

17. Statyka płynów

17-1. Płyny

Z makroskopowego punktu widzenia powszechnie przyjęty jest podział materii na ciała stałe i płyny. *Płynem* jest substancja, która może *płynąć*. Tak więc pojęcie płyn obejmuje zarówno ciecze, jak i gazy. Klasyfikacja taka nie zawsze jest wystarczająco precyzyjna. Niektóre płyny, takie jak szkło lub smoła, płyną tak wolno, że w przedziałach czasu, w jakich zwykle mamy z nimi do czynienia, zachowują się jak ciała stałe. Plazma, która jest silnie zjonizowanym gazem, nie daje się łatwo zaliczyć do żadnej z tych kategorii; nazywana jest często „czwartym stanem skupienia materii” — dla odróżnienia od stanu stałego, ciekłego i gazowego. Nawet zróżnicowanie między cieczą i gazem nie jest precyzyjne, gdyż, zmieniając odpowiednio ciśnienie i temperaturę, można przeprowadzić ciecz (np. wodę) w gaz (np. parę wodną) bez pojawiania się powierzchni swobodnej i bez wrzenia; podczas tego procesu gęstość i wilgotność zmieniają się w sposób ciągły*. W tekście tym będziemy jednak definiowali płyn tak, jak jest on zazwyczaj rozumiany i będziemy interesowali się tylko tymi właściwościami płynów, które związane są z ich zdolnością do płynięcia. W związku z tym, te same prawa podstawowe kontrolują statyczne i dynamiczne zachowanie zarówno cieczy, jak i gazów, bez względu na obserwowane przez nas w normalnych ciśnieniach różnice między nimi.

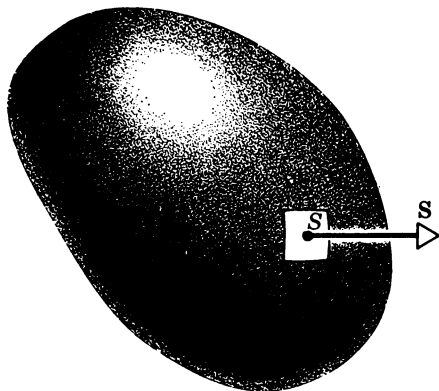
Dla ciał stałych, mających określone rozmiary i kształt, sformułowaliśmy poprzednio mechanikę ciał sztywnych zmodyfikowaną przez prawa sprężystości dla ciał nie będących idealnie sztywnymi. Do rozwiązywania zagadnień z mechaniki płynów musimy rozwinąć nowy formalizm, ponieważ płyny łatwo zmieniają swój kształt, a w przypadku gazów przyjmują objętość równą objętości naczynia, w którym są zamknięte. Nasze zastosowania mechaniki do ośrodków ciągłych, zarówno ciał stałych, jak i płynów, opierają się na zasadach dynamiki Newtona połączonych z odpowiednimi prawami opisującymi siły. Jednakże zarówno dla płynów, jak i dla ciał stałych okazuje się wygodne sformułowanie tych podstawowych praw w szczególnie sposób.

* Muszą być przy tym użyte ciśnienia wyższe niż tzw. ciśnienie krytyczne; dla H_2O ciśnienie krytyczne wynosi 218 atmosfer.

17-2. Ciśnienie i gęstość

Występuje pewna różnica w działaniu siły powierzchniowej na płyn i na ciało stałe. Dla ciała stałego nie ma żadnego ograniczenia na kierunek tej siły, natomiast dla nieruchomego płynu siła powierzchniowa musi być zawsze prostopadła do powierzchni płynu. Dzieje się tak dlatego, że spoczywający płyn nie może równoważyć siły stycznej; warstwy płynu, na które działa taka siła, ślizgałyby się po prostu po sobie. Ta niezdolność płynów do równoważenia sił stycznych (czy też naprężeń ścinających) daje im właśnie ową charakterystyczną zdolność zmiany kształtu i płynięcia.

Jest więc rzeczą wygodną opisywać siłę działającą na płyn poprzez określenie *ciśnienia* p zdefiniowanego jak wartość siły *prostopadłej* działającej na jednostkę powierzchni. Ciśnienie przekazywane jest na sztywne ścianki, a także na dowolne przekroje płynu *prostopadle* do tych ścianek i przekrojów w każdym ich punkcie. Ciśnienie jest wielkością skalarną. W układzie SI jednostką ciśnienia jest *pascal* (skrót Pa, $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$). Jednostka ta nosi nazwę od nazwiska uczonego francuskiego Blaise Pascala (1623—1662) (patrz paragraf 17-4). [Innymi jednostkami są bar ($1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$), kg/cm^2 , atmosfera ($1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa}$) i mm Hg ($760 \text{ mm Hg} = 1 \text{ atm}$).]*



Rys. 17-1. Element powierzchni S może być reprezentowany przez normalny do tej powierzchni wektor S , którego długość liczbowo równa się polu elementu

Płyn znajdujący się pod ciśnieniem wywiera siłę na każdą powierzchnię będącą z nim w kontakcie. Rozważmy zamkniętą powierzchnię zawierającą płyn (rys. 17-1). Dowolny element powierzchni może być reprezentowany przez wektor S , którego długość równa się polu powierzchni elementu, a kierunek jest prostopadły i zwrócony na zewnątrz powierzchni. Wtedy siła F wywierana przez płyn na ten element powierzchni wynosi

$$F = pS.$$

Ponieważ F i S mają ten sam kierunek, więc ciśnienie p można zapisać w postaci

$$p = \frac{F}{S}.$$

* Są to jednostki dopuszczone przejściowo do stosowania, obok jednostek układu SI (przyp. tłum.).

Zakładamy, że element powierzchni S jest dostatecznie mały tak, że ciśnienie p , określone jak wyżej, nie zależy od rozmiarów elementu (S). Ciśnienie może jednak zmieniać się od punktu do punktu na danej powierzchni.

Gęstość ρ jednorodnego płynu (jego masa podzielona przez objętość) może zależeć od wielu czynników, takich jak temperatura i ciśnienie pod jakim znajduje się płyn. Dla cieczy, nawet przy dużych zmianach ciśnienia i temperatury, gęstość zmienia się nieznacznie i dla naszych celów możemy bezpiecznie uważać ją za stałą; patrz pozycja *woda* w tablicy 17-1. Gęstość gazu jest jednak bardzo czuła na zmiany temperatury i ciśnienia; patrz pozycja *powietrze* w tablicy 17-1. Tablica ta przedstawia zakres wartości gęstości spotykanych w przyrodzie. Zauważmy, że zmiany sięgają czynnika rzędu 10^{38} .

Tablica 17-1

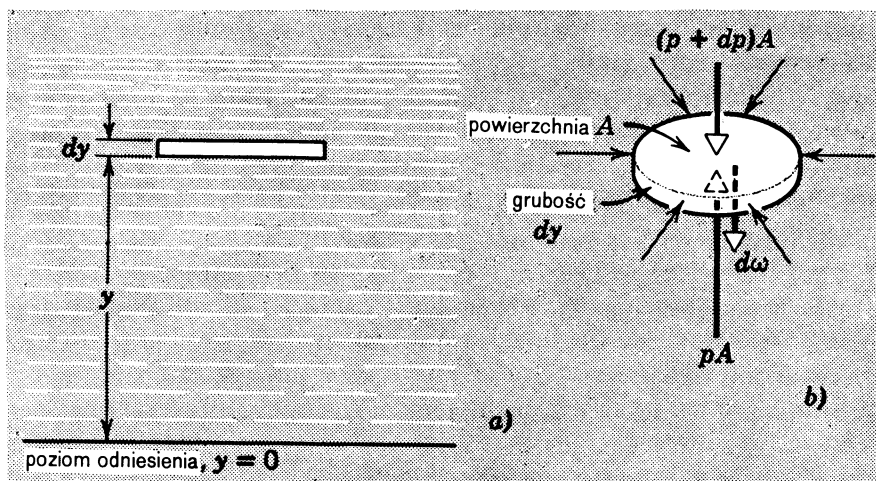
Gęstości niektórych materiałów i obiektów w kg/m^3

przestrzeń międzygwiazdowa	$10^{-18} - 10^{-21}$
najdoskonalsza próżnia laboratoryjna	$\sim 10^{-17}$
wodór: w 0°C i 1,0 atm	$9,0 \cdot 10^{-2}$
powietrze: w 0°C i 1,0 atm (1013 hPa)	1,3
w 100°C i 1,0 atm (1013 hPa)	0,95
w 0°C i 50 atm (50650 hPa)	6,5
styropian	$\sim 1 \cdot 10^2$
lód	$0,92 \cdot 10^3$
woda: w 0°C i 1,0 atm (1013 hPa)	$1,000 \cdot 10^3$
w 100°C i 1,0 atm (1013 hPa)	$0,958 \cdot 10^3$
w 0°C i 50 atm (50650 hPa)	$1,002 \cdot 10^3$
glin	$2,7 \cdot 10^3$
rtęć	$1,36 \cdot 10^4$
platyna	$2,14 \cdot 10^4$
Ziemia: gęstość średnia	$5,52 \cdot 10^3$
gęstość rdzenia	$9,5 \cdot 10^3$
gęstość skorupy	$2,8 \cdot 10^3$
Słońce: gęstość średnia	$1,4 \cdot 10^3$
gęstość w centrum	$\sim 1,6 \cdot 10^5$
białe karły (gęstości centralne)	$10^8 - 10^{15}$
jądro uranu	$\sim 10^{17}$

17-3. Zmiany ciśnienia wewnątrz nieruchomego płynu

Gdy płyn znajduje się w równowadze, wtedy każda jego część jest w równowadze. Rozważmy mały element objętości płynu zanurzony w tymże płynie. Niech element ten ma kształt cienkiego dysku i niech znajduje się w odległości y ponad pewnym poziomem odniesienia, tak jak pokazuje rys. 17-2a. Grubość dysku wynosi dy , a każda jego strona ma powierzchnię o polu A . Masa takiego elementu wynosi $\rho A dy$, a jego ciężar $\rho g A dy$. Siły wywierane na element przez otaczający płyn są w każdym punkcie prostopadłe do jego powierzchni (rys. 17-2b).

Wypadkowa siła w kierunku poziomym równa się zero, gdyż element płynu nie ma przyspieszenia poziomego. Siły poziome są wywołane jedynie przez ciśnienie płynu i, ze względu na symetrię, muszą być takie same we wszystkich punktach znajdujących się na płaszczyźnie poziomej na wysokości y .



Rys. 17-2. (a) Mały element objętości płynu pozostającego w spoczynku. (b) Siły działające na ten element

Element płynu nie jest również przyspieszany w kierunku pionowym i działająca nań wypadkowa siła pionowa musi być także równa zero. Jednak siły pionowe są wywołane nie tylko przez ciśnienie płynu na powierzchnię elementu, lecz także przez jego ciężar. Jeśli p jest ciśnieniem na dolną powierzchnię, a $p+dp$ na górną, wtedy siła działająca w górę (na dolną powierzchnię) wynosi pA , a siła działająca w dół $(p+dp)A$ (na górną powierzchnię) plus ciężar elementu dW . Tak więc dla zachowania równowagi w kierunku pionowym musi być

$$pA = (p+dp)A + dW = (p+dp)A + \rho g A dy,$$

a stąd

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g. \quad (17-1)$$

Równanie to mówi nam, jak zmienia się ciśnienie w płynie, znajdującym się w stanie równowagi statycznej, wraz ze zmianą wysokości ponad pewnym poziomem odniesienia. Gdy wysokość rośnie (dy dodatnie), wtedy ciśnienie maleje (dp ujemne). Powodem tej zmiany ciśnienia jest ciężar (na jednostkę pola przekroju) warstw płynu leżących pomiędzy punktami, dla których mierzymy różnicę ciśnień.

Wielkość ρg nazywana jest często *ciężarem właściwym* płynu; równa się ona ciężarowi płynu na jednostkę jego objętości. Na przykład dla wody ciężar właściwy wynosi $1,0 \text{ G/cm}^3$ (9800 N/m^3).

Jeśli p_1 jest ciśnieniem na wysokości y_1 oraz p_2 ciśnieniem na wysokości y_2 ponad pewnym poziomem odniesienia, to scałkowanie równania (17-1) daje

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = - \int_{y_1}^{y_2} \rho g dy$$

lub

$$p_2 - p_1 = - \int_{y_1}^{y_2} \rho g dy. \quad (17-2)$$

Dla cieczy ρ jest praktycznie stałe, gdyż ciecze są prawie nieściśliwe; różnice w wysokości są rzadko na tyle duże, by trzeba uwzględniać jakiegokolwiek zmiany g . Przyjmując ρ i g za stałe, otrzymujemy dla cieczy jednorodnych wyrażenie:

$$p_2 - p_1 = -\rho g(y_2 - y_1). \quad (17-3)$$

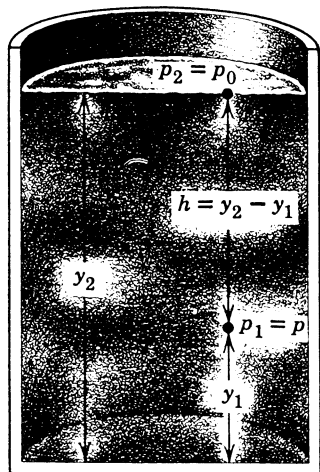
Jeżeli powierzchnia cieczy jest swobodna, stanowi ona naturalny poziom, od którego mierzy się odległości. Aby przenieść poziom odniesienia na górną powierzchnię cieczy, weźmiemy y_2 równe wzniesieniu tej powierzchni. Ciśnienie p_2 działające tam na płyn jest zazwyczaj równe ciśnieniu wywieranemu przez atmosferę ziemską p_0 . Przyjmujemy dla y_1 wysokość pewnego dowolnego poziomu, na którym ciśnienie oznaczmy przez p . Wtedy

$$p_0 - p = -\rho g(y_2 - y_1).$$

Ponieważ $y_2 - y_1$ jest głębokością h poniżej poziomu cieczy, na której ciśnienie wynosi p (patrz rys. 17-3), więc

$$p = p_0 + \rho gh. \quad (17-4)$$

Związek ten wyraźnie wskazuje, że ciśnienie jest jednakowe we wszystkich punktach znajdujących się na tej samej głębokości.



