsze prostopadłe do kierunku ruchu punktu materialnego, zatem siła ta nie wykonuje pracy przy przesuwaniu punktu materialnego. Jeżeli wahadło zostanie odchylone o pewien mały kąt, a następnie uwolnione (puszczone swobodnie), to tylko siła grawitacyjna działająca na punkt materialny wykona nad nim pracę. Ponieważ siła ta jest zachowawcza, możemy wykorzystać równanie wyrażające zasadę zachowania energii w przypadku dwuwymiarowym:

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x, y) = E.$$

Jeżeli w najniższym punkcie łuku ($\varphi = 0^\circ$) przyjmiemy na y wartość zerową, $U(x, y)$ będzie równe mgy , zatem

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = E.$$

Przed uwolnieniem punkt materialny jest odchylony o kąt φ_0 . Energia potencjalna wynosi wtedy mgh , gdzie $y = h$ oznacza najwyższe położenie punktu materialnego względem punktu odniesienia. W chwili uwolnienia punktu materialnego ($\varphi = \varphi_0$) jego prędkość i energia kinetyczna są zerowe, czyli energia potencjalna równa się całkowitej energii mechanicznej:

$$E = mgh$$

oraz

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = mgh$$

lub

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(h - y).$$

Prędkość maksymalna występuje dla $y = 0$, gdzie $v = \sqrt{2gh}$, a prędkość minimalna dla $y = h$, gdzie $v = 0$. Gdy $y = 0$, mamy do czynienia tylko z energią potencjalną, energia kinetyczna równa się zeru. W położeniach pośrednich na całkowitą energię punktu materialnego składają się zarówno energia potencjalna, jak i kinetyczna.

Zwracamy uwagę, że $U \leq E$ we wszystkich punktach ruchu; wahadło nie może podnieść się wyżej niż na wysokość $y = h$, tj. powyżej punktu początkowego wychylenia.

8-7. Siły niezachowawcze

Dotychczas rozważaliśmy tylko działanie jednej siły zachowawczej na punkt materialny. Opierając się na twierdzeniu o pracy i energii, czyli

$$W_1 + W_2 + \dots + W_n = \Delta K, \quad (8-2)$$

doszliśmy do wniosku, że jeżeli działała tylko jedna siła, np. $\mathbf{F}_1$ oraz jeżeli była ona zachowawcza, to możemy przedstawić pracę W_1 , którą wykonała ona nad punktem material-

nym jako ubytek energii potencjalnej ΔU_1 rozpatrywanego układu (zob. równanie 8-5a), czyli

$$W_1 = -\Delta U_1.$$

Połączenie tej zależności z równaniem (8-2) daje

$$\Delta K + \Delta U_1 = 0.$$

Jeżeli działa kilka sił zachowawczych, takich jak: grawitacyjna, sprężysta pochodząca od sprężyny, elektrostatyczna itp., to możemy łatwo uogólnić te dwa równania:

$$\sum W_z = - \sum \Delta U \quad (8-14a)$$

oraz

$$\Delta K + \sum \Delta U = 0, \quad (8-14b)$$

gdzie $\sum W_z$ jest sumą prac wykonanych przez różne (zachowawcze) siły, ΔU przedstawiają zmiany energii potencjalnej układu, w którym działają te siły. Wielkość występująca po lewej stronie równania (8-14b), jest to po prostu ΔE , czyli zmiana całkowitej energii mechanicznej dla przykładu, kiedy na punkt materialny działa kilka sił zachowawczych. Zatem równanie to możemy zapisać jako

$$\Delta E = 0 \quad (\text{siły zachowawcze}), \quad (8-15)$$

co oznacza, że gdy zmienia się stan układu, wtedy jego całkowita energia mechaniczna E pozostaje stała.

Przypuśćmy teraz, że oprócz kilku sił zachowawczych działa na punkt materialny jedna siła niezachowawcza, wywołana przez tarcie. Wtedy równanie (8-2) możemy napisać następująco:

$$W_f + \sum W_z = \Delta K,$$

gdzie $\sum W_z$ jest także sumą prac wykonanych przez siły zachowawcze, a W_f jest pracą wykonaną przez siłę tarcia. Wyrażenie to możemy przekształcić [zob. równanie (8-14b)]:

$$\Delta K + \sum \Delta U = W_f. \quad (8-16)$$

Równanie (8-16) wykazuje, że jeśli działa siła tarcia, to całkowita energia mechaniczna nie jest stała, lecz zmienia się o wielkość pracy wykonanej przez tę siłę tarcia. Możemy zapisać równanie (8-16) jako

$$\Delta E = E - E_0 = W_f. \quad (8-17)$$

Ponieważ W_f , czyli praca wykonana przez siłę tarcia nad punktem materialnym, jest zawsze ujemna, to z równania (8-17) wynika, że końcowa energia mechaniczna $E (= K + \sum U)$ jest mniejsza od początkowej energii mechanicznej $E_0 (= K_0 + \sum U_0)$.

Siła tarcia jest przykładem siły rozpraszającej (dysypatywnej), siły, która wykonuje nad ciałem pracę ujemną i dąży do zmniejszenia całkowitej energii mechanicznej układu. Gdybyśmy mieli do czynienia z inną siłą niezachowawczą, wtedy W_f w równaniach (8-16) i (8-17) powinna być zastąpiona przez czynnik W_{nz} , który również wskazuje na to, że całkowita energia mechaniczna E układu nie jest stała, lecz zmienia się o wielkość pracy wykonanej przez tę siłę niezachowawczą. Wobec tego *tylko wówczas, gdy nie działają siły niezachowawcze albo kiedy pomijamy pracę przez nie wykonaną, możemy przyjąć założenie o zachowaniu energii mechanicznej.*

Co się stało z tą „straconą” energią mechaniczną w przypadku tarcia? Zostaje ona przekształcona na energię wewnętrzną U_{wew} , która objawia się we wzroście temperatury. Wytworzona w ten sposób energia wewnętrzna jest równa rozproszonej energii mechanicznej. W dalszych rozdziałach powiemy znacznie więcej o energii wewnętrznej.

Praca wykonana nad ciałem przez siłę zachowawczą jest równa przyrostowi jego energii potencjalnej, wziętemu ze znakiem minus. Podobnie praca wykonana nad ciałem przez siłę tarcia jest równa wytworzonej energii wewnętrznej wziętej ze znakiem minus. Innymi słowy, wytworzona energia wewnętrzna jest równa pracy wykonanej przez ciało. Zatem w równaniu (8-17) możemy zapisać W_f przez $-U_{wew}$, gdzie U_{wew} jest wytworzoną energią wewnętrzną, czyli

$$\Delta E + U_{wew} = 0. \quad (8-18)$$

Oznacza to, że suma energii mechanicznej i wewnętrznej układu nie zmienia się, gdy w układzie działają tylko siły zachowawcze i siły tarcia. Zapisując to równanie w postaci $U_{wew} = -\Delta E$, widzimy, że strata energii mechanicznej równa się uzyskanej energii wewnętrznej.

Przykład 6. Obiekt o masie 1,0 kg poruszający się z początkową prędkością $v_0 = 14$ m/s spada z wysokości 240 m i zagłębia się w piasek na głębokość 0,20 m. Znaleźć średnią siłę tarcia, jaką piasek działa na spadające ciało. Zaniedbać opór powietrza i rozwiązać zadanie wychodząc z zależności na pracę i energię.