Rys. 17-3. Ciecz w otwartym naczyniu. Na górną powierzchnię cieczy działa ciśnienie atmosferyczne

Dla gazów ρ jest stosunkowo niewielkie i różnica ciśnień w dwóch punktach jest zwykle do pominięcia (patrz wzór 17-3). W związku z tym można przyjmować, że ciśnienie gazu znajdującego się w naczyniu jest wszędzie jednakowe. Nie jest to jednak założenie poprawne w przypadku gdy $y_2 - y_1$ jest bardzo duże. Ciśnienie powietrza zmienia się znacznie, gdy wznosimy się na duże wysokości w atmosferze. W takich wypadkach również ρ zmienia się z wysokością i dla scałkowania równania (17-2) musimy znać ρ jako funkcję y .

Przykład 1. Zakładając, że gęstość ρ jest proporcjonalna do ciśnienia, możemy otrzymać pewne wyobrażenie o zmianach ciśnienia z wysokością w atmosferze ziemskiej. Proporcjonalność taka byłaby bliska zależności prawdziwej, gdyby temperatura powietrza pozostawała na wszystkich wysokościach

jednakowa. Zakładając, że temperatura jest stała, a także, że zmiany g z wysokością są do pominięcia, znaleźć ciśnienie p na wysokości y ponad poziomem morza.

Z równania (17-1) mamy

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g.$$

Ponieważ ρ jest proporcjonalne do p , więc

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0},$$

gdzie ρ_0 i p_0 są znanymi wartościami gęstości i ciśnienia na poziomie morza. Wtedy

$$\frac{dp}{dy} = -g\rho_0 \frac{p}{p_0},$$

czyli

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g\rho_0}{p_0} dy.$$

Całkując to wyrażenie od wartości p_0 w punkcie $y = 0$ (poziom morza) do wartości p w punkcie y (nad poziomem morza), otrzymujemy

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{g\rho_0}{p_0} y$$

albo

$$p = p_0 e^{-g(\rho_0/p_0)y}.$$

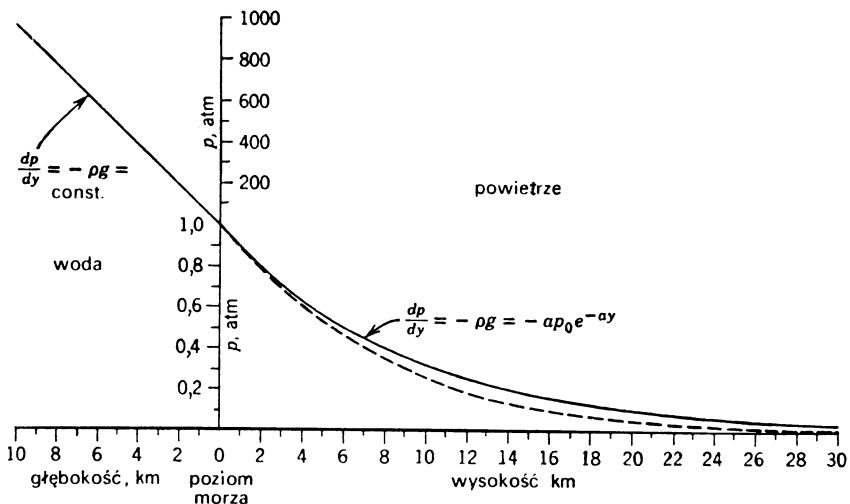
Ale

$$g = 9,80 \text{ m/s}^2, \quad \rho_0 = 1,20 \text{ kg/m}^3 \text{ (w } 20^\circ\text{C)},$$

$$p_0 = 1,01 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa},$$

więc

$$g \frac{\rho_0}{p_0} = 1,16 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1} = 0,116 \text{ km}^{-1}.$$



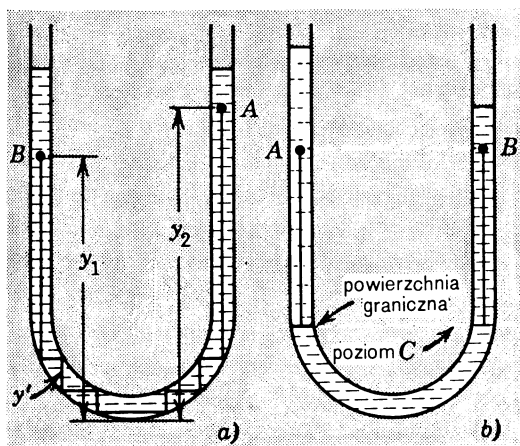
Rys. 17-4. Przykład 1. Zmiany ciśnienia wraz ze wzrostem wysokości w atmosferze i głębokości w wodzie [zakładając $p = 1 \text{ atm}$ (dokładnie) na poziomie morza]. Zauważmy, że dla wysokości i głębokości użyto różnych skal ciśnienia. Linia ciągła dla powietrza została obliczona przy założeniu, że powietrze ma stałą temperaturę i że g nie zmienia się z wysokością. Linia przerywana (U. S. Standard Atmosphere — 1962) przedstawia wyniki ulepszonych obliczeń, w których założenia te nie zostały poczynione

$$p = p_0 e^{-\alpha y},$$

gdzie $\alpha = 0,116 \text{ km}^{-1}$.

Zauważyliśmy poprzednio, że ponieważ ciecze są prawie nieściśliwe, więc dolne warstwy nie są zauważalnie ściśnięte przez ciężar umieszczonych na nich warstw górnych; gęstość ρ jest wobec tego praktycznie stała na wszystkich poziomach. Dla gazów o temperaturze wszędzie jednakowej gęstość ρ dowolnej warstwy jest proporcjonalna do ciśnienia p w tej warstwie. Zmiany ciśnienia wraz z wysokością są dla gazu inne niż dla cieczy. Rysunek 17-4 przedstawia rozkład ciśnienia w wodzie i w powietrzu.

Równanie (17-3) określa związek między ciśnieniami w dwóch dowolnych punktach płynu. Związek ten nie zależy od kształtu naczynia zawierającego płyn. Wynika to z faktu, że niezależnie od kształtu naczynia dwa punkty w płynie mogą być połączone linią łamaną składającą się z pionowych i poziomych odcinków. Rozważmy na przykład punkty A i B znajdujące się w jednorodnej cieczy zawartej w rurce w kształcie litery U (rys. 17-5a). Wzdłuż zygzakowatej linii poprowadzonej od A do B dla każdego pionowego odcinka o długości y' występuje różnica ciśnień $\rho g y'$, natomiast wzdłuż każdego odcinka poziomego nie ma żadnej zmiany ciśnienia. W wyniku otrzymujemy, że różnica ciśnień $p_B - p_A$ równa się ρg razy suma algebraiczna odcinków pionowych na drodze od A do B , czyli $\rho g(y_2 - y_1)$.



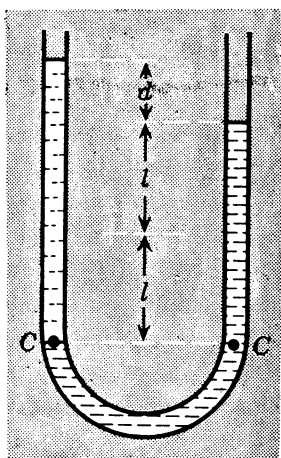
Rys. 17-5. (a) Różnica ciśnień między dwoma punktami A i B w cieczy jednorodnej zależy jedynie od różnicy poziomów tych punktów $y_2 - y_1$. (b) Dwa punkty A i B znajdujące się na tej samej wysokości mogą być pod wpływem różnych ciśnień, jeżeli gęstości znajdujących się tam cieczy są różne

Jeżeli rurka w kształcie litery U zawiera nie mieszające się ciecze, na przykład gęstą ciecz w prawym ramieniu i mniej gęstą w lewym, tak jak pokazuje rys. 17-5b, wtedy ciśnienia na tym samym poziomie mogą być w obu ramionach różne. Powierzchnia cieczy na rysunku w lewym ramieniu znajduje się wyżej niż w prawym. Ciśnienie w punkcie A jest większe niż w punkcie B . Ciśnienie w punkcie C jest z obu stron jednakowe, ale spada wolniej w kierunku od C do A niż w kierunku od C do B , ponieważ słup cieczy o przekroju jednostkowym łączący punkty A i C ma mniejszy ciężar niż odpowiedni słup cieczy łączący punkty B i C .

Przykład 2. Rurka w kształcie litery U jest częściowo wypełniona wodą. Do jednego z jej ramion dolano innej, nie mieszającej się z wodą cieczy, tak że poziom cieczy znajduje się w odległości d ponad

poziomem wody w drugim ramieniu, który równocześnie podniósł się o l (rys. 17-6). Znaleźć gęstość dolanej cieczy względem wody.

W punktach C na rys. 17-6 ciśnienia są jednakowe. Spadek ciśnienia od punktów C do obu powierzchni jest jednakowy, ponieważ każda z powierzchni znajduje się pod ciśnieniem atmosferycznym.



Rys. 17-6. Przykład 2

Spadek ciśnienia po stronie wody wynosi $\rho_w g 2l$; czynnik $2l$ pochodzi stąd, że słup wody podniósł się po jednej stronie na wysokość l i opadł po drugiej stronie o wysokość l , licząc od położenia początkowego. Spadek ciśnienia po stronie przeciwnej wynosi $\rho g(d+2l)$, gdzie ρ jest gęstością nieznannej cieczy. Stąd

$$\rho_w g 2l = \rho g(d+2l)$$

oraz

$$\frac{\rho}{\rho_w} = \frac{2l}{2l+d}.$$

Stosunek gęstości danej substancji do gęstości wody nosi nazwę *gęstości względnej* tej substancji.

17-4. Prawo Pascala i prawo Archimedesesa

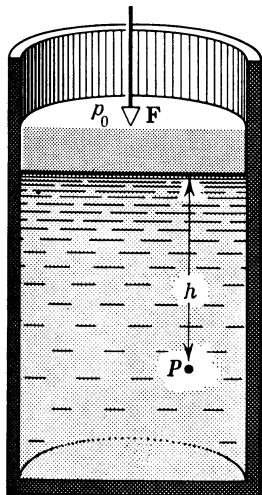
Na rysunku 17-7 widzimy ciecz wypełniającą cylinder zamknięty tłokiem, na który możemy działać ciśnieniem zewnętrznym p_0 . W każdym dowolnym punkcie P znajdującym się w odległości h od górnej powierzchni cieczy, ciśnienie p dane jest wyrażeniem (17-4), czyli

$$p = p_0 + \rho g h.$$

Powiększmy ciśnienie zewnętrzne o dowolną wartość Δp_0 (niekoniecznie małą w porównaniu z p_0). Ponieważ ciecze są w istocie swojej nieściśliwe, więc gęstość ρ w powyższym związku pozostaje praktycznie stała podczas trwania tego procesu i dlatego zmiana ciśnienia Δp w dowolnym punkcie P równa się Δp_0 . Wynik ten został ustalony przez Blaise Pascala (patrz str. 426) i nazywa się *prawem Pascala*. Prawo to formuluje się zwykle w następujący sposób: ciśnienie wywierane na zamknięty płyn jest przekazywane niezmiennie na każdą część płynu oraz na ścianki naczynia. Stwierdzenie to nie stanowi niezależnego prawa, ale jest nieodzowną konsekwencją praw mechaniki płynów.

Chociaż często zakładaliśmy nieściśliwość cieczy, w rzeczywistości są one nieco ściśliwe. Oznacza to, że wywierana na pewną część cieczy zmiana ciśnienia rozchodzi się w cieczy

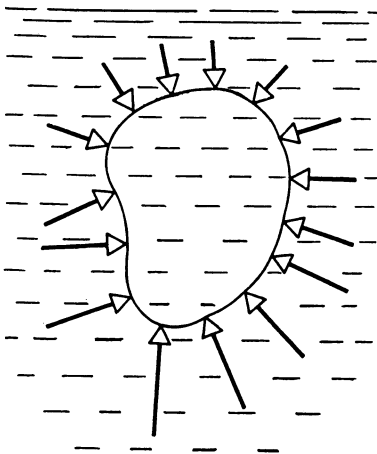
jako fala poruszająca się z prędkością dźwięku. Prawo Pascala zaczyna być słuszne, gdy tylko zaburzenie wygaśnie i ustali się stan równowagi. Prawo to jest również spełnione dla gazów, z niewielkimi komplikacjami w interpretacji wywołanymi przez duże zmiany objętości, jakie mogą powstawać w czasie zmian ciśnienia wywieranego na gaz zamknięty w naczyniu.



Rys. 17-7. Płyn w cylindrze zamkniętym ruchomym tłokiem. Ciśnienie w dowolnym punkcie P jest wywołane nie tylko przez ciężar płynu znajdującego się ponad poziomem punktu P , ale także przez siłę wywieraną przez tłok

Również prawo Archimedeasa jest nieodzowną konsekwencją praw statyki płynów. Kiedy ciało jest zanurzone, w całości lub częściowo, w spoczywającym płynie (cieczy lub gazie), płyn ten wywiera ciśnienie na każdą, będącą z nim w kontakcie, część powierzchni ciała. Wypadkowa tych wszystkich sił jest skierowana ku górze i zwie się *siłą wyporu* zanurzonego ciała. Wartość i kierunek tej siły wypadkowej możemy określić w następujący prosty sposób.

Ciśnienie wywierane na każdą część powierzchni ciała z pewnością nie zależy od materiału, z jakiego ciało to jest wykonane. Przypuśćmy więc, że ciało, czy też zanurzona jego część, zostało zastąpione przez ten sam płyn co płyn otoczenia. Na płyn ten będzie działać takie samo ciśnienie, jakie działało na ciało zanurzone (rys. 17-8). Poza tym płyn



Rys. 17-8. Ilustracja prawa Archimedeasa. Płyn działa na zanurzone ciało wypadkową siłą skierowaną do góry

będzie nieruchomy. Stąd, działająca nań siła wypadkowa będzie równa ciężarowi płynu i będzie skierowana pionowo ku górze, przechodząc przez środek ciężkości płynu. W konsekwencji otrzymujemy *prawo Archimiedesa*, a mianowicie: ciało w całości lub częściowo zanurzone w płynie wypierane jest ku górze siłą równą ciężarowi płynu wypartego przez to ciało. Widzieliśmy, że siła ta działa pionowo do góry w kierunku przechodzącym przez środek ciężkości płynu przed jego wyparciem. Taki środek ciężkości wypartego płynu nosi nazwę *środku siły wyporu*.

Przykład 3. Jaka część objętości góry lodowej wystaje ponad powierzchnię morza? Gęstość lodu wynosi $\varrho_l = 0,92 \text{ g/cm}^3$, a gęstość wody morskiej $\varrho_w = 1,03 \text{ g/cm}^3$. Ciężar góry lodowej wynosi

$$W_l = \varrho_l V_l g,$$

gdzie V_l jest objętością góry; ciężar objętości V_w wypartej wody morskiej równa się sile wyporu

$$B = \varrho_w V_w g.$$

Ponieważ góra lodowa znajduje się w stanie równowagi, więc B równa się W_l , czyli

$$\varrho_w V_w g = \varrho_l V_l g$$

oraz

$$\frac{V_w}{V_l} = \frac{\varrho_l}{\varrho_w} = \frac{0,92}{1,03} = 89\%.$$

Objętość wypartej wody V_w równa się objętości zanurzonej części góry lodowej, czyli nad powierzchnię morza wystaje 11% objętości góry.

17-5. Pomiar ciśnienia

Evangelista Torricelli (1608—1647) wynalazł w 1643 roku barometr rtęciowy i tym samym podał sposób pomiaru ciśnienia atmosferycznego*. Barometr rtęciowy jest to długa szklana rura wypełniona rtęcią, następnie odwrócona i zanurzona w naczyniu z rtęcią (rys. 17-9). Przestrzeń ponad słupem rtęci zawiera wyłącznie parę rtęci, której ciśnienie w temperaturach normalnych jest tak małe, że może być pominięte. Łatwo pokazać (patrz wzór (17-3)), że ciśnienie atmosferyczne p_0 wynosi

$$p_0 = \varrho gh.$$

W większości manometrów wykorzystuje się ciśnienie atmosferyczne jako punkt odniesienia i mierzy się różnicę, zwaną *ciśnieniem względnym*, między ciśnieniem rzeczywistym oraz ciśnieniem atmosferycznym. Ciśnienie rzeczywiste w danym punkcie płynu nazywane jest *ciśnieniem bezwzględnym*. Ciśnienie względne podawane jest ponad lub poniżej ciśnienia atmosferycznego.

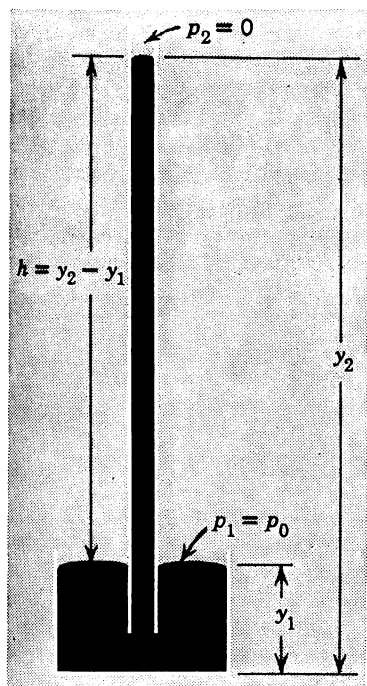
Ciśnienie atmosfery jest w każdym punkcie równe liczbowo ciężarowi słupa powietrza o przekroju jednostkowym, rozciągającego się od tego punktu do najwyższych warstw atmosfery. Ciśnienie atmosferyczne maleje więc z wysokością. Z dnia na dzień występują też pewne zmiany ciśnienia atmosferycznego wywołane niestatycznym charakterem atmosfery. Na poziomie morza słup rtęci w barometrze ma wysokość około 76 cm, zmienia-

* Patrz W. E. K. Middleton, *The History of the Barometer*, The Johns Hopkins Press (1964), gdzie znajduje się fascynujący opis rozwoju pojęcia ciśnienia atmosferycznego oraz urządzeń służących do jego pomiaru.

ją się wraz z ciśnieniem atmosferycznym. Ciśnienie wywierane przez słup rtęci o wysokości dokładnie równej 76 cm w temperaturze 0°C i przy przyspieszeniu ziemskim $g = 980,665 \text{ cm/s}^2$, nazywa się jedną atmosferą (1 atm). W tej temperaturze gęstość rtęci wynosi $13,5950 \text{ g/cm}^3$. Jedna atmosfera jest więc równoważna następującym ciśnieniom*

$$\begin{aligned} 1 \text{ atm} &= 13,5950 \text{ g/cm}^3 \cdot 980,665 \text{ cm/s}^2 \cdot 76,00 \text{ cm} = \\ &= 1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 (\equiv 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}) = \\ &= 1,033 \text{ kG/cm}^2. \end{aligned}$$

Często ciśnienie atmosferyczne określa się podając wysokość słupa rtęci, który wywiera takie samo ciśnienie w temperaturze 0°C i przy normalnym przyspieszeniu. Stąd pochodzi wyrażenie „milimetry słupa rtęci (mm Hg)”. Ciśnienie nie jest jednak żadną długością, ale stosunkiem siły do pola powierzchni.



Rys. 17-9. Barometr Torricellego

Torricelli opisał swoje doświadczenia z barometrem rtęciowym w listach z 1644 roku do przyjaciela z Rzymu Michelangelo Ricciego. W listach tych pisze on, że celem jego badań „nie było po prostu wytworzenie próżni, ale wykonanie przyrządu, który ujawniłby zmiany powietrza, które jest raz cięższe i gęste, a kiedy indziej lżejsze i rozrzedzone”. Słyszac o doświadczeniach Włocha, Blaise Pascal (we Francji) wynioskował, że jeżeli słup rtęci był podtrzymywany przez ciśnienie powietrza, to powinien on być krótszy na dużych wysokościach. Pascal próbował sprawdzić ten fakt na dzwonnicy kościoła w Paryżu, ale chcąc uzyskać bardziej przekonujące wyniki, napisał do szwagra prosząc o przeprowadzenie doświadczenia na Puy-de-Dome, wysokiej górze w Owernii. W wysokości słupa rtęci wystąpiła różnica 7,5 cm, która „wprawiła nas w zachwyt i zdumienie”. Sam Pascal zbudował barometr używając czerwonego wina i rurki szklanej o długości około 14 m.

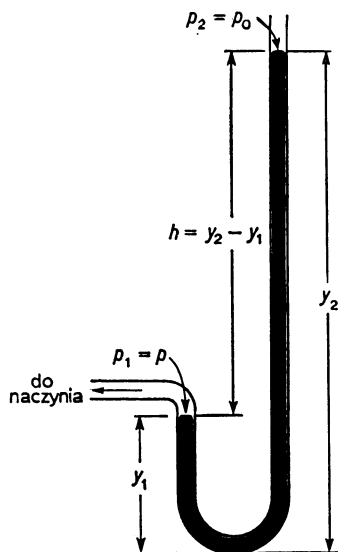
* Dokładna wartość 1 atm wynosi $101\,325 \text{ N/m}^2$. Definicji podanej w tekście już się nie stosuje, zgodnie z zarządzeniem Prezesa CUJiM z dn. 21 XII 1966, *Monitor Pol.*, nr 74, poz. 356 (przyp. tłum.).

Główne znaczenie tych doświadczeń polegało w tych czasach na zdaniu sobie sprawy z tego, że można wytworzyć opróżnioną przestrzeń. Arystoteles sądził, że próżnia nie może istnieć i nawet tak niedawno żyjący Kartezjusz podtrzymywał ten punkt widzenia. Przez dwa tysiące lat filozofowie mówili o „strachu” przyrody przed pustą przestrzenią (*horror vacui*). Mówiło się, że przyroda zapobiega powstawaniu próżni przez chwytanie czegokolwiek znajdującego się w pobliżu i wypełnianie nim natychmiast jakiegokolwiek opróżnionej przestrzeni. Rtęć czy też wino powinny więc wypełnić odwróconą rurkę, ponieważ „przyroda nienawidzi próżni”. Doświadczenia Torricellego i Pascala wykazały, że występują pewne ograniczenia zdolności przyrody do zabezpieczania się przed próżnią. Wywołało to w tamtych czasach sensację. Wytwarzanie próżni stało się bliższe praktycznej rzeczywistości dzięki rozwojowi pomp przez Otto von Guerickego w Niemczech około roku 1650 i Roberta Boyle’a w Anglii około roku 1660. Chociaż pompy te były stosunkowo prymitywne, wzbogaciły one doświadczenie w nowe narzędzie. Za pomocą pompy i bańki szklanej można było wytworzyć laboratoryjną przestrzeń do badania wpływu rozrzedzenia atmosfery na właściwości ciepła, światła, dźwięku, a później elektryczności i magnetyzmu. Chociaż nawet dzisiaj nie możemy z zamkniętego naczynia całkowicie usunąć gazu, siedemnastowieczni eksperymentatorzy uwolnili naukę od straszaka *horror vacui* i przyspieszyli wysiłki w celu stworzenia wysokopróżniowych układów.

Ciekawe, że przez kilkadziesiąt lat siedemnastego wieku wynaleziono aż sześć ważnych instrumentów naukowych. Były to: barometr, pompa próżniowa, zegar wahadłowy, teleskop, mikroskop oraz termometr. Wszystkie wywołały wielką sensację i zaciekawienie współczesnych.

Manometr otwarty (rys. 17-10) mierzy ciśnienie względne. Składa się on z rurki w kształcie litery U zawierającej ciecz, przy czym jedno ramię jest otwarte (a więc na ciecz działa ciśnienie atmosferyczne), podczas gdy drugie jest połączone z układem (zbiornikiem), którego ciśnienie p chcemy zmierzyć. Z równania (17-4) otrzymujemy

$$p - p_0 = \rho gh.$$



Rys. 17-10. Zastosowanie manometru otwartego do pomiaru ciśnienia w zbiorniku

Ciśnienie względne, $p - p_0$ jest więc proporcjonalne do różnicy wysokości cieczy w obu ramionach manometru. Gdy naczynie zawiera gaz znajdujący się pod wysokim ciśnieniem, w rurce używa się cieczy o dużej gęstości, takiej jak rtęć. Wodę można używać tylko wtedy, gdy mamy do czynienia z niskimi ciśnieniami gazu.

Przykład 4. Otwarty manometr rtęciowy (rys. 17-10) połączony jest ze zbiornikiem gazu. Rtęć w prawym ramieniu znajduje się o 39,0 cm wyżej niż w lewym, podczas gdy odczyt na barometrze znajdującym się w pomieszczeniu wynosi około 75,0 cm Hg. Jakie jest bezwzględne ciśnienie gazu? Wynik wyrazić w cm Hg, atm, Pa oraz kg/cm^2 .

Ciśnienie gazu jest ciśnieniem wywieranym na powierzchnię rtęci w lewym ramieniu rurki. Jest ono takie samo, jak ciśnienie w punkcie znajdującym się na tym samym poziomie w prawym ramieniu. Ciśnienie w tym punkcie równe się ciśnieniu atmosferycznemu (75,0 cm Hg) plus ciśnienie wywierane przez dodatkowy słup 39,0 cm Hg, czyli (zakładając standardowe wartości gęstości rtęci i przyspieszenia ziemskiego) 114 cm Hg. Ciśnienie bezwzględne gazu wynosi więc

$$114 \text{ cm Hg} = \frac{114}{76} \text{ atm} = 1,50 \text{ atm} = 1,52 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1,50 \cdot 1,033 \text{ kG/cm}^2 = 1,55 \text{ kG/cm}^2.$$

Ile wynosi ciśnienie względne gazu?

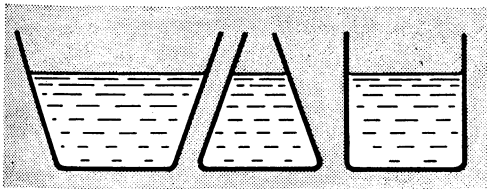
Pytania

1. Oceń średnią gęstość swego ciała. Wykorzystując idee tego rozdziału wyjaśnij, w jaki sposób mógłbyś otrzymać dokładną wartość.

2. Chorzy złożeni długotrwałą chorobą mają mniejsze szanse dostania odleżyn na ciele, jeżeli zamiast zwykłego materaca użyją materaca wodnego. Wyjaśnić dlaczego.