Energia kinetyczna w chwili zetknięcia się z piaskiem wyraża się następująco

$$K = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh,$$

gdzie m jest masą spadającego ciała, a h wysokością, z której ono spada. Z drugiej strony mamy w przybliżeniu

$$K = \bar{F}s,$$

gdzie $\bar{F}$ jest średnią siłą tarcia, a s jest głębokością zanurzenia się w piasku. Po porównaniu tych dwóch zależności mamy

$$\bar{F} = \frac{mv_0^2}{2s} + \frac{mgh}{s} = \frac{(1,0 \text{ kg})(14 \text{ m/s})^2}{2(0,20 \text{ m})} + \frac{(1,0 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)(240 \text{ m})}{(0,20 \text{ m})} = 12\,250 \text{ N}.$$

Dla których równań z tego rozdziału dwa pierwsze równania są szczególnymi przypadkami? Jaki czynimy błąd zaniedbując (w porównaniu z h) dodatkową długość spadku s zanim obiekt zatrzyma się? Pokazać, że jest to równoważne zaniedbaniu mg w porównaniu z wypadkową siłą oporu $\bar{F}$. Takie czynniki nie zawsze są pomijane w praktyce (patrz zadanie 19, dla przykładu).

Przykład 7. Ciało o ciężarze 44 N pchnięto w górę po równi pochyłej, nachylonej do poziomu pod kątem 30° , z prędkością początkową 5,0 m/s. Okazało się, że ciało przebyło drogę 1,5 m, zatrzymało się i ześliznęło w dół. Obliczyć siłę tarcia f (zakładając, że siła ta ma wartość stałą) oraz prędkość v ciała przy podstawie równi.

Najpierw rozpatrzmy ruch do góry. Na szczycie, kiedy ruch ustaje, mamy

$$E = K + U = 0 + 44 \text{ N} \cdot 1,5 \text{ m} \cdot \sin 30^\circ = 33 \text{ J}.$$

Przy podstawie, w chwili początkowej,

$$E_0 = K_0 + U_0 = \frac{1}{2} \frac{44 \text{ N}}{9,8 \text{ m/s}^2} (5,0 \text{ m/s})^2 + 0 = 57 \text{ J}.$$

Ponieważ

$$W_f = -fs = -f \cdot 1,5 \text{ m}$$

oraz

$$E - E_0 = W_f,$$

więc

$$(33-57)\text{J} = -f \cdot 1,5 \text{ m},$$

a stąd

$$f = 16 \text{ N}.$$

Rozpatrzmy teraz ruch w dół. Ciało powraca do podstawy równi z prędkością v . Wobec tego przy podstawie, kiedy ruch ustaje,

$$E = K + U = \frac{1}{2} \left(\frac{44 \text{ N}}{9,8 \text{ m/s}^2} \right) v^2 + 0 = \left(\frac{22}{9,8} \text{ N} \cdot \text{s}^2/\text{m} \right) v^2.$$

Na górze, gdzie ruch się zaczyna,

$$E_0 = K_0 + U_0 = 0 + 44 \text{ N} \cdot 1,5 \text{ m} \cdot \sin 30^\circ = 33 \text{ J}.$$

Ponieważ

$$W_f = -16 \text{ N} \cdot 1,5 \text{ m} = -24 \text{ J}$$

oraz

$$E - E_0 = W_f,$$

więc

$$\left(\frac{22}{9,8} \text{ N} \cdot \text{s}^2/\text{m} \right) v^2 - 33 \text{ J} = -24 \text{ J},$$

a stąd

$$v = 2,0 \text{ m/s}.$$

8-8. Zasada zachowania energii

Możemy rozszerzyć dyskusję z poprzedniego paragrafu, biorąc pod uwagę nie tylko siły zachowawcze i siłę tarcia, lecz również inne siły niezachowawcze, nie będące siłami tarcia. Możemy przekształcić wzór, wyrażający twierdzenie o pracy i energii [równanie (8-2)]

$$W_1 + W_2 + \dots + W_n = \Delta K,$$

w następujący sposób:

$$\sum W_z + W_f + \sum W_{nz} = \Delta K, \quad (8-19)$$

gdzie $\sum W_z$ jest to całkowita praca wykonana nad punktem materialnym przez siły zachowawcze, W_f jest pracą wykonaną przez siłę tarcia, a $\sum W_{nz}$ jest to całkowita praca wykonana przez siły niezachowawcze, różne od siły tarcia. Wiemy, że każda siła zachowawcza może być związana z pewną energią potencjalną i że siła tarcia jest związana z energią wewnętrzną, a więc mamy:

$$\sum W_z = -\sum \Delta U,$$

oraz

$$W_f = -U_{\text{wew}}.$$

Wobec tego, równanie (8-19) przyjmuje postać:

$$\sum W_{nz} = \Delta K + \sum \Delta U + U_{\text{wew}}.$$

Dla wszelkich rodzajów W_{nz} zawsze dotąd można było znaleźć nowe postacie energii odpowiadające tej pracy. Możemy zatem przedstawić $\sum W_{nz}$ jako zmianę pewnego rodzaju

energii i zapisać ją po prawej stronie równania. W rezultacie, twierdzenie o pracy i energii możemy zawsze zapisać następująco:

$$0 = \Delta K + \sum \Delta U + U_{\text{wew}} + (\text{zmiana innych form energii}).$$

Innymi słowy, energia całkowita, tzn. suma energii kinetycznej, potencjalnej, wewnętrznej i wszystkich innych rodzajów energii, nie zmienia się. *Energia może być przekształcana z jednej formy w inną, ale nie może być wytwarzana, ani niszczona; energia całkowita jest wielkością stałą.*

Prawo to jest uogólnieniem wynikającym z naszych doświadczeń. Dotychczas nie zaobserwowano w przyrodzie faktów, które byłyby z nim sprzeczne. Prawo to nazywamy *zasadą zachowania energii*. W historii fizyki uczonym często wydawało się, że zasada ta jest fałszywa. Fałszywość ta jednak okazywała się tylko pozorna, a wszystkie wątpliwości co do słuszności tej zasady pobudzały ich tylko do poszukiwania przyczyn zaistniałych rozbieżności. Poszukiwania te zawsze doprowadzały do odkrycia nowych zjawisk towarzyszących oddziaływaniom między ciałami. Wykazano np., że praca wykonana przeciwko siłom tarcia wytwarza energię wewnętrzną. Przy innych oddziaływaniach może być wytwarzana energia w postaci fali głosowej, światła, elektryczności itp. Dlatego pojęcie energii uogólniono tak, aby obejmowało ono i inne formy energii, a nie tylko łatwe do zaobserwowania: energię kinetyczną i energię potencjalną. W ten sposób mechanika ciał znajdujących się w ruchu została związana ze zjawiskami niemechanicznymi, w których ruchu pośrednio nie wykrywamy. Mechanika przeniknęła zatem do wszystkich działów fizyki, a pojęcie energii — do wszystkich nauk przyrodniczych, stając się jednym z najbardziej ogólnych pojęć w fizyce*.

W następnych rozdziałach będziemy badać różne przemiany energii: mechanicznej na wewnętrzną, mechanicznej na elektryczną, jądrowej na wewnętrzną itd. Podczas takich przemian mierzymy zmiany energii na podstawie pracy wykonanej przez działające siły.

Chociaż często korzystamy z zasady zachowania energii kinetycznej i potencjalnej widzimy, że jest ona tylko szczególnym przypadkiem bardziej ogólnej zasady zachowania energii. Energia kinetyczna i potencjalna jest zachowana tylko w przypadku działania sił zachowawczych. Energia całkowita jest zachowana zawsze.