3. (a) Dwa ciała (np. piłki) mają takie same rozmiary i kształt, ale jedno jest gęstsze od drugiego. Zakładając, że opór powietrza jest dla każdego ciała jednakowy pokazać, że po upuszczeniu ich równocześnie z tej samej wysokości cięższe ciało doleci do Ziemi pierwsze. (b) Dwa ciała (np. krople deszczu) mają ten sam kształt i gęstość, ale jedno jest większe od drugiego. Które ciało spadnie szybciej przy założeniu, że opór powietrza jest proporcjonalny do prędkości ciała?

4. Do trzech przedstawionych na rys. 17-11 naczyń o tych samych polach podstawy nalano wodę do jednakowego poziomu. Ponieważ ciśnienie przy podstawie jest dla każdego naczynia jednakowe, więc siły działające na te podstawy są jednakowe. Dlaczego więc wszystkie trzy naczynia umieszczone na wadze mają różne ciężary? Ten pozornie sprzeczny wynik nosi nazwę „paradoksu hydrostatycznego”.



Rys. 17-11. Pytanie 4

5. Czy alpinista może wspiąć się na taką wysokość, na jakiej ciśnienie atmosferyczne będzie dwukrotnie mniejsze od wartości, jaką przyjmuje ono na poziomie morza?

6. (a) Kawałek lodu pływa w szklance wody. Czy poziom wody będzie się podnosić w miarę topnienia lodu? Uzasadnić odpowiedź. (b) Jeżeli kawałek lodu zawiera nieco ołowiu, poziom wody będzie opadał w miarę topnienia. Uzasadnić to.

7. Plasterek cytryny wrzucony do szklanki z herbatą tonie na początku aż na samo dno. Później okazuje się, że plasterek pływa. Podać możliwe tłumaczenie tego zachowania.

8. Czy prawo Archimidesa jest spełnione w czasie swobodnego spadku? A w satelicie poruszającym się po orbicie kołowej? Uzasadnić odpowiedź.

9. Kulisty pływak wykonany z korka pływa zanurzony do połowy w czajniku do herbaty spoczywającym na Ziemi. Czy korek będzie pływał, czy też tonął, jeżeli czajnik umieścimy na pokładzie statku kosmicznego unoszącego się w przestrzeni kosmicznej? A na powierzchni Jowisza?

10. Dwa wydrążone ciała o równym ciężarze i objętości oraz jednakowym kształcie, z których jedno ma otwór u podstawy, a drugie jest zalutowane, zostały zanurzone w wodzie na jednakową głębokość. Czy przy zanurzaniu któregoś z nich trzeba wykonać mniej pracy? Jeżeli tak, to którego i dlaczego?

11. Na wodzie w otwartym naczyniu pływa piłka. Czy piłka ta pozostanie zanurzona na poprzedniej głębokości, czy też zanurzy się głębiej lub podniesie się nieco, jeśli (a) naczynie zostanie zamknięte i powietrze usunięte, (b) naczynie zostanie zamknięte i powietrze sprężone?

12. Wyjaśnić, dlaczego napelniony balon wznosi się po starcie na określoną wysokość, podczas gdy łódź podwodna, jak tylko zacznie opadać, zawsze opada na samo dno oceanu, jeżeli nie zapobiegnie się temu.

13. Wyjaśnić, w jaki sposób łódź podwodna wznosi się, opada oraz zachowuje stałą głębokość. Czy ryba stosuje te same metody? (Patrz artykuły: Eric Danton, The Buoyancy of Marine Animals, *Scientific American*, July 1960 oraz G. P. Harnwell, Submarine Physics, *American Journal of Physics*, March 1948.)

14. Miękki plastikowy balon waży tyle samo zarówno w przypadku, kiedy jest pusty jak i kiedy wypełniony jest powietrzem o ciśnieniu atmosferycznym. Dlaczego? Czy ciężary byłyby jednakowe, gdyby mierzyć je w próżni?

15. Przeciekający frachtowiec parowy, który zaledwie może utrzymać się na powierzchni Morza Północnego, płynie w górę ujścia Tamizy do doków londyńskich. Statek ten tonie przed przybyciem do celu. Dlaczego?

16. Czy prawdą jest, że pływający przedmiot będzie tylko wtedy w stanie równowagi trwałej, kiedy jego środek siły wyporu znajduje się ponad środkiem ciężkości? zilustrować to na przykładach.

17. Dlaczego Indianie amerykańscy nie umieszczają w swoich czółnach siedzeń?

18. Tonący statek przewraca się bardzo często w trakcie zanurzania się w wodzie. Dlaczego?

19. Zgodnie z przykładem 3 góra lodowa jest zanurzona w 89%. Jednak czasem góry lodowe przewracają się, co może mieć nieprzyjemne skutki dla pobliskich okrętów. Jak może się to zdarzyć, biorąc pod uwagę, że tak duża część masy góry znajduje się pod poziomem morza?

20. Barka wypełniona złomem żelaznym znajduje się w śluzie kanału. Co stanie się z poziomem wody w śluzie, gdy żelazo zostanie wyrzucone za burtę?

21. Na wadze sprężynowej zawieszono wiadro wody, czy zmieni się odczyt na skali wagi, kiedy w wodzie zostanie zanurzony zawieszony na nitce kawałek żelaza. A gdy do wody włoży się kawałek korka?

22. Polana drewniane wrzucone pionowo do stawu nie zachowują pozycji pionowej, ale pływają „na płask” w wodzie. Wyjaśnić to.

23. Wyjaśnić, dlaczego nie obciążony jednorodny kij drewniany pływa poziomo, podczas gdy zacznie pływać pionowo, jeżeli tylko na jednym końcu umocujemy dostatecznie duży ciężar (patrz zadanie 30).

24. Gładki walec umieszczono na dnie naczynia. Kiedy do naczynia nalano cieczy, ani jedna jej kropla nie dostała się pod walec tak, że pozostał on w ścisłym kontakcie z dnem. Czy na walec działa siła wyporu? Wyjaśnić odpowiedź.

25. Ocenic z rozsądną dokładnością siłę wyporu wywieraną na człowieka przez atmosferę.

26. W zasadzie możliwe jest, choć praktycznie raczej trudne, zmuszenie statku oceanicznego do pływania w kilku beczkach wody. Jak zabrałbyś się do tego?

27. Czy woda na dnie Rowu Mariańskiego (głębokość 11 000 m) działa siłą wyporu w istotny sposób (a) mniejszą, czy też (b) większą niż woda na powierzchni?

28. Wspinacze górcy używają aneroidów (barometrów) dla oceny wysokości. W jaki sposób mogą być one użyteczne, jeśli weźmiemy pod uwagę fakt, że ciśnienie atmosferyczne w danym miejscu nie jest stałe?

29. Co błędnego jest w takim stwierdzeniu: „Ciśnienie atmosferyczne wynosi 753 mm Hg, jeżeli atmosfera utrzymuje w barometrze słupkę rtęci o długości 753 mm”?

30. Jak istotna jest stałość wewnętrznego przekroju rurki barometru? A bezwzględnie pionowe ustawienie tej rurki?

31. Jedno ramię manometru otwartego ma średnicę dwukrotnie większą niż drugie. Wyjaśnić, jak wpływa ta różnica na działanie manometru. Czy ma jakiegokolwiek znaczenie, który koniec manometru podłączony jest do zbiornika, w którym mierzy się ciśnienie?

32. Wyjaśnij jak lekarz może określić ciśnienie twojej krwi?

33. Zbiorniki z cieczą mają tendencję do przeciekania, kiedy przewozi się je wysoko w samolocie. Dlaczego? Czy ma tu znaczenie prawidłowe ustawienie ich wierzchem do góry? Czy ma znaczenie częściowe bądź całkowite ich napełnienie?

34. Zakładając, że barometr rtęciowy poddany działaniu standardowego ciśnienia atmosferycznego wskazuje na powierzchni Ziemi wysokość 76,0 cm słupka rtęci, ocenić wysokość słupka rtęci w sztucznym satelicie Ziemi krążącym po orbicie.

35. Na gładkiej płaszczyźnie nachylonej do poziomu pod kątem α znajduje się otwarte wiadro wody. Znaleźć nachylenie swobodnej powierzchni wody w stosunku do poziomu, kiedy: (a) wiadro utrzymywane jest w spoczynku, $a = 0$ oraz $v = 0$; (b) wiadro ześlizguje się w dół ze stałą prędkością, $a = 0$, $v = \text{const}$; (c) wiadro swobodnie zsuwa się w dół, $a = \text{const}$. Co się stanie, kiedy płaszczyzna będzie zakrzywiona tak, że $a \neq \text{const}$?

36. Jeżeli wypełniona wodą rurka w kształcie litery U obraca się dookoła osi pionowej przechodzącej przez środek jednego z ramion, to poziom wody opada w jednym ramieniu i podnosi się w drugim w porównaniu ze stanem spoczynku. Wyjaśnić to dokładnie (patrz zadanie 18).

37. Wyjaśnić, jak to jest możliwe, że ciśnienie jest wielkością skalarną, podczas gdy siły będące wektorami mogą być wywoływane przez działanie ciśnień.

38. Cienkościenne rurka pęka łatwiej, jeżeli przy różnicy ciśnień pomiędzy wnętrzem i zewnątrz rurki, nadwyżka ciśnienia jest na zewnątrz. Wyjaśnić to.

39. Rozważaliśmy ciecze znajdujące się pod wpływem sprężania. Czy na ciecz mogą działać siły wywołujące naprężenia? Jeśli tak jest, to czy ciecze mogą się rozdzierać podobnie jak ciała stałe? (Patrz artykuł: Robert E. Apfel, The Tensile Strength of Liquids, *Scientific American*, December 1972.)

Zadania

Paragraf 17-2

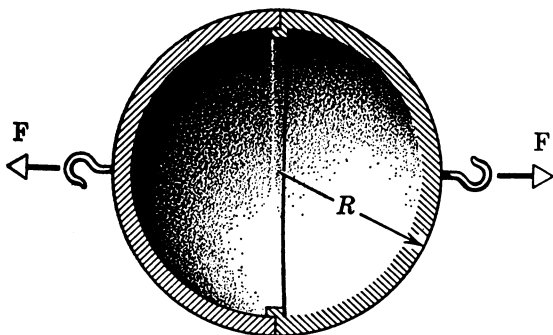
1. Znaleźć wzrost ciśnienia płynu w strzykawce, kiedy pielęgniarka działa na tłok strzykawki o promieniu 1,1 cm siłą 42 N.

Odp.: $1,1 \cdot 10^5$ Pa.

2. Szczelne pudełko zamknięte wieczkiem o powierzchni 77 cm² zostało częściowo opróżnione. Jakie ciśnienie panuje wewnątrz pudełka, jeśli dla oderwania wieczka trzeba podziać siłą 49 kG? Zewnętrzne ciśnienie atmosferyczne wynosi 1 kG/cm².

3. W 1654 roku burmistrz Magdeburga Otto von Guericke, wynalazca pompy próżniowej, zademonstrował przed zjazdem cesarskim jak dwa ośmiokonne zaprzęgi nie mogły rozerwać dwóch odpompowanych z powietrza półkul mosiężnych. (a) Pokazać, że siła F potrzebna do rozerwania tych półkul wynosi $F = \pi R^2 P$, gdzie R jest (zewnętrznym) promieniem półkul, a P różnicą ciśnień na zewnątrz i wewnątrz kuli (rys. 17-12). (b) Przyjmując $R = 0,3$ m i ciśnienie wewnętrzne 0,1 atm, ($0,101 \cdot 10^5$ Pa), obliczyć siłę, jaką musiałby działać zaprzęg koni na to, żeby rozerwać półkule. (c) Dlaczego zostały użyte dwa zaprzęgi koni? Czy do udowodnienia istoty zagadnienia nie wystarczyłby jeden?

Odp.: (b) 2627 kG.



Rys. 17-12. Zadanie 3

Paragraf 17-3

4. Znaleźć całkowite ciśnienie (w kG/cm² oraz Pa) panujące na głębokości 150 m pod powierzchnią oceanu. Względna gęstość wody morskiej wynosi 1,03, zaś ciśnienie atmosferyczne na poziomie morza 1,0 kG/cm² ($1,0 \cdot 10^5$ Pa).

5. Oszacować hydrostatyczną różnicę ciśnienia krwi w człowieku o wzroście 1,83 m, pomiędzy mózgiem stopami. Założyć, że gęstość krwi wynosi $1,06 \cdot 10^3$ kg/m³.

Odp.: $1,90 \cdot 10^4$ Pa.

6. Płuca ludzkie mogą wytrzymać różnicę ciśnień nie większą niż jedna dwudziesta atmosfery standardowej ($0,5 \cdot 10^4$ Pa). Jak głęboko pod wodą może pływać nurek, jeśli do oddychania używa wystającej nad powierzchnię rury?

7. Znaleźć ciśnienie panujące w atmosferze na wysokości 16 km nad poziomem morza.

Odp.: $1,6 \cdot 10^4$ Pa.

8. Wysokość, na jakiej ciśnienie w atmosferze wynosi dokładnie $1/e$ ciśnienia na poziomie morza, nazywa się *wysokością jednostkową* atmosfery na poziomie morza. (a) pokazać, że wysokość jednostkowa H na poziomie morza równa się wysokości takiej atmosfery, która ma wszędzie gęstość równą gęstości na poziomie morza oraz wywiera na poziomie morza ciśnienie takie samo, jak nieskończona atmosfera rzeczywista. (b) Pokazać, że wysokość jednostkowa na poziomie morza wynosi 8,6 km.

9. Jaka byłaby wysokość atmosfery, gdyby gęstość powietrza (a) była stała oraz (b) malała liniowo do zera ze wzrostem wysokości? Założyć gęstość na poziomie morza równą $1,3 \text{ kg/m}^3$.

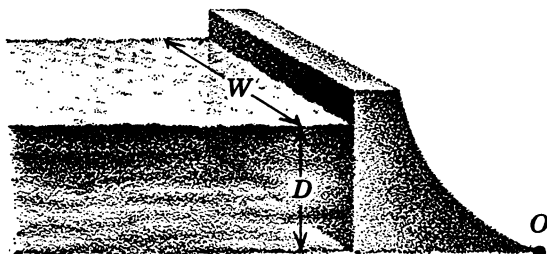
Odp.: (a) $8,0 \cdot 10^3 \text{ m}$, (b) $16 \cdot 10^3 \text{ m}$.

10. Basen pływacki ma wymiary $25 \times 10 \times 2,5 \text{ m}$. (a) Jaka siła (pochodząca tylko od wody) działa na dno basenu, jeżeli jest on wypełniony wodą? Jaka siła działa na końce basenu? A na boki? (b) Jeżeli niepokoisz się czy ściany basenu nie zawałają się, czy nie powinieneś wziąć pod uwagę ciśnienia atmosferycznego?

11. Prosta U-rurka zawiera rtęć. O ile wznieś się poziom rtęci w lewym ramieniu w porównaniu ze stanem początkowym, jeśli do prawego ramienia doleje się 13,6 cm wody?

Odp.: 0,5 cm.

12. Woda o głębokości D zatrzymana jest przez pionową ścianę tamy tak, jak pokazuje to rys. 17-13. Niech W będzie szerokością tamy. (a) Znaleźć poziomą siłę wypadkową wywieraną na tamę przez ciśnienie względne wody oraz (b) wypadkowy moment tej siły względem prostej przechodzącej przez punkt O i równoległej do szerokości tamy. (c) Jaka jest linia działania siły równoważącej nacisk wody?



Rys. 17-13. Zadanie 12

13. Trzy niemieszające się ciecze wlane do zbiornika cylindrycznego. Objętość i gęstość cieczy wynoszą odpowiednio: 0,5 l i $2,6 \text{ g/cm}^3$, 0,25 l i 1 g/cm^3 oraz 0,4 l i $0,8 \text{ g/cm}^3$. Ile wynosi całkowita siła działająca na dno naczynia? (Zaniedbać wkład pochodzący od atmosfery).

Odp.: 18 N.

14. Dwa identyczne naczynia cylindryczne o podstawach znajdujących się na tym samym poziomie zawierają ciecz o gęstości ρ . Pola powierzchni obu podstaw wynoszą A , lecz ciecz w jednym naczyniu ma wysokość h_1 , a w drugim h_2 . Znaleźć pracę wykonaną przez siłę grawitacyjną przy wyrównywaniu poziomów, kiedy oba naczynia zostały połączone.

15. (a) Rozważmy naczynie z płynem poruszające się *pionowo do góry* z przyspieszeniem a . Pokazać, że zmiany ciśnienia z głębokością w płynie dane są wzorem

$$p = \rho h(g+a),$$

gdzie h jest głębokością, a ρ gęstością płynu. (b) Pokazać również, że jeżeli płyn jako całość podlega *pionowemu* skierowanemu w *dół* przyspieszeniu a , wtedy ciśnienie na głębokości h jest dane wzorem

$$p = \rho h(g-a).$$

(c) Jak jest w przypadku spadania swobodnego?

16. (a) Rozważmy przyspieszanie w kierunku poziomym pewnej masy cieczy znajdującej się w otwartym zbiorniku. Przyspieszanie takie wywołuje opadanie powierzchni cieczy na przodzie zbiornika i podnoszenie się w tyle. Pokazać, że powierzchnia cieczy nachyla się do poziomu pod kątem θ , gdzie $\tan \theta = a/g$ oraz a jest przyspieszeniem poziomym. (b) Jak zmienia się ciśnienie w cieczy ze zmianą *pionowej* głębokości pod powierzchnią?

17. Powierzchnia styku dwóch spoczywających, nie mieszających się płynów o różnych gęstościach jest pozioma. Udowodnić to ogólne stwierdzenie korzystając (a) z faktu, że w stanie równowagi trwałej energia potencjalna układu musi być najmniejsza, (b) z faktu, że dla każdego dwóch punktów leżących na płaszczyźnie poziomej w którymkolwiek z płynów ciśnienia są jednakowe.

18. (a) Płyn znajdujący się w cylindrycznym naczyniu obraca się ze stałą prędkością kątową ω dookoła pionowej osi symetrii tego naczynia. Pokazać, że zmiany ciśnienia płynu w kierunku radialnym dane są równaniem

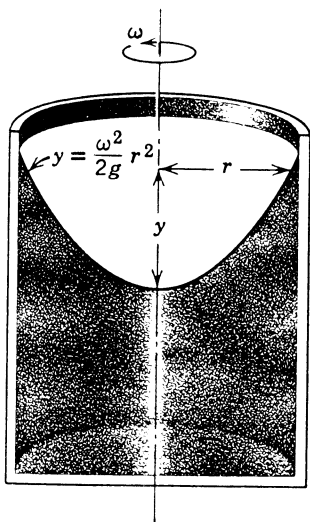
$$\frac{dp}{dr} = \rho \omega^2 r.$$

(b) Przyjąć, że $p = p_c$ na osi obrotu ($r = 0$) i pokazać, że w dowolnym punkcie r ciśnienie p wynosi

$$p = p_c + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2.$$

(c) Pokazać, że powierzchnia cieczy ma kształt paraboloidalny (rys. 17-14); oznacza to, że przekrój pionowy powierzchni jest krzywą $y = \omega^2 r^2 / 2g$. (d) Pokazać, że zmiany ciśnienia z głębokością są określone zależnością

$$dp = \rho g dh.$$



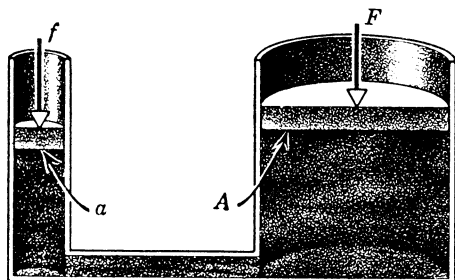
Rys. 17-14. Zadanie 18

Paragraf 17-4

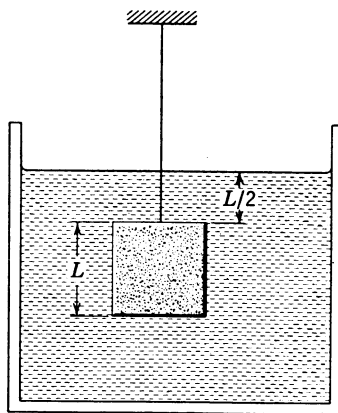
19. Na ciecz zamkniętą w prasie hydraulicznej wywieramy za pomocą tłoka o małym polu przekroju a niewielką siłę f . Łącząca rura prowadzi do większego tłoka o polu przekroju A (rys. 17-15). (a) Jaka siła F wystarczy do utrzymania dużego tłoka? (b) Jaki ciężar umieszczony na małym tłoku utrzyma dwie tony na dużym tłoku, jeśli mały tłok ma średnicę 3 cm, a duży 30 cm?

Odp.: (a) fA/a , (b) 20 kG.

20. Sześcienne przedmiot o długości krawędzi L (0,6 m) i ciężarze W (454 kG) w próżni, został



Rys. 17-15. Zadanie 19



Rys. 17-16. Zadanie 20

zawieszony na linie w otwartym zbiorniku wypełnionym wodą o gęstości ρ (1 g/cm^3) tak, jak na rys. 17-16. (a) Znaleźć całkowitą, pochodzącą od wody i atmosfery, siłę działającą w dół na wierzch przedmiotu o powierzchni A ($0,37 \text{ m}^2$). (b) Znaleźć całkowitą siłę działającą na spód przedmiotu. (c) Znaleźć napięcie liny.

21. (a) Jakie może być najmniejsze pole powierzchni pływającej na wodzie prostopadłościenniej bryły lodu o grubości $0,3 \text{ m}$, która utrzyma samochód ważący 1100 kG ? (b) Czy ma jakiegokolwiek znaczenie, w którym miejscu bryły będzie stał samochód?

Odp.: (a) 46 m^2 . (b) Tak.

22. Trzech chłopców, z których każdy waży W (36 kG), robi pływającą tratwę wiążąc kłody o średnicy D ($0,3 \text{ m}$) i długości L ($1,8 \text{ m}$). Ile kłód wystarczy na to, by tratwa nie zatonała wraz z chłopcami? Przyjąć względną gęstość drewna równą $0,8$.

23. Kłodek drewna pływa w wodzie zanurzony w dwóch trzecich swojej objętości. W nafcie część zanurzona wynosi $0,90$ jego objętości. Znaleźć gęstość (a) drewna i (b) nafty.

Odp.: (a) $6,7 \cdot 10^2 \text{ kg/m}^3$. (b) $7,4 \cdot 10^2 \text{ kg/m}^3$.

24. Kłodek drewna o masie $3,67 \text{ kg}$ i gęstości względnej $0,60$ należy obciążyć ołowiem tak, żeby pływał w wodzie zanurzony w $0,90$ swojej objętości. Jaki musi być ciężar ołowiu, jeżeli (a) ołów znajduje się na wierzchu drewna i (b) ołów umocowany jest pod drewnem? Gęstość ołowiu wynosi $1,13 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^3$.

25. Przyjmijmy, że gęstość mosiężnych odważników wynosi $8,0 \text{ g/cm}^3$, a gęstość powietrza $0,0012 \text{ g/cm}^3$. Jaki błąd procentowy popełnimy przy ważeniu na wadze szalkowej przedmiotu o masie m i gęstości ρ , jeżeli pominiemy siłę wyporu powietrza?

Odp.: $0,12 (1/\rho - 1/8)$, gdzie ρ jest w g/cm^3 .

26. Pusta kulista powłoka żelazna pływa w wodzie, zanurzona prawie w całości. Znaleźć wewnętrzną średnicę powłoki, jeśli średnica zewnętrzna wynosi $0,6 \text{ m}$, a gęstość względna żelaza $7,8$.

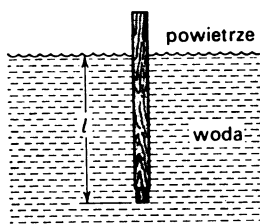
27. Odlew żelazny zawierający pewną liczbę wydrzeń waży 27 kG w powietrzu i 18 kG w wodzie. Jaka jest objętość wydrzeń w odlawie? Przyjąć, że gęstość względna żelaza wynosi $7,8$.

Odp.: $5,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$.

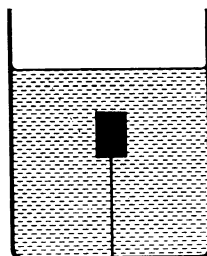
28. Pływający po rtęci sześciąt ma zanurzoną jedną czwartą swojej objętości. Gdyby do rtęci dolać wody w ilości wystarczającej do przykrycia sześciatu, to (a) jaka część jego objętości pozostanie zanurzona w rtęci? (b) Czy odpowiedź zależy od kształtu ciała?

29. Rurka w kształcie litery U została wypełniona jednorodną cieczą. W pewnej chwili ciecz z jednej strony wepchnięto za pomocą tłoka. Następnie tłok usunięto i ciecz w obu ramionach zaczęła drgać. Pokazać, że okres drgań wynosi $\pi \sqrt{2L/g}$, gdzie L jest całkowitą długością cieczy w rurce.

30. Cylindryczny pręt drewniany obciążono ołowiem tak, że pływa on pionowo w wodzie (rys. 17-17). Długość części zanurzonej wynosi $l = 2,44 \text{ m}$. Pręt ten został wprawiony w pionowe drgania. (a) Pokazać, że drgania te są prostymi drganiami harmonicznymi. (b) Znaleźć okres drgań. Zaniedbać fakt, że woda wpływa tłumiąco na ten ruch.



Rys. 17-17. Zadanie 30



Rys. 17-18. Zadanie 32

31. Długa jednorodna belka drewniana o przekroju kwadratowym pływa po wodzie albo z dwoma przeciwległymi stronami równoległymi do powierzchni wody albo ze wszystkimi czterema stronami nachylonymi pod kątem 45° do wody. Które z tych położeń przyjmie belka przy gęstości $0,2$; $0,5$ oraz $0,89 \text{ g/cm}^3$?

32. Napięcie sznurka utrzymującego klocek poniżej powierzchni cieczy (o gęstości większej niż gęstość klocka) wynosi T_0 wtedy, kiedy zbiornik z cieczą (patrz rys. 17-18) znajduje się w spoczynku. Pokazać, że gdy zbiornik ten ma przyspieszenie a skierowane pionowo w górę, to napięcie sznurka wynosi $T_0(1 + a/g)$.

18. Dynamika płynów

18-1. Ogólny opis przepływu płynów

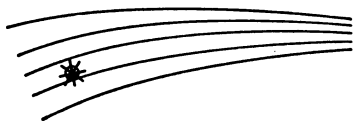
Jednym ze sposobów opisu ruchu płynu jest podzielenie płynu na nieskończenie małe elementy objętości, które możemy nazwać cząstkami płynu, i śledzenie ruchu każdej z tych cząstek. Jest to ogromne zadanie. Musielibyśmy przypisać każdej takiej cząstce współrzędne x, y, z i określić je jako funkcje czasu t . Dla cząstki płynu, która w chwili t_0 znajdowała się w punkcie x_0, y_0, z_0 , współrzędne x, y, z w chwili t byłyby określone przez funkcje $x(x_0, y_0, z_0, t_0, t)$, $y(x_0, y_0, z_0, t_0, t)$ i $z(x_0, y_0, z_0, t_0, t)$ służące następnie do opisu ruchu płynu. Takie postępowanie, rozwinięte po raz pierwszy przez Josepha Louisa Lagrange'a (1736—1813), jest bezpośrednim uogólnieniem pojęć mechaniki punktów materialnych.