8-9. Masa i energia

Jedną z najważniejszych zasad zachowania w naukach przyrodniczych jest zasada zachowania materii. Z filozoficznego punktu widzenia najwcześniejsze sformułowanie tej ogólnej zasady pochodzi od rzymskiego poety Lukrecjusza — współczesnego Juliuszowi Cezarowi. Sformułowanie tej zasady zostało zamieszczone w słynnym dziele *De Rerum Natura*. Lukrecjusz pisał: „Rzeczy nie mogą powstać z niczego, a gdy zostały stworzone, nie mogą zamienić się w nicosć”. Upłynęło bardzo wiele czasu, zanim ta koncepcja przyjęła się jako trwała zasada naukowa. Podstawowe doświadczenia, potwierdzające tę zasadę, przeprowadził Antoine Lavoisier (1743—1794), który uważany jest za ojca współczesnej

* Patrz: „Concept of Energy in Mechanics” R. B. Lindsay, *The Scientific Monthly*, October 1957.

chemii. W roku 1789 Lavoisier pisał: „Musimy uważać za bezsporny pewnik fakt, że we wszystkich procesach naturalnych i sztucznych nic nie jest tworzone; przed i po eksperymencie istnieje taka sama ilość materii [...] i oprócz zmian i modyfikacji w połączeniach tych pierwiastków nic się nie dzieje.”

Zasada ta, nazwana później *zasadą zachowania masy*, została potwierdzona bardzo dokładnie w chemii i fizyce. Poważne zastrzeżenia co do jej słuszności wniósł Albert Einstein w swoich pracach dotyczących teorii względności. Późniejsze doświadczenia nad szybkimi elektronami i cząstkami jądrowymi potwierdziły jego wnioski.

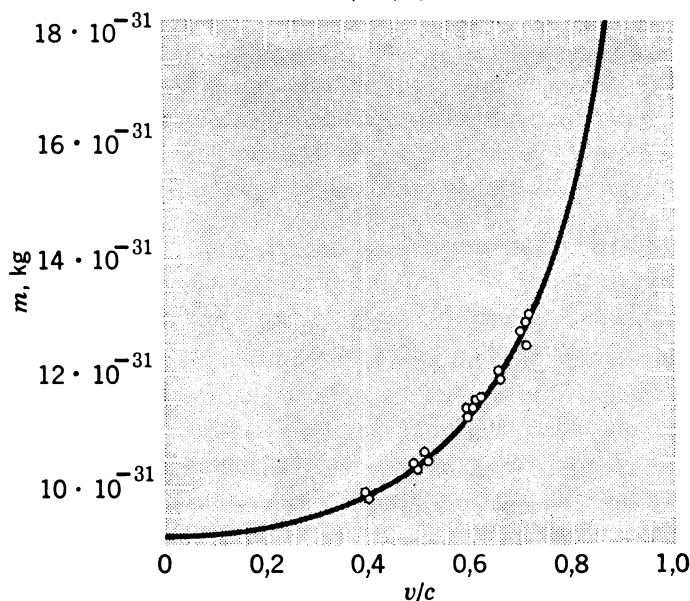
Z odkrycia Einsteina wynika, że jeżeli pewne prawa fizyczne mają zachować klasyczną formę, to masa cząsteczki musi być na nowo zdefiniowana jako

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (8.20)$$

gdzie m_0 — masa cząstki będącej w spoczynku względem obserwatora (nazywamy ją *masą spoczynkową*), m — cząstki znajdującej się w ruchu z prędkością v względem obserwatora, c — prędkość światła mająca stałą wartość równą w przybliżeniu $3 \cdot 10^8$ m/s. Równanie to można potwierdzić doświadczalnie, np. odchylając w polu magnetycznym wiązkę szybkich elektronów i mierząc promień krzywizny ich toru. Pod wpływem siły dośrodkowej pochodzącej od pola magnetycznego ($F = mv^2/r$, gdzie F i v są znane) elektrony będą się poruszać po torach kołowych. Przy zwykłych prędkościach różnica między m i m_0 jest niewykrywalna. Jednakże elektrony mogą być emitowane z jąder promieniotwórczych z prędkościami większymi od 0,9 prędkości światła. W takich przypadkach wyniki pomiarów (rys. 8-8 przedstawia wczesne dane) potwierdzają równanie (8-20).

Wygodnie jest oznaczyć stosunek v/c przez β . Wtedy równanie (8-20) przyjmuje postać:

$$m = m_0(1 - \beta^2)^{-1/2}.$$



Rys. 8-8. Zależność masy elektronu od jego prędkości względem obserwatora. Linia ciągła jest wykresem równania $m = m_0(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Punkty doświadczalnie otrzymali Bucherer i Neumann w 1914. Krzywa dąży do nieskończoności, gdy $v \rightarrow c$

Aby znaleźć energię kinetyczną ciała, obliczamy pracę wykonaną przez siłę wypadkową, utrzymującą ciało w ruchu. W paragrafie 7-5, gdzie założyliśmy niezmiennosć masy m_0 , otrzymaliśmy, że energia kinetyczna

$$K = \int_0^v \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2} m_0 v^2.$$

Przypuśćmy teraz, że zamiast m_0 podstawimy masę zmieniającą się wraz z prędkością, czyli $m = m_0(1 - \beta^2)^{-1/2}$. Stwierdzamy (zadanie 29, rozdział 9), że energia kinetyczna nie jest już określona wzorem $\frac{1}{2}m_0v^2$, lecz wzorem następującym:

$$K = mc^2 - m_0c^2 = (m - m_0)c^2 = \Delta mc^2. \quad (8-21)$$

Energia kinetyczna cząstki jest zatem iloczynem c^2 i przyrostu masy Δm wynikającego z jej ruchu.

Oczekujemy, że przy małych prędkościach wynik relatywistyczny będzie zgodny z wynikiem klasycznym. Korzystając ze wzoru Newtona na rozwinięcie dwumianu, możemy napisać:

$$(1 - \beta^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \frac{5}{16}\beta^6 + \dots$$

Dla małych prędkości $\beta = v/c \ll 1$, zatem możemy się ograniczyć do pierwszych dwóch wyrazów rozwinięcia. Mamy zatem

$$\begin{aligned} K &= (m - m_0)c^2 = m_0c^2[(1 - \beta^2)^{-1/2} - 1] = \\ &= m_0c^2(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \dots - 1) \cong \frac{1}{2}m_0c^2\beta^2 = \frac{1}{2}m_0v^2, \end{aligned}$$

co jest zgodne z wynikiem klasycznym. Widzimy więc, że gdy $K = 0$, wtedy $m = m_0$, jak się tego spodziewaliśmy.

Podstawowa zasada równoważności masy i energii może być rozciągnięta na inne rodzaje energii, nie tylko na energię kinetyczną. Gdy np. ściskamy sprężynę, dostarczając jej energii potencjalnej, masa sprężyny powiększa się od m_0 do $m_0 + U/c^2$. Gdy przedmiotowi dostarczamy ciepła Q , jego masa zwiększa się o Δm , gdzie $\Delta m = Q/c^2$. W ten sposób dochodzimy do *zasady równoważności masy i energii*. Każda ilość dowolnego rodzaju energii E , dostarczona przedmiotowi materialnemu, powoduje zwiększenie jego masy o wartość

$$\Delta m = \frac{E}{c^2}.$$

Jest to słynny wzór Einsteina:

$$E = \Delta mc^2. \quad (8-22)$$

Rzeczywiście, jeżeli masa jest jedną z form energii, to możemy utrzymywać, że ciało w spoczynku ma energię m_0c^2 . Nazywamy ją *energiją spoczynkową ciała*. Dla układu zamkniętego zasada zachowania energii, uogólniona przez Einsteina, przyjmuje postać:

$$\sum (m_0c^2 + \mathcal{E}) = \text{const}$$

albo

$$\Delta \left(\sum m_0c^2 + \sum \mathcal{E} \right) = 0,$$

gdzie $\sum m_0c^2$ — całkowita energia spoczynkowa, $\sum \mathcal{E}$ — suma *wszystkich innych* rodzajów energii. Einstein pisał: „Fizyka przedrelatywistyczna знаła dwie zasady zachowania o pod-

stawowym znaczeniu: zasadę zachowania energii i zasadę zachowania masy; obie te zasady wydawały się całkowicie niezależne od siebie. Teoria względności połączyła je w *jedną zasadę*”.