Istnieje również inne podejście, rozwinięte przez Leonharda Eulera (1707—1783), które w większości wypadków jest bardziej wygodne. Rezygnujemy w nim z prób opisanie historii każdej cząstki płynu i zamiast tego określamy gęstość i prędkość płynu w każdym punkcie przestrzeni oraz w każdej chwili czasu. Tą właśnie metodą będziemy się zajmować. Ruch płynu będzie opisywany przez podanie gęstości $\varrho(x, y, z, t)$ oraz prędkości $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ w punkcie x, y, z i w czasie t . W ten sposób koncentrujemy naszą uwagę na tym, co się dzieje w pewnym określonym punkcie przestrzeni oraz w pewnym określonym czasie, a nie na tym, co się dzieje z pewną określoną cząstką. Jakakolwiek wielkość używana do opisu stanu płynu, na przykład ciśnienie p , będzie miała określoną wartość w każdym punkcie przestrzeni i w każdej chwili czasu. Chociaż przy takim opisie płynu koncentrujemy się na punkcie przestrzeni, a nie na cząstce płynu, to jednak nie możemy pominąć, przynajmniej dla krótkich przedziałów czasu dt , śledzenia samych cząstek. Do cząstek tych przecież, a nie do punktów przestrzeni, stosują się prawa mechaniki. W celu zrozumienia istoty uproszczeń, które będziemy stosowali, rozważmy na początku pewne ogólne właściwości charakteryzujące przepływ.

1. Przepływ może być *ustalony* (*laminarny*) albo *nieustalony*. Mówi się, że ruch płynu jest ustalony, kiedy prędkość płynu $\mathbf{v}$ jest w dowolnie wybranym punkcie stała w czasie. Oznacza to, że w dowolnym punkcie przepływu ustalonego prędkość każdej przechodzącej przez ten punkt cząstki płynu jest zawsze taka sama. W pewnym innym punkcie cząstka może poruszać się z inną prędkością, ale każda następna cząstka przechodząca przez ten drugi punkt zachowuje się w nim zupełnie tak samo, jak zachowywała się cząstka pierwsza.

Warunki takie mogą być osiągnięte przy niskich prędkościach przepływu; przykładem takiego ruchu jest łagodnie płynący strumyk. W przepływie nieustalonym, zachodzącym na przykład w ujściach rzek podczas przypływu morskiego, prędkości v są funkcją czasu. W przypadku przepływu turbulentnego, jaki powstaje w wodospadach, prędkości zmieniają się beładnie od punktu do punktu, a także w miarę upływu czasu.

2. Przepływ może być *wirowy* lub *bezwirowy*. Przepływ jest bezwirowy wtedy, gdy w żadnym punkcie element płynu nie ma względem tego punktu wypadkowej prędkości kątowej. Możemy sobie wyobrazić małe kółko z łopatkami zanurzone w poruszającym się płynie (rys. 18-1). Ruch płynu jest bezwirowy, gdy kółko nie obraca się podczas ruchu; w przeciwnym razie ruch jest wirowy. Ruch różnego rodzaju wirów jest przepływem wirowym.



Rys. 18-1. Małe pływające kółko z łopatkami umieszczamy w przepływającej cieczy. Jeśli kółko obraca się, to przepływ nazywamy *wirowym*, jeśli nie, to przepływ nazywamy *bezwirowym*

3. Przepływ może być *ściśliwy* lub *nieściśliwy*. Zazwyczaj można przyjmować że przepływ cieczy jest nieściśliwy. Jednak nawet bardzo ściśliwy gaz może czasami podlegać nieistotnym zmianom gęstości. Przepływ jego jest wtedy praktycznie biorąc nieściśliwy. Takim przykładem prawie nieściśliwego przepływu jest ruch powietrza względem skrzydeł samolotu, podczas lotu z prędkością dużo mniejszą od prędkości głosu w powietrzu (opisywanego przez aerodynamikę poddźwiękową). W takich wypadkach gęstość ρ jest stała, niezależna od x , y , z oraz t , i w związku z tym matematyczny opis przepływu jest znacznie uproszczony.

4. Wreszcie przepływ może być *lepki* lub *nielepki*. Lepkość w ruchu płynów jest odpowiednikiem tarcia w ruchu ciał stałych. W wielu przypadkach, takich jak zagadnienia smarowania, lepkość jest bardzo istotną cechą. Czasem jest jednak do pominięcia. Lepkość wywołuje pojawienie się sił stycznych między warstwami płynu poruszającymi się względem siebie. Wynikiem lepkości są również stopniowe straty (dysypacja) energii mechanicznej.

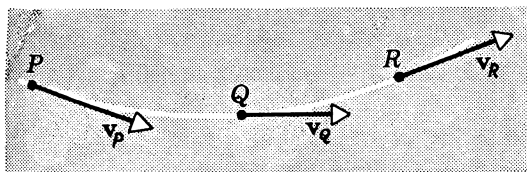
Przy omawianiu dynamiki płynów ograniczymy się głównie do przepływów *ustalonych*, *bezwirowych*, *nieściśliwych* i *nielepkich*. Wynikające stąd uproszczenia matematyczne powinny być oczywiste. Jednak robienie tak wielu upraszczających założeń jest niebezpieczne, gdyż zachodzi obawa, że w rezultacie zaczniemy opisywać jakiś płyn, nie mający większego związku z rzeczywistością*. Co więcej, czasem trudno jest zdecydować, czy dana właściwość płynu — na przykład jego lepkość — może być w określonej sytuacji pominięta. Bez względu na to wszystko przekonamy się, że taka ograniczona analiza, którą mamy zamiar przedstawić, ma szerokie zastosowanie w praktyce.

18-2. Linie prądu

W przepływie ustalonym prędkość v w danym punkcie jest stała w czasie. Rozważmy punkt P znajdujący się wewnątrz płynu (rys. 18-2). Ponieważ v w punkcie P nie zmienia się w czasie, więc każda cząstka przybywająca do P minie ten punkt z tą samą (co do war-

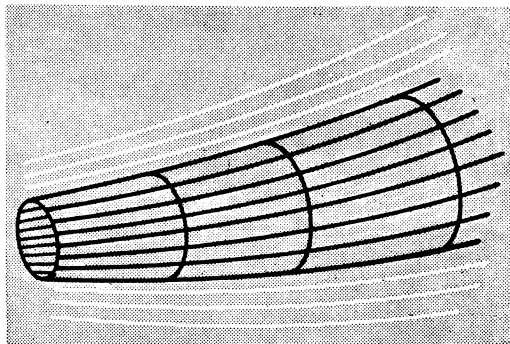
* Richard Feynman przypomniał, że John von Neuman nazwał ten wyidealizowany płyn „suchą wodą”.

tości i kierunku) prędkością. To samo dotyczy punktów Q oraz R . Tak więc, jeżeli prześledzimy tor pewnej cząstki — tak jak na rysunku — to przekonamy się, że powstała krzywa jest torem każdej cząstki przybywającej do P . Krzywa ta nosi nazwę *linii prądu*. Linia prądu jest w każdym punkcie równoległa do prędkości cząstek płynu. Żadne dwie linie prądu nie mogą się nigdzie przecinać. W przeciwnym wypadku nadchodząca cząstka płynu mogłaby pójść jedną z dwóch możliwych dróg i przepływ nie byłby ustalony. Obraz linii prądu w przepływie ustalonym jest stacjonarny w czasie*.



Rys. 18-2. Przy założeniu, że przepływ jest ustalony, cząstka płynu przechodząca przez punkty P , Q i R porusza się wzdłuż linii prądu. Każda inna cząstka przechodząca przez punkt P musi w przepływie ustalonym wędrować wzdłuż tej samej linii prądu

Przez każdy punkt w płynie możemy w zasadzie poprowadzić pewną linię prądu. Załóżmy, że mamy do czynienia z przepływem ustalonym i wybierzmy skończoną liczbę linii prądu tworząc pewnego rodzaju wiązkę, tak jak na rys. 18-3. Ten rurkowaty obszar zwany jest *strugą prądu*. Brzeg strugi składa się z linii prądu i jest zawsze równoległy do prędkości cząstek płynu. W związku z tym *płyn nie może przepływać przez brzeg strugi*, która zachowuje się trochę jak rurka o tym samym kształcie. Płyn, który wchodzi do jednego końca strugi, musi wyjść drugim.



Rys. 18-3. Struga prądu utworzona z wiązki linii prądu

18-3. Równanie ciągłości

Na rysunku 18-4 narysowaliśmy cienką strugę prądu. Prędkość cząstek wewnątrz strugi, choć wszędzie równoległa do strugi, może mieć różne wartości w różnych punktach. Niech prędkość cząstek w punkcie P wynosi v_1 , w punkcie Q zaś v_2 . Niech A_1 i A_2 będą polami prostopadłych do linii prądu przekrojów strugi odpowiednio w punktach P

* Rodzina linii prądu w płynie jest wykreślana w taki sposób, że prędkość chwilowa $\mathbf{v}$ cząstki płynu jest w każdym punkcie płynu styczna do linii prądu w tym punkcie. Dla przepływu nieustalonego obraz linii prądu zmienia się w czasie i tor indywidualnej cząstki płynu nie pokrywa się z linią prądu w danej chwili czasu. Linia prądu oraz linia ruchu cząstki stykają się ze sobą w pewnym punkcie, lokalizując w ten sposób cząstkę w tej chwili. Tor, czyli linia ruchu, oraz linia prądu pokrywają się jedynie dla przepływu ustalonego.

i Q . W czasie Δt element płynu przepływa w przybliżeniu odległość $v\Delta t$. Masa Δm_1 płynu przechodzącego przez A_1 w przedziale czasu Δt wynosi w przybliżeniu

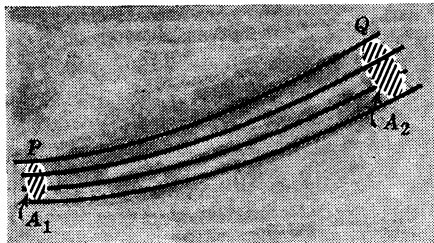
$$\Delta m_1 = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t,$$

czyli strumień masy $\Delta m_1/\Delta t$ równa się w przybliżeniu $\rho_1 A_1 v_1$. Na to, żeby ani v , ani A nie zmieniały się w istotny sposób na drodze, którą przebył płyn, musimy wziąć Δt dostatecznie małe. W granicy, gdy $\Delta t \rightarrow 0$, otrzymujemy dokładne definicje:

$$\text{strumień masy w } P = \rho_1 A_1 v_1$$

oraz

$$\text{strumień masy w } Q = \rho_2 A_2 v_2.$$



Rys. 18-4. Struga prądu użyta w dowodzie równania ciągłości

gdzie ρ_1 i ρ_2 są odpowiednio gęstościami płynu w punktach P i Q . Masa płynu przepływająca w jednostce czasu przez każdy przekrój strugi musi być taka sama, ponieważ żadna część płynu nie może opuścić strugi przez jej ścianki, a w strudze nie ma żadnych „źródeł”, w których płyn mógłby być wytwarzany, ani „ścieków”, przez które mogłyby odpływać. W szczególności strumień masy w punkcie P musi być równy strumieniowi w punkcie Q :

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2,$$

albo inaczej

$$\rho A v = \text{const.} \quad (18-1)$$

Wynik ten [równanie (18.1)] wyraża prawo zachowania masy w dynamice płynów.

Czy należałoby oczekiwać, że równanie (18-1) jest spełnione dla przepływu (a) nieustalonego, (b) wirowego, (c) ściśliwego, czy też (d) lepkiego?

W sytuacji ogólniejszej, gdy w strudze istnieją źródła lub ścieki oraz gdy gęstość płynu zmienia się w czasie i przestrzeni, masa płynu też musi być zachowana. Możemy napisać (bez dowodu) *równanie ciągłości* wyrażające ten fakt. Ma ono postać

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = S, \quad (18-2)$$

gdzie v_x , v_y , v_z są składowymi prędkościami płynu; gęstość ρ , jak i te składowe zmieniają się w przestrzeni i w czasie*.

Rozważmy mały element objętości w takim płynie. Można pokazać, że:

1. Suma pierwszych trzech wyrazów równania (18-2) daje sumaryczny wypływ masy z elementu objętości, na jednostkę objętości.
2. Czwarty wyraz przedstawia szybkość, z jaką masa jest gromadzona wewnątrz elementu objętości, na jednostkę objętości.

* W równaniu (18-2) pochodne zostały napisane jako pochodne cząstkowe, ponieważ cztery występujące wielkości są funkcjami więcej niż jednej zmiennej.

3. Ostatni wyraz, S , przedstawia szybkość, z jaką masa wpływa do elementu objętości ze źródła (jeśli S jest dodatnie), lub też wypływa z tego elementu do ścieku (jeśli S jest ujemne).

Jest rzeczą jasną, że równanie (18-2) z taką interpretacją wyrazów jest pewnym sformułowaniem zasady zachowania masy dla przepływu. Czy równanie to jest poprawne pod względem wymiarowym?

Gdy w równaniu (18-2) $S = 0$, wtedy nie ma żadnych źródeł ani ścieków. Jeżeli suma pierwszych trzech wyrazów jest ujemna, to występuje sumaryczny dopływ masy do rozważanego elementu objętości. Wobec tego masa zawarta w elemencie musi rosnąć w czasie „gromadzenia się” płynu. Jest to zgodne z równaniem (18-2), ponieważ $\partial \rho / \partial t$ musi być w podanych warunkach dodatnie, co oznacza, że gęstość płynu (a stąd również masa płynu) zawartego w elemencie objętości rośnie z upływem czasu.

Jeżeli płyn jest nieściśliwy, jak będziemy dalej zakładać, to $\rho_1 = \rho_2$ i równanie (18-1) przyjmuje prostszą postać:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

lub

$$Av = \text{const.} \quad (18-3)$$

Iloczyn Av określa wielkość zwaną często *strumieniem objętościowym* lub też *nateżeniem przepływu* (w SI jednostkami są m^3/s). Z równania powyższego wynika, że prędkość płynu dla nieściśliwego przepływu ustalonego zmienia się odwrotnie proporcjonalnie do pola przekroju i jest większa w węższych częściach strugi. Fakt, że iloczyn Av pozostaje stały wzdłuż strugi prądu, pozwala zinterpretować jakoś obraz linii prądu. W węższej części strugi linie muszą się zagęszczać bardziej niż w części szerokiej. Prędkość płynu musi więc rosnąć wraz ze zmniejszaniem się odległości między liniami prądu. Wnioskujemy stąd, że rzadko rozmieszczone linie prądu oznaczają obszary niskiej prędkości, zaś linie rozmieszczone gęsto oznaczają obszary wysokiej prędkości.

Stosując drugą zasadę dynamiki do przepływu między punktami P i Q (rys. 18-4) możemy otrzymać inny interesujący wynik. Na to, żeby cząstka płynu, mająca w punkcie P prędkość v_1 , osiągnęła w Q mniejszą prędkość v_2 musi poruszać się od P do Q ruchem opóźnionym. Opóźnienie to może być spowodowane grawitacją lub też różnicą ciśnień działających na cząstkę płynu płynącą od P do Q . W poziomej strudze prądu siła grawitacyjna nie zmienia się. Wnioskujemy stąd, że w poziomym przepływie ustalonym ciśnienie jest największe tam, gdzie prędkość jest najmniejsza.

Czy znajdowałś się kiedykolwiek w tłumie zaczynającym się przepychać przez małe otwarte drzwi? Na zewnątrz, przed drzwiami, pole przekroju jest duże, ciśnienie duże, ale prędkość posuwania się stosunkowo niewielka. W drzwiach o małym polu przekroju ciśnienie jest zmniejszone i ku naszemu zadowoleniu prędkość posuwania się wzrasta. Ten szczególny „płyn ludzki” jest ściśliwy i lepki, a przepływ jego może być czasami turbulentny i wirowy.

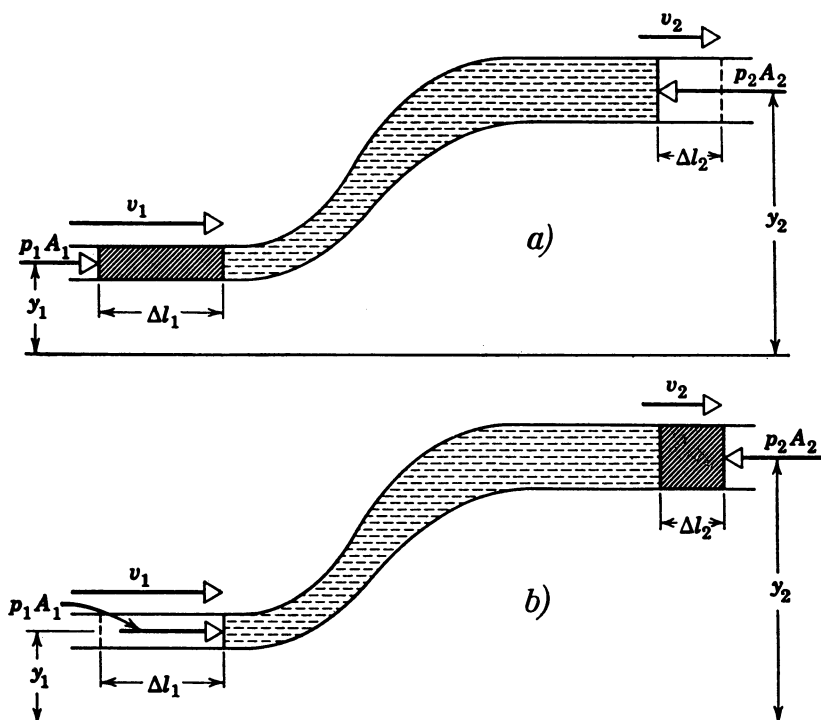
18-4. Równanie Bernoulliego*

Równanie Bernoulliego jest podstawowym równaniem mechaniki płynów. Nie jest ono, podobnie jak wszystkie równania mechaniki płynów, żadną nową zasadą, ale może być wyprowadzone z podstawowych praw mechaniki newtonowskiej. Wygodne okaże się wyprowadzenie równania z twierdzenia o pracy i energii (patrz paragraf 7-5). W rzeczy-

* W *Encyclopedia Britannica* (XI wydanie) znajdujemy ośmiu Bernoullich. Tu mamy na myśli Daniela Bernoulliego (1700—1782), chyba najślawniejszego członka owej sławnej rodziny.

wistości równanie Bernoulliego jest pewnym zapisem tego twierdzenia dla przepływu płynu.

Rozważmy nielepki, ustalony oraz nieściśliwy przepływ płynu przez rurę, czy też strugę prądu (rys. 18-5). Przedstawiona na rysunku część rury ma po lewej stronie stały przekrój A_1 . Z tej strony rura jest pozioma i znajduje się na wysokości y_1 ponad pewnym poziomem odniesienia. Stopniowo rura rozszerza się i podnosi, i po prawej stronie ma znowu stały przekrój A_2 . Również z tej strony rura jest pozioma i znajduje się na pewnej wysokości y_2 . Skoncentrujmy naszą uwagę na tej części płynu, która na rysunku jest zakreskowana ukośnie, bądź poziomo. Ten płyn nazwiemy „układem”. Rozważmy następnie ruch tego układu od położenia pokazanego w części (a) rysunku do położenia (b). We wszystkich punktach wąskiej części rury ciśnienie wynosi p_1 , a prędkość v_1 ; we wszystkich punktach części szerokiej ciśnienie wynosi p_2 , a prędkość v_2 .



Rys. 18-5. Pewna ilość płynu (zakreskowana ukośnie oraz zakreskowana poziomo) porusza się przez fragment rury od położenia przedstawionego na rysunku (a) do położenia przedstawionego na rysunku (b)

Twierdzenie o pracy i energii [patrz równanie (7-14)] mówi: *Praca wykonana przez wypadkową siłę działającą na układ jest równa zmianie energii kinetycznej tego układu.* Siłami, które wykonują pracę nad układem przedstawionym na rys. 18-5, są siły parcia, $p_1 A_1$ oraz $p_2 A_2$, działające na lewy i prawy koniec układu, oraz siła ciężkości. Zakładamy przy tym, że możemy pominąć siły lepkości. Porównując rys. 18-5a oraz b widzimy, że w trakcie przepływu płynu przez rurę sumaryczny efekt polega na podniesieniu części płynu, przedstawionej na rys. 18-5a przez pole zakreskowane ukośnie, do położenia przedstawionego na rys. 18-5b. Ilość płynu, zaznaczona przez kreskowanie poziome, nie zmienia się podczas przepływu.

Pracę W wykonaną nad układem przez siłę wypadkową możemy znaleźć w następujący sposób:

1. Praca wykonana nad układem przez siłę parcia $p_1 A_1$ wynosi $p_1 A_1 \Delta l_1$.
2. Praca wykonana nad układem przez siłę parcia $p_2 A_2$ wynosi $-p_2 A_2 \Delta l_2$. Zauważmy, że praca ta jest ujemna, co oznacza, że praca dodatnia została wykonana przez układ.
3. Praca wykonana nad układem przez siłę grawitacyjną jest związana z podnoszeniem (ukośnie zakreskowanego) płynu z wysokości y_1 na wysokość y_2 . Wynosi ona $-mg(y_2 - y_1)$, gdzie m jest masą płynu w jednym z (ukośnie zakreskowanych) pól. Praca ta również jest ujemna, ponieważ praca dodatnia została wykonana przez układ *przeciwko* sile ciężkości.

Dodając te trzy wyrazy znajdujemy pracę wykonaną przez siłę wypadkową *nad* układem

$$W = p_1 A_1 \Delta l_1 - p_2 A_2 \Delta l_2 - mg(y_2 - y_1).$$

Ale $A_1 \Delta l_1 (= A_2 \Delta l_2)$ jest objętością ukośnie zakreskowanego elementu płynu. Możemy ją zapisać jako m/ρ , gdzie ρ jest (stałą) gęstością płynu. Przypominamy, że oba elementy płynu mają jednakową masę i pisząc $A_1 \Delta l_1 = A_2 \Delta l_2$ założyliśmy, że płyn jest nieściśliwy. Przy tym założeniu mamy

$$W = (p_1 - p_2) \left(\frac{m}{\rho} \right) - mg(y_2 - y_1). \quad (18-4a)$$

Zmiana energii kinetycznej naszego elementu płynu wynosi

$$\Delta K = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2. \quad (18-4b)$$

Z twierdzenia o pracy i energii (równanie 7-14) otrzymujemy

$$W = \Delta K,$$

czyli

$$(p_1 - p_2) \left(\frac{m}{\rho} \right) - mg(y_2 - y_1) = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2. \quad (18-5a)$$

Związek ten można przekształcić do postaci

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2. \quad (18-5b)$$

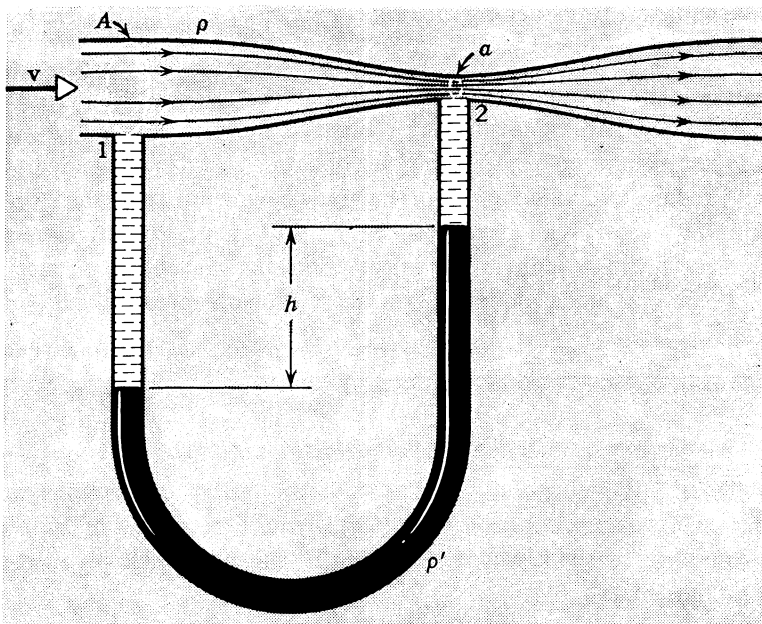
Indeksy 1 oraz 2 możemy opuścić, ponieważ odnoszą się do dowolnych dwóch położeń. Wówczas otrzymamy

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g y = \text{const.} \quad (18-6)$$

Równanie (18-6) nosi nazwę *równania Bernoulliego* dla przepływu ustalonego, nielepkiego oraz nieściśliwego. Zostało ono podane w roku 1738 przez Daniela Bernoulliego w dziele *Hydrodynamica*.

Równanie Bernoulliego stosuje się ściśle jedynie do przepływu ustalonego, gdyż występujące w nim wielkości są liczone wzdłuż linii prądu. Rozważana przez nas linia biegnie wzdłuż osi rury. Można jednak pokazać (patrz zadanie 25 dla pewnego szczególnego przypadku), że jeżeli przepływ jest bezwirowy, to stała w równaniu (18-6) jest jednakowa dla *wszystkich* linii prądu.

W płynie nielepkim oraz nieściśliwym nie możemy zmienić temperatury płynu za pomocą środków mechanicznych. W związku z tym równanie Bernoulliego w postaci przedstawionej powyżej odnosi się do procesów izotermicznych (o stałej temperaturze). Dla nielepkich płynów *ściśliwych* mechaniczna zmiana



Rys. 18-6. Zastosowanie rurki Venturiego do pomiaru prędkości przepływu płynu

temperatury jest jednak możliwa. Dodając do lewej strony równania (18-6) wyraz u , który przedstawia *energię wewnętrzną* płynu na jednostkę objętości, możemy uogólnić równanie na przypadek płynu ściśliwego. Nowy wyraz, a także ciśnienie p , przyjmują wartości zależne od temperatury.

Jeżeli przepływ jest *lepki*, to na płyn działają siły o charakterze tarcia i część wykonanej pracy, która w przypadku płynu nielepkiego przejawiała się jako zmiana energii kinetycznej, będzie teraz przejawiać się w postaci energii cieplnej płynu. Równanie (18-5a) musimy wtedy napisać w postaci

$$(p_1 - p_2) \left(\frac{m}{\rho} \right) - mg(y_2 - y_1) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 + Q,$$

gdzie Q oznacza energię cieplną wytworzoną w czasie lepkiego przepływu od punktu 1 do punktu 2. W praktyce równanie Bernoulliego może być odpowiednio zmodyfikowane przez użycie poprawek empirycznych uwzględniających zamianę energii mechanicznej na energię cieplną. Jeżeli jednak rura jest gładka i średnica jej jest duża w porównaniu z długością, a płyn ma małą lepkość i płynie powoli, to wytwarzaną energię cieplną można pominąć.