Ponieważ czynnik c^2 jest bardzo duży, więc nie powinniśmy oczekiwać możliwości wykrycia zmiany masy w zwykłych doświadczeniach mechanicznych. Aby nastąpiła zmiana masy o 1 g, wymagany jest wzrost energii o $9 \cdot 10^{13}$ J. Jednakże, gdy masa cząstki początkowo jest zupełnie mała, a w miarę wzrostu energii powiększa się, to względna zmiana masy może być łatwo zauważalna. Zachodzi to w zjawiskach jądrowych, gdzie nie ma zastosowania mechanika klasyczna, a słuszność mechaniki relatywistycznej doskonale się potwierdza.

Pięknym przykładem zamiany energii między masą spoczynkową i innymi jej formami jest zjawisko anihilacji i wytwarzania par. W zjawisku tym negaton i pozyton, elementarne cząstki materii różniące się tylko znakiem ładunku elektrycznego, mogą się połączyć i całkowicie zniknąć. Na ich miejsce pojawia się wysokoenergetyczne promieniowanie, zwane promieniowaniem γ , którego energia jest dokładnie równa sumie mas spoczynkowych i energii kinetycznych zanikających cząstek. Proces ten jest odwracalny, tzn. w określonych warunkach wysokoenergetyczny foton promieniowania znika, a na jego miejsce pojawia się para negaton-pozyton o energii całkowitej (masa spoczynkowa + energia kinetyczna) równej energii niesionej przez zanikający foton.

Przykład 8. Rozważmy przykład ilościowy. W skali mas atomowych jednostka masy wynosi około $1,66 \cdot 10^{-27}$ kg. W skali tej masa spoczynkowa protonu (jądro atomu wodoru) wynosi 1,00731, a masa spoczynkowa neutronu (obojętna cząstka wchodząca w skład wszystkich jąder z wyjątkiem jądra wodoru) wynosi 1,00867. Deuteron (jądro ciężkiego wodoru) składa się, jak wiadomo, z neutronu i protonu. Masa spoczynkowa deuteronu wynosi 2,01360, czyli jest mniejsza od sumy mas spoczynkowych neutronu i protonu o 0,00238 jednostki masy atomowej. Różnica ta jest równoważna energii

$$E = \Delta mc^2 = 0,00238 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot (3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 = 3,57 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 2,22 \cdot 10^6 \text{ eV}.$$

Kiedy neutron i proton łącząc się tworzą deuteron, wtedy dokładnie taka ilość energii wyzwała się w postaci promieniowania γ . Podobnie taka sama ilość energii musi być *dostarczona*, aby rozbić deuteron na proton i neutron. Energię tę nazywamy *energią wiązania deuteronu*.

Pytania

1. Wyjaśnić, dlaczego drogi w górach na ogół nie przebiegają po linii prostej od podnóża góry do jej szczytu, lecz są kręte.
2. Czy w przypadku, gdy samochód porusza się ze stałą prędkością po poziomej i prostej drodze, jest wykonywana praca nad samochodem?
3. Samochód o masie m jedzie z prędkością v po autostradzie. Kierowca naciska hamulec i samochód hamuje, aż do całkowitego zatrzymania. W jakiej formie pojawia się utracona energia kinetyczna samochodu?
4. W powyższym pytaniu, przyjąć, że kierowca „pompuje” hamulec w taki sposób, że samochód nie ślizga się. W jakiej formie pojawia się utracona energia kinetyczna samochodu w takim przypadku?
5. Samochód, znajdujący się początkowo w stanie spoczynku, przyspiesza do prędkości v , w taki sposób, że koła nie ślizgają się po powierzchni drogi. Skąd pochodzi energia kinetyczna samochodu? W szczególności, czy jest prawdą, że dostarcza jej praca wykonana nad samochodem przez (statyczną) siłę tarcia, jaką droga wywiera na samochód?
6. Jeżeli nie trzeba wykonywać pracy, aby utrzymać w rękach ciężki przedmiot, to dlaczego jest to jednak męczące?
7. Co dzieje się z energią potencjalną, którą winda traci zjeżdżając z najwyższego piętra budynku na parter?

8. W przykładzie 2 (zob. rys. 8-5) twierdziliśmy, że prędkość przy podstawie w ogóle nie zależy od kształtu powierzchni. Czy byłoby to prawdziwe w przypadku występowania tarcia?

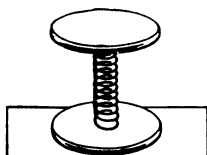
9. Podać przykłady na stan równowagi nietrwałej, obojętnej i trwałej.

10. Posługując się pojęciami pracy i energii wyjaśnić jak się to dzieje, że możliwe jest rozhuśtanie huśtawki z położenia równowagi do dużych wychyleń bez pomocy z zewnątrz. (Patrz: „How to Make a Swing Go” R. V. Hesheth, *Physics Education*, July 1975).

11. Wahadło będące w ruchu ostatecznie zatrzymuje się. Czy jest to pogwałcenie prawa zachowania energii?

12. Pewien artykuł naukowy („The Energetic Cost of Moving About” V. A. Tucker, *American Scientist*, July–August 1975) stanowczo stwierdza, że chodzenie i bieganie są niezwykle mało wydajnymi formami poruszania się. Znacznie większą wydajność osiągają ptaki, ryby i rowerzyści. Jak można to wytłumaczyć?

13. Dwa krążki są połączone przy pomocy sztywnej sprężyny. Przy użyciu dostatecznie dużej siły górny krążek zostaje naciśnięty ku dołowi, a następnie działająca siła zostaje usunięta. Czy jest możliwe, aby górny krążek odskakując do tyłu spowodował uniesienie ze stołu dolnego krążka (zob. rys. 8-9)? Czy energia mechaniczna w takim przypadku może być zachowana?



Rys. 8-9. Pytanie 13

14. W przypadku pracy wykonanej przeciwko sile tarcia ilość wytworzonego ciepła jest niezależna od prędkości obserwatora (lub inercjalnego układu odniesienia). Innymi słowy, różni obserwatorzy wyznaczyliby takie same ilości energii mechanicznej przekształconej na ciepło w wyniku tarcia. Jak można to wyjaśnić, biorąc pod uwagę, że tacy obserwatorzy, na ogół, mierzą różne ilości całkowitej wykonanej pracy i różne zmiany energii kinetycznej (zob. zadanie 21, rozdział 7)?

15. Czy wszystkie siły niezachowawcze muszą rozpraszać energię, tak jak tarcie? Czy $\sum W_{nz}$ w zasadzie może wynosić więcej niż zero?

16. Zauważono, że pewne ciało rzucone w dół odbiło się na wysokość półtora raza większą od wysokości, z której je rzucono. Jaki wniosek wynika z tej obserwacji?

17. Kierowca samochodu jadący z prędkością v dostrzega nagle, bezpośrednio przed sobą w odległości d , mur ceglany. Jaką powinien podjąć decyzję w celu uniknięcia zderzenia, czy nacisnąć hamulec, czy też wykonać ostry skręt? (*Wskazówka*: wziąć pod uwagę siłę potrzebną w każdym przypadku.)

18. Jeżeli ściśniętą w sposób trwały sprężynę umieścimy w odpowiednim kwasie, ulegnie ona rozpuszczeniu. Co się stanie ze zmagazynowaną w sprężynie energią potencjalną?

Zadania

Paragraf 8-3

1. Na ciało poruszające się wzdłuż osi x działa siła odpychająca $F = kx$, powodując jego ruch. (a) Znaleźć funkcję energii potencjalnej $U(x)$ dla tego ruchu oraz napisać dla tego przypadku prawo zachowania energii. (b) Opisać ruch tego układu i pokazać, że ruch ten jest przykładem ruchu ciała znajdującego się w pobliżu położenia równowagi nietrwałej.

Odp.: (a) $-kx^2/2$.

2. Między dwiema cząstkami o masach m_1 i m_2 działa siła przyciągania wyrażona wzorem:

$$F = k \frac{m_1 m_2}{x^2},$$

gdzie k jest pewną stałą, a x odległością między cząstkami. Znaleźć: (a) funkcję energii potencjalnej, (b) pracę potrzebną do zwiększenia odległości między tymi cząstkami od $x = x_1$ do $x = x_1 + d$.

3. Na stole jest przytrzymywany łańcuch, przy czym jedna piąta całej jego długości zwisa w dół. Nie

uwzględniając tarcia łańcucha o stół, obliczyć pracę, jaką trzeba wykonać, aby całkowicie wciągnąć łańcuch na stół. Przyjąć, że masa łańcucha wynosi m , a jego długość l .

Odp.: $mg l/50$.

Paragraf 8-4

4. Dwugramowa moneta leży na pionowo ustawionej sprężynie spiralnej. Monetę popchnięto w dół tak, że sprężyna skróciła się o 1,0 cm. Stały współczynnik sprężystości dla tej sprężyny wynosi 40 N/m. Jak wysoko moneta się wzniesie ponad położenie pierwotne po zwolnieniu sprężyny?

5. Stukilogramowy człowiek wyskoczył z okna na sieć ratunkową znajdującą się 15 m poniżej. Pod jego ciężarem sieć rozciągnęła się o 3 m zanim osiągnął punkt najniższy, a następnie wyrzuciło go w powietrze z powrotem. Jaka jest energia potencjalna rozciągniętej sieci jeżeli nie ma rozproszenia energii przez siły niezachowawcze?

Odp.: 1800 kG·m.

6. Kłosek o masie 2 kg spada z wysokości 0,40 m na sprężynę o współczynniku sprężystości $k = 1960$ N/m. W wyniku tego sprężyna zostanie ściśnięta. Obliczyć maksymalną wartość zmiany długości sprężyny (pominąć tarcie).

7. Wykazać, że jeżeli rzuty ukośne charakteryzują się jednakowymi prędkościami początkowymi v_0 , to pomimo że kąty wyrzutu są różne, prędkości v na tych samych poziomach są jednakowe i nie zależą od kąta wyrzutu.

8. Stwierdzono, że pewna sprężyna nie podlega prawu Hooke'a. Jeżeli jest ona rozciągnięta na odległość x (w metrach), to siła (w niutonach), którą wywiera w kierunku przeciwnym do rozciągnięcia, wyraża się wzorem: $52,8x + 38,4x^2$. (a) Obliczyć całkowitą pracę potrzebną do rozciągnięcia sprężyny od położenia $x = 0,50$ do $x = 1,00$ m. (b) Po zamocowaniu jednego końca sprężyny do drugiego przyczepiono ciało o masie $m = 2,17$ kg i wtedy sprężyna ulega rozciągnięciu o $x = 1,00$ m. Następnie ciało zostało uwolnione i zaczęło się poruszać; obliczyć jego prędkość w chwili, gdy rozciągnięcie wracającej do stanu początkowego sprężyny wynosi $x = 0,50$ m. (c) Wyjaśnić, czy siła wywierana przez sprężynę jest zachowawcza czy niezachowawcza.

9. Utrzymuje się, że wielkie drzewa wyparowują dziennie około 910 kg wody. (a) Przyjmując, że przeciętny poziom wzniesienia wody wynosi 9,1 m, obliczyć, ile energii trzeba zużyć, aby tego dokonać? (b) Ile będzie wynosiła przeciętna moc, przyjąwszy, że parowanie trwa 12 godzin dziennie?

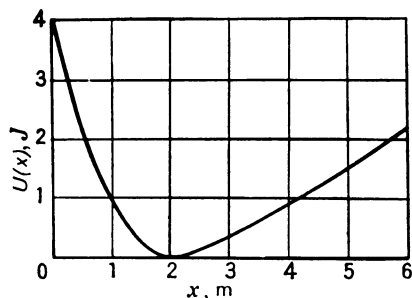
Odp.: (a) $2,3 \cdot 10^{-2}$ kWh; (b) 1,9 W.

10. Do pionowo zawieszanej sprężyny przytwierdzono ciało, które opuszczono do położenia równowagi, co spowodowało wydłużenie sprężyny o d . Obliczyć maksymalne wydłużenie sprężyny, jeżeli temu ciału po przytwierdzeniu go do sprężyny pozwolono swobodnie opaść w dół.

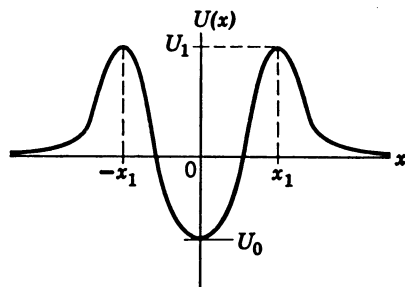
11. Ciało będące początkowo w spoczynku spada z wysokości h . Ustalić energię kinetyczną i potencjalną ciała jako funkcję (a) czasu i (b) wysokości. Narysować wykres tych funkcji i wykazać, że ich suma, energia całkowita, jest stała w każdym przypadku.

Paragraf 8-5

12. Cząstka porusza się wzdłuż linii prostej w obszarze, w którym jej energia potencjalna zmienia się tak, jak pokazano na rys. 8-10. (a) Naszkicować w tej samej skali na osi odciętych siłę $F(x)$ działającą na tę cząstkę. Wskazać na wykresie przybliżoną skalę dla $F(x)$. (b) Naszkicować wykres energii kinetycznej cząstki, jeżeli ma ona stałą energię całkowitą równą 4,0 J. Wskazać skalę liczbową na osi $K(x)$.



Rys. 8-10. Zadanie 12

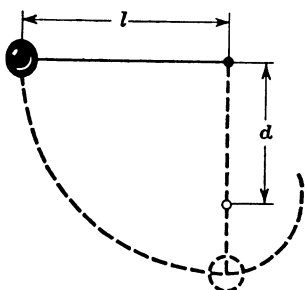


Rys. 8-11. Zadanie 13

13. Cząstka α (jądro helu) znajdująca się w dużym jądrze jest w nim utrzymywana przez potencjał, którego kształt jest podany na rys. 8-11. (a) Znaleźć funkcję zmiennej x , która miałaby w przybliżeniu ten kształt i wartość minimalną U_0 dla $x = 0$ oraz maksymalną U_1 dla $x = x_1$ i $x = -x_1$. (b) Wyznaczyć siłę oddziaływania cząstki α z jądrem jako funkcję x . (c) Opisać, jakie ruchy są możliwe w tym układzie.

Paragraf 8-6

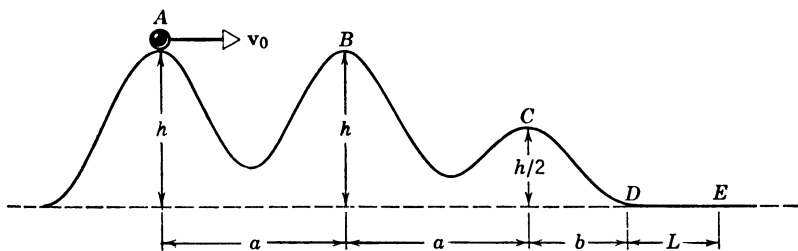
14. Wahadło przedstawione na rys. 8-12 ma długość $l = 4$ m. Po uwolnieniu kulka wahadła porusza się w dół po łuku zaznaczonym linią przerywaną. Obliczyć prędkość kulki w chwili, gdy znajduje się ona w najniższym punkcie toru.



Rys. 8-12. Zadania: 14, 27, 30

15. Rysunek 8-13 przedstawia profil doskonale gładkiego toru karkołomnej kolejki. W punkcie A rozpoczyna się ruch wagonu o masie m , z prędkością v_0 . Zakładamy, że wagon może być traktowany jako punkt materialny oraz że pozostanie on zawsze na torze. (a) Jaka prędkość będzie miał wagon w punktach B i C? (b) Jakie opóźnienie jest potrzebne w celu zatrzymania wagonu w punkcie E, jeżeli w punkcie D zostały włączone hamulce?

Odp.: (a) $v_B = v_0$; $v_C = \sqrt{v_0^2 + gh}$; (b) $(v_0^2 + 2gh)/2L$.



Rys. 8-13. Zadanie 15

16. Jaka siła odpowiada energii potencjalnej $U = -ax^2 + bxy + z$?

17. Energia potencjalna, odpowiadająca pewnemu dwuwymiarowemu polu sił, wyraża się wzorem:

$$U(x, y) = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2).$$

(a) Wyznaczyć F_x i F_y oraz przedstawić wektor siły w każdym punkcie przy pomocy współrzędnych x i y .
(b) Znaleźć F_r i F_θ oraz przedstawić wektor siły w każdym punkcie przy pomocy współrzędnych biegunowych r i θ tego punktu. (c) Czy można obmyślić fizyczny model takiej siły?

Odp.: (a) $F_x = -kx$; $F_y = -ky$, $\mathbf{F}$ skierowana do początku układu. (b) $F_r = -kr$; $F_\theta = 0$.

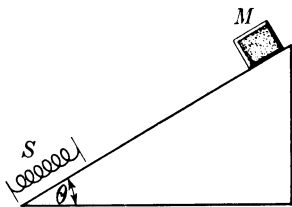
18. Tak zwany potencjał Yukawy:

$$U(r) = -\frac{r_0}{r} U_0 e^{-r/r_0}$$

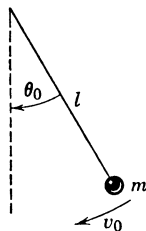
opisuje dość dokładnie oddziaływania między nukleonami (tzn. neutronami i protonami, które są składnikami jądra). Stała r_0 wynosi około $1,5 \cdot 10^{-15}$ m, a stała U_0 wynosi około 50 MeV. (a) Znaleźć odpowiednie wyrażenie na siłę przyciągania. (b) Aby wykazać jej krótki zasięg, obliczyć stosunek wartości tej siły dla $r = 2r_0$, $4r_0$, $10r_0$ do jej wartości dla $r = r_0$.

19. Idealna nieważka sprężyna S może być ściśnięta o 1,0 m pod wpływem siły 100 N. Ta sama sprężyna została umieszczona przy podstawie doskonale gładkiej równi pochyłej, która tworzy z poziomem kąt $\theta = 30^\circ$ (zob. rys. 8-14). Ciało o masie $M = 10$ kg, pozostające początkowo w spoczynku na szczycie równi, zostaje zwolnione i ześlizguje się w dół. Ciało to zatrzymuje się natychmiast po ściśnięciu sprężyny o 2,0 m. (a) Jaką odległość przebywa ślizgające się ciało do chwili zatrzymania? (b) Jaką prędkość ma to ciało bezpośrednio przed zetknięciem się ze sprężyną?

Odp.: (a) 4,1 m; (b) 4,5 m/s.



Rys. 8-14. Zadanie 19



Rys. 8-15. Zadanie 22

20. Siłę przyciągania między dodatnim jądrem wodoru a jego ujemnym elektronem można wyrazić wzorem:

$$F = k \frac{e^2}{r^2},$$

gdzie e jest ładunkiem elektronu, k pewną stałą, a r odległością między elektronem i jądrem. Załóżmy, że jądro jest nieruchome. Początkowo elektron porusza się po orbicie kołowej o promieniu R_1 dookoła jądra, później nagle przeskakuje na orbitę kołową o promieniu R_2 , znajdującą się bliżej jądra. (a) Obliczyć zmianę energii kinetycznej elektronu, stosując drugą zasadę Newtona. (b) Obliczyć, jak zmieni się energia potencjalna atomu, wykorzystując zależność między siłą a energią potencjalną. (c) Pokazać, jak zmieni się całkowita energia atomu po tym przeskoku. (Energia ta jest wysłana poza atom w postaci promieniowania.)

21. Wahadło matematyczne, utworzone z lekkiego sztywnego pręta o długości l i z ciała o masie m przymocowanego do końca tego pręta, ustawiono tak, aby to ciało zajmowało najwyższe położenie, po czym je puszczono. (a) Obliczyć prędkość v ciała oraz (b) naprężenie T , działające na punkt zawieszenia w chwili, gdy znajduje się ono w najniższym położeniu. (c) Następnie to samo wahadło ustawiono w położeniu poziomym i puszczono. Pod jakim kątem, licząc od pionu, wahadło będzie się znajdowało w chwili, gdy siła działająca na punkt zawieszenia będzie się równała ciężarowi ciała?

Odp.: (a) $2\sqrt{gl}$; (b) $5mg$ (c) 71° .

22. Wahadło matematyczne, przedstawione na rys. 8-15 składa się z nici o długości l i kulki o masie m . W chwili gdy kulka ma prędkość v_0 , nić wahadła tworzy z pionem kąt θ_0 ($0 < \theta_0 < \pi/2$). Przy pomocy g oraz przy pomocy podanych wyżej wielkości określić: (a) prędkość v_1 kulki w jej najniższym położeniu; (b) najmniejszą wartość prędkości v_2 , którą mogłaby mieć prędkość v_0 , aby nić podczas ruchu osiągnęła położenie poziome; (c) prędkość v_3 taką, że jeżeli $v_0 > v_3$, to wahadło nie będzie wykonywało drgań, lecz będzie poruszało się w sposób ciągły po okręgu koła w płaszczyźnie pionowej.

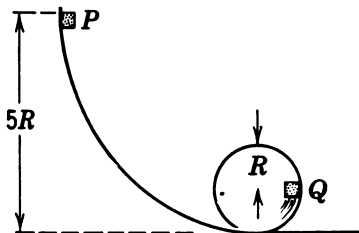
23. Wykonano proste wahadło, przywiązując kamień 2 kg do sznurka 4 m. Nadając ruch wahadłu kamień rzucono w górę, prostopadłe do sznurka, gdy sznurek tworzył z pionem kąt 60° . Kamień przechodzi przez najniższy punkt z prędkością 8 m/s. (a) Jaka jest prędkość kamienia w momencie jego puszczenia? (b) O jaki największy kąt względem pionu wychyli się wahadło? (c) Przyjmując, że w najniższym swoim położeniu wahający się ciężarek ma zerową grawitacyjną energię potencjalną obliczyć całkowitą energię mechaniczną układu.

Odp.: (a) 5,0 m/s; (b) 80° ; (c) 64 J.

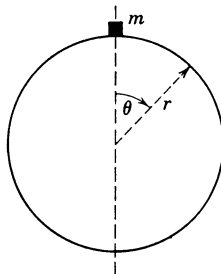
24. Po torze wygiętym, tak jak na rys. 8-16 (pętla), zsuwa się bez tarcia ciało o masie m . (a) Obliczyć siłę działającą na to ciało w punkcie Q , jeżeli zaczyna się ono zsuwać z punktu P . (b) Z jakiej wysokości ciało musi się zsunąć, aby siła, którą wywiera ono na tor w najwyższym punkcie pętli, była równa ciężarowi tego ciała?

25. Punkt materialny o masie m , znajdujący się początkowo w spoczynku, zaczyna się ześlizgiwać po doskonale gładkiej powierzchni kuli o promieniu r (rys. 8-17). Kąt należy mierzyć od pionu a energię potencjalną — względem wierzchołka. Określić: (a) zmianę energii potencjalnej punktu w zależności od kąta; (b) energię kinetyczną jako funkcję kąta; (c) przyspieszenie dośrodkowe i styczne jako funkcję kąta; (d) kąt, przy którym punkt materialny odpadnie od kuli.

Odp.: (a) $-mgr(1-\cos\theta)$; (b) $mgr(1-\cos\theta)$; (c) $2g(1-\cos\theta)$; $g\sin\theta$; (d) $\arccos 2/3$.



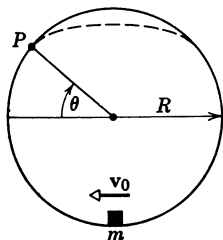
Rys. 8-16. Zadanie 24



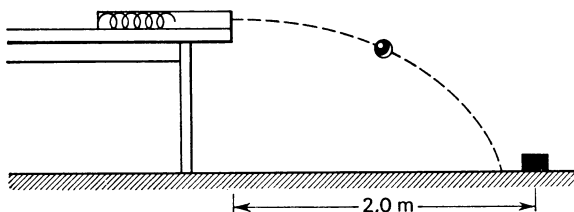
Rys. 8-17. Zadanie 25

26. Częstka o masie m porusza się po pionowym okręgu o promieniu R , po wewnętrznej stronie toru (rys. 8-18). Tarcie nie występuje. Gdy częstka znajduje się w najniższym położeniu, jej prędkość wynosi v_0 . (a) Jaka powinna być minimalna wartość v_m prędkości v_0 , z którą częstka będzie zdolna wykonać pełny obrót, nie tracąc kontaktu z torem? (b) Przypuśćmy, że v_0 wynosi $0,775v_m$. Częstka będzie się wznosiła po torze do pewnego punktu P , w którym utraci kontakt z torem i będzie się poruszała po drodze zaznaczonej, w przybliżeniu, przerywaną linią. Wyznaczyć położenie katowe θ punktu P .

27. Gwóźdź na rys. 8-12 jest umieszczony w odległości d poniżej zawieszenia. Wykazać, że d musi być równe przynajmniej $0,6l$, jeżeli kulka ma się poruszać po torze kołowym, w którego środku znajduje się gwóźdź i ma zatoczyć pełne koło.



Rys. 8-18. Zadanie 26



Rys. 8-19. Zadanie 28

28. Dwoje dzieci bawi się w grę, w której należy trafić do małego pudełka kulka ze sprężynowego pistoletu umieszczonego na doskonale gładkim stole (rys. 8-19). Jedno dziecko ścisną sprężynę o 1 cm i kulka upada 20 cm przed pudełkiem, które jest w poziomie oddalone o 2 m od brzegu stołu. Jak powinno ścisnąć tę sprężynę drugie dziecko, aby ta sama kulka wpadła do pudełka?

29. Schody ruchome łączą dwa piętra odległe od siebie o 7,6 m. Długość schodów wynosi 12 m, a ich prędkość poruszania się 0,61 m/s. (a) Jaka moc wyzwala silnik napędzający schody, jeżeli w ciągu minuty przewozi się 100 osób o średniej masie 73 kg każda? (b) Człowiek o ciężarze 710 N wspina się po schodach, będących w ruchu, z dolnego piętra na górne w ciągu 10 s. Jaka pracę, związaną z przesunięciem człowieka, wykonuje w tym przypadku silnik? (c) Jeżeli człowiek, będąc w połowie wysokości schodów, zawróci i zacznie schodzić w dół z taką prędkością, że jego położenie nie ulegnie zmianie w przestrzeni, to czy silnik w związku z tym będzie wykonywał pracę? Jeżeli tak, to jaką moc wyzwoli silnik, aby tę pracę wykonać? (d) Czy jest jakiś (inny?) sposób, w jaki człowiek mógłby poruszać się po ruchomych schodach bez pobierania mocy z silnika?

Odp.: (a) 9100 W; (b) 2700 J.

30. Przypuśćmy, że sznur wahadła przedstawionego na rys. 8-12 jest bardzo elastyczny, np. wykonany z gumy, oraz że w chwili uwolnienia kulki jest on nierozciągnięty i ma długość l . (a) Wyjaśnić, dlaczego należałoby oczekiwać, że kulka po osiągnięciu dolnego położenia będzie znajdowała się w odległości większej od l , licząc od punktu zawieszenia. (b) Wykazać, stosując rozważania dynamiczne i energetyczne, że jeżeli Δl jest małe w porównaniu z l , to sznur będzie rozciągnięty o $\Delta l = 3mg/k$, gdzie k jest współczynnikiem sprężystości sznura. Zwrócić uwagę na to, że im większe jest k , tym mniejsze Δl oraz tym lepsze przybliżenie $\Delta l \ll l$. (c) Wykazać przy tych samych warunkach, że prędkość kulki w dolnym położeniu wynosi $v = \sqrt{2g(l - 3mg/2k)}$ i jest mniejsza od prędkości, którą miałaby ta kulka w przypadku sznura nieelastycznego ($k = \infty$). Podać fizyczne wyjaśnienie tego wyniku stosując rozważania energetyczne.

Paragraf 8-7

31. Dwa szczyty pokryte śniegiem: 3500 m n.p.m. i 3400 m n.p.m. są oddzielone doliną. Trasa narciarska biegnie od szczytu wyższego do szczytu niższego, a jej całkowita długość wynosi 3000 m. (a) Narciarz zaczyna jazdę ze szczytu wyższego. Z jaką prędkością dojedzie on do szczytu niższego, jeżeli będzie jechał jak najszybciej, nie próbując zwolnić? Pominąć tarcie. (b) Oszacuj w przybliżeniu, jaki musi być współczynnik tarcia śniegu, aby narciarz bez przeszkód dojechał do niższego szczytu?

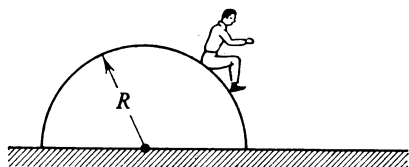
Odp.: (a) 44 m/s; (b) W przybliżeniu 1/10.

32. Pocisk o masie 9,4 kg został wystrzelony prosto do góry z prędkością początkową 470 m/s. O ile wyżej dotarłby pocisk, gdyby opór powietrza nie rozproszył energii $6,8 \cdot 10^5$ J?

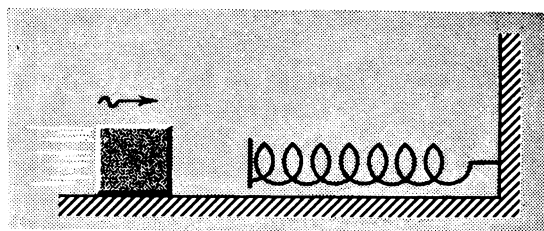
33. Wykazać, że w danej chwili szybkość zmniejszania się energii mechanicznej układu początkowo zachowawczego, poruszającego się z tarcie, jest równa iloczynowi siły tarcia i prędkości układu w tej chwili, czyli

$$\frac{d}{dt}(K + U) = -fv.$$

34. Chłopiec siedzi na szczycie półkulistej bryły lodu (rys. 8-20). Został lekko pchnięty i zaczął ześlizgiwać się w dół. (a) Wykazać, że spadnie z lodu w punkcie, którego wysokość wynosi $2R/3$, jeżeli lód jest doskonale gładki. (b) Jeżeli występuje tarcie między lodem a chłopcem, to czy spadnie on z większej czy z mniejszej wysokości niż w (a)?



Rys. 8-20. Zadanie 34



Rys. 8-21. Zadanie 35

35. Sprężyna o współczynniku sprężystości 2 N/m, której masę pomijamy, umocowana jest poziomo (rys. 8-21). Ze sprężyną tą zderza się ciało o masie 1 kg powodując jej ściśnięcie o 4 m, licząc od położenia równowagi. Obliczyć prędkość, którą ma ciało w chwili zderzenia się, jeżeli współczynnik tarcia kinetycznego między ciałem a poziomą powierzchnią, po której się poruszało, równy jest 0,25.

Odp.: 7,2 m/s.

36. Na szczycie równi pochyłej o długości l i kącie nachylenia do poziomu θ znajduje się ciało o masie m , które zaczyna zsuwać się w dół. (a) Przyjmując, że współczynnik tarcia wynosi μ , obliczyć prędkość ciała przy podstawie równi. (b) Po zsunięciu się z równi pochyłej ciało przesuwa się na pewną odległość d po takiej samej powierzchni, lecz ustawionej poziomo. Obliczyć tę odległość. Rozwiązać powyższe zadanie stosując zasadę zachowania energii oraz powtórzyć rozwiązanie korzystając z zasad Newtona.

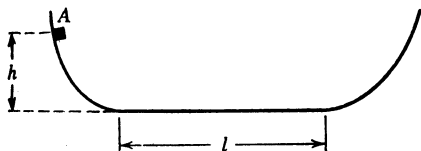
37. Kłosek 4 kg sunie do góry 30° równi pochyłej z początkową energią kinetyczną 128 J. Do którego punktu równi dotrze ów kłosek, jeżeli współczynnik tarcia wynosi 0,30?

Odp.: 4,3 m.

38. Ciało 20 kG jest pchane przez poziomą siłę F w górę doskonale gładkiej 30° równi pochyłej o długości 3 m. (a) Jeżeli prędkość u dołu wynosi 0,6 m/s, a u góry 3 m/s, jaką pracę wykonała siła F ? (b) Jaka jest wartość siły F ? (c) Przyjąć, że równia nie jest doskonale gładka i że $\mu_k = 0,15$. Do jakiego punktu równi dojdzie ciało?

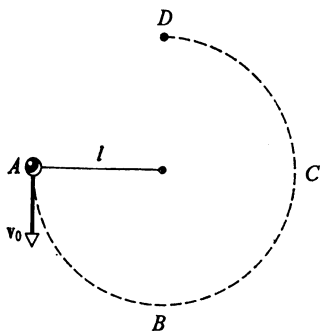
39. Ciało ślizga się wzdłuż toru o podniesionych końcach i płaskiej części środkowej, jak to pokazano na rys. 8-22. Część płaska ma długość $l = 2,0$ m. Wygięte części toru są doskonale gładkie. Dla części płaskiej współczynnik tarcia kinetycznego wynosi $\mu_k = 0,20$. Ciało zostaje puszczane w punkcie A, znajdującym się na wysokości $h = 1,0$ m ponad płaską częścią toru. Gdzie ostatecznie ciało się zatrzyma?

Odp.: W środku płaskiej części.

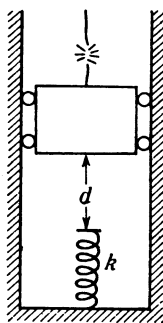


Rys. 8-22. Zadanie 39

40. Do jednego końca lekkiego sztywnego pręta o długości l doczepiona jest kulka o masie m (rys. 8-23). Drugi koniec umocowany jest na idealnie gładkim czopie w taki sposób, że kulka porusza się po pionowym kole. Układ puszczono w dół z pozycji poziomej A nadając mu prędkość początkową v_0 . Kulka dochodzi do punktu D i zatrzymuje się. (a) Otrzymać wzór na v_0 używając l , m , g . (b) Jakie jest napięcie pręta, gdy kulka znajduje się w punkcie B? (c) W czopie umieszczono ziarnko piasku, po czym kulka dochodzi do punktu C, puszczona w punkcie A z tą samą prędkością jak poprzednio. Jaką pracę wykonuje tarcie podczas tego ruchu? (d) Jaką pracę całkowitą wykona tarcie zanim kulka ostatecznie zatrzyma się w punkcie B po ustaniu ruchu wahadłowego?



Rys. 8-23. Zadanie 40



Rys. 8-24. Zadanie 41

41. Gdy winda o ciężarze 1800 kG znajduje się w spoczynku na pierwszym piętrze, następuje zerwanie liny (rys. 8-24). W chwili wypadku podłoga windy znajduje się w odległości $d = 3,5$ m ponad sprężyną amortyzującą o współczynniku sprężystości $k = 15$ kG/m. Dzięki włączeniu się urządzenia zabezpieczającego pojawia się stała siła tarcia o wartości 450 kG, która przeciwstawia się ruchowi windy. (a) Znaleźć prędkość windy tuż przed uderzeniem w sprężynę. (b) Znaleźć odległość s , o jaką sprężyna zostanie ściśnięta. (c) Znaleźć odległość, na jaką winda „odskoczy” z powrotem do góry. (d) Stosując zasadę zachowania energii, znaleźć całkowitą drogę, którą przebędzie winda do chwili zatrzymania się. Dlaczego odpowiedź nie jest dokładna?

Odp.: (a) 7 m/s; (b) 0,875 m; (c) 2,625 m; (d) 14,3 m.

Paragraf 8-9

42. Dioda próżniowa zawiera cylindryczną anodę otaczającą cylindryczną katodę. Katoda emituje elektrony, mające prędkość początkową równą zero, oraz energię potencjalną względem anody $4,8 \cdot 10^{-16}$ J. Przypuśćmy, że elektron nie ulega zderzeniom oraz że siłę grawitacji możemy pominąć. (a) Jaką energię kinetyczną będzie miał elektron w chwili zderzenia z anodą? (b) Przyjąć, że masa elektronu wynosi $9,1 \cdot 10^{-31}$ kg i obliczyć jego prędkość końcową. (c) Czy są podstawy do stosowania w tym przypadku klasycznych wyrażań na energię kinetyczną i masę, zamiast wyrażań relatywistycznych?

43. Obliczyć prędkość elektronu mającego energię kinetyczną: (a) 100 000 eV; (b) 1 000 000 eV.

Odp.: (a) $1,6 \cdot 10^8$ m/s; (b) $2,8 \cdot 10^8$ m/s.