Jak statyka punktu materialnego jest szczególnym przypadkiem dynamiki punktu materialnego, tak statyka płynów jest szczególnym przypadkiem dynamiki płynów. Powinniśmy więc przyjąć bez zdziwienia fakt, że prawo zmian ciśnienia z wysokością w spoczywającym płynie jest zawarte, jako przypadek szczególny, w równaniu Bernoulliego. Dla przekonania się o tym rozważmy płyn w stanie spoczynku; wtedy $v_1 = v_2 = 0$ i równanie (18-5b) przyjmuje postać

$$p_1 + \rho g y_1 = p_2 + \rho g y_2$$

lub

$$p_2 - p_1 = -\rho g(y_2 - y_1),$$

co jest identyczne z równaniem (17-3).

W równaniu (18-6) wszystkie wyrazy mają wymiar ciśnienia (sprawdź to). Ciśnienie $p + \rho g h$, które panuje nawet wtedy, gdy nie ma żadnego przepływu ($v = 0$), nosi nazwę *ciśnienia statycznego*; wyraz $\frac{1}{2}\rho v^2$ nazywa się *ciśnieniem dynamicznym*.

18-5. Zastosowanie równania Bernoulliego i równania ciągłości

Równanie Bernoulliego może być użyte do wyznaczenia prędkości płynu na podstawie pomiarów ciśnienia. W przyrządach pomiarowych tego typu wykorzystywana jest następująca ogólna zasada: równanie ciągłości wymaga, żeby w zwężeniu prędkość płynu rosła; równanie Bernoulliego wskazuje następnie, że w tym miejscu ciśnienie musi spadać. Znaczy to, że dla rury poziomej $\frac{1}{2}\rho v^2 + p$ równa się pewnej stałej; jeżeli v rośnie i płyn jest nieściśliwy, to p musi maleć. Wniosek ten został już poprzednio wyciągnięty w paragrafie 18-3 z rozważań dynamicznych.

1. Rurka Venturiego

Rurka Venturiego (rys. 18-6) jest to przyrząd wstawiany do środka przepływającej cieczy w celu pomiaru prędkości przepływu. Ciecz o gęstości ρ płynie przez rurę o przekroju A . W pewnym miejscu rury tworzy się „wąskie gardło” o polu przekroju zmniejszonym do wartości a i dołącza się, w sposób pokazany na rysunku, ramiona manometru. Niech ciecz w manometrze, na przykład rtęć, ma gęstość ρ' . Stosując równanie Bernoulliego i równanie ciągłości do punktów 1 i 2, Czytelnik może wykazać, że prędkość przepływu w rurze o przekroju A wynosi

$$v = a \sqrt{\frac{2(\rho' - \rho)gh}{\rho(A^2 - a^2)}}.$$

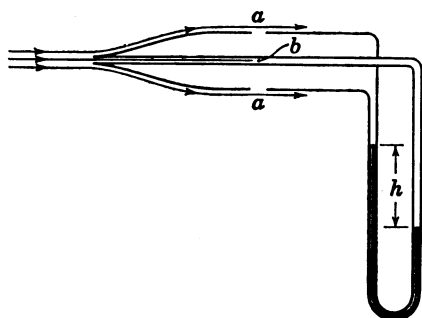
Jeżeli interesuje nas strumień objętościowy (natężenie przepływu) R , czyli objętość cieczy, która przepływa w ciągu sekundy przez dowolny punkt, to liczymy po prostu wyrażenie

$$R = vA.$$

2. Rurka Pitota

Rurka Pitota (rys. 18-7) jest przyrządem używanym do mierzenia prędkości przepływu gazu. Rozważmy gaz, na przykład powietrze, przepływający obok otworów w punktach a . Otwory te są równoległe do kierunku przepływu gazu i umieszczone na tyle daleko, że na zewnątrz otworów prędkość i ciśnienie mają wartości takie, jak dla swobodnego strumienia gazu. W połączonym z tymi otworami lewym ramieniu manometru ciśnienie jest wtedy równe statycznemu ciśnieniu strumienia gazu, p_a . Wylot prawego ramienia manometru jest prostopadły do kierunku ruchu strumienia. W punkcie b prędkość zostaje zredukowana do zera i gaz jest w tym miejscu nieruchomy. Ciśnienie p_b w punkcie b jest pełnym ciśnieniem uderzenia gazu. Stosując do punktów a i b równanie Bernoulliego, otrzymujemy

$$p_a + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_b,$$



Rys. 18-7. Schemat przekroju rurki Pitota

gdzie, jak widać na rysunku, p_b jest większe od p_a . Jeśli h jest różnicą wysokości cieczy w ramionach manometru, a ρ' gęstością cieczy w manometrze, to

$$p_a + \rho'gh = p_b.$$

Porównując oba związki otrzymujemy

$$\frac{1}{2}\rho v^2 = \rho'gh,$$

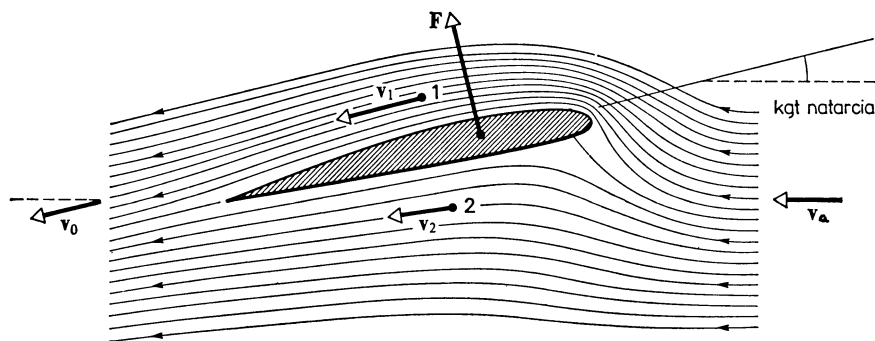
czyli

$$v = \sqrt{\frac{2gh\rho'}{\rho}},$$

co daje wartość prędkości gazu. Przyrząd ten może być wycechowany bezpośrednio w skali prędkości i nazywa się wtedy wskaźnikiem prędkości powietrza.

3. Dynamiczna siła nośna

Dynamiczna siła nośna jest siłą, która działa na takie ciała jak skrzydło samolotu, narta wodna lub śmigło helikoptera, i wywołana jest ruchem tych ciał w jakimś płynie. Siłę tę musimy odróżniać od *statycznej siły nośnej*, która jest siłą wyporu działającą na balon lub górę lodową zgodnie z prawem Archimedes'a (paragraf 17-4).



Rys. 18-8. Linie prądu wokół płatu nośnego. Prędkość zbliżającego się powietrza, v_a , jest pozioma. Prędkość powietrza oddalającego się, v_0 , ma składową skierowaną do dołu. I tak, ponieważ płatek popchnął powietrze na dół, więc powietrze musiało popchnąć płatek do góry, zgodnie z trzecią zasadą Newtona. Reprezentuje to siła nośna F

Rysunek 18-8 przedstawia linie prądu wokół płatu nośnego (przekroju skrzydła) przymocowanego do samolotu*. Wybierzmy samolot jako nasz układ odniesienia, tak jak w doświadczeniach wewnątrz tunelu aerodynamicznego. Przypuśćmy, że powietrze opływa skrzydło od strony prawej na lewo.

Kąt natarcia skrzydła jest przyczyną odchylenia ruchu powietrza w dół. Reakcją na tę skierowaną do dołu siłę, z jaką skrzydło działa na powietrze, jest skierowana w górę siła wyporu, F , wywierana przez powietrze na skrzydło, zgodnie z trzecią zasadą Newtona.

* Patrz artykuł: Norman F. Smith, Bernoulli and Newton in Fluid Mechanics, *The Physics Teacher*, November 1972. Patrz również artykuł: Albert Einstein, The Flettner Ship, w książce: *Essays in Science*, Philosophical Library, New York. Statek Flettnera, podobnie jak żagłówka, pobiera moc napędową z wiatru. Zamiast żagla ma on duży wałek wprawiany za pomocą małego motorka w ruch obrotowy dookoła pionowej osi. Wynikająca stąd dynamiczna siła „nośna” (pozioma w tym wypadku) ciągnie statek.

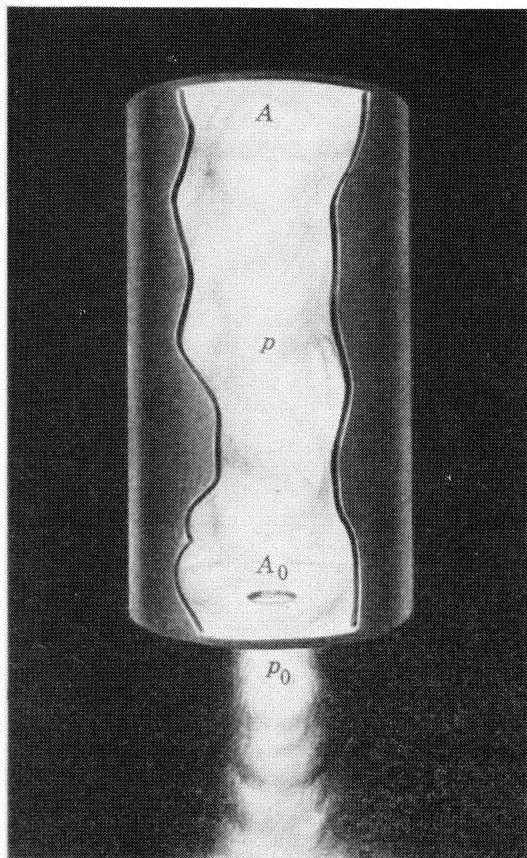
Obraz linii prądu zgadza się z tym rozumowaniem. Ponad skrzydłami (punkt 1) linie prądu są rozmieszczone gęściej niż pod skrzydłem (punkt 2). Tak więc $v_1 > v_2$ i, zgodnie z prawem Bernoulliego, $p_1 < p_2$, co musi być prawdą, jeśli ma wystąpić siła nośna.

4. Siła ciągu rakiety

Jako ostatni przykład, obliczymy siłę ciągu rakiety wywołaną przez ucieczkę wyrzucanych gazów. Rozważmy zbiornik (rys. 18-9) o przekroju A , wypełniony gazem o gęstości ρ i pod ciśnieniem p . Niech zbiornik ten ma u swojej podstawy otwór o przekroju A_0 . Chcemy znaleźć prędkość v_0 ucieczki gazów przez ten otwór.

Zapišmy równanie Bernoulliego [równanie (18-5b)] w postaci

$$p_1 - p_2 = g\rho(y_2 - y_1) + \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2).$$



Rys. 18-9. Płyn wytryskujący ze zbiornika

Gęstość gazu jest tak mała, że możemy pominąć zmiany ciśnienia z wysokością wewnątrz zbiornika (patrz paragraf 17-3). Tak więc, jeżeli przez p oznaczymy ciśnienie p_1 w zbiorniku, a przez p_0 ciśnienie atmosferyczne p_2 bezpośrednio na zewnątrz otworu, to mamy zależność

$$p - p_0 = \frac{1}{2}\rho(v_0^2 - v^2)$$

lub

$$v_0^2 = \frac{2(p - p_0)}{\rho} + v^2, \quad (18-7)$$

gdzie v jest prędkością przepływu gazu wewnątrz komory, a v_0 — *prędkością wypływu* gazu przez otwór. Chociaż gazy są ściśliwe, a przepływ może stać się turbulentny, to dla niezbyt dużych ciśnień i prędkości wypływu przepływ możemy traktować jako ustalony i nieściśliwy.

Założmy teraz ciągłość masy w przepływie (w silniku rakiety wymagane to jest osiągnięte, kiedy masa ulatującego gazu jest równa masie gazu powstającego w czasie spalania paliwa). Wówczas (przy założeniu stałej gęstości)

$$Av = A_0 v_0.$$

Jeżeli otwór jest bardzo mały, tak że $A_0 \ll A$, to $v_0 \gg v$ i w równaniu (18-7) możemy pominąć v^2 w porównaniu z v_0^2 . Wtedy prędkość wypływu wynosi

$$v_0 = \sqrt{\frac{2(p-p_0)}{\rho}}. \quad (18-8)$$

Jeżeli nasz zbiornik jest komorą wydechową silnika rakiety, to siła ciągu (paragraf 9-7) wynosi $v_0 dM/dt$. Ale masa gazu wypływającego w czasie dt wynosi $dM = \rho A_0 v_0 dt$, tak że

$$v_0 \frac{dM}{dt} = v_0 \rho A_0 v_0 = \rho A_0 v_0^2,$$

skąd, wykorzystując związek (18-8), siła ciągu jest równa

$$2A_0(p-p_0). \quad (18-9)$$

18-6. Zasada zachowania pędu i momentu pędu w mechanice płynów

Przy wyprowadzaniu zasad zachowania pędu i momentu pędu w newtonowskiej mechanice punktów materialnych wykorzystuje się bezpośrednio trzecią zasadę dynamiki Newtona. Ze względu na tę zasadę, w układach mechanicznych siły wewnętrzne i ich momenty równoważą się. Pozostają jedynie siły zewnętrzne zmieniające pęd oraz momenty sił zewnętrznych zmieniające moment pędu układu. Siły wewnętrzne są dla płynu reprezentowane przez ciśnienie wewnątrz płynu. Ale już samo to pojęcie zawiera, choć niejawnie, trzecią zasadę Newtona. Wywołana przez ciśnienie siła działająca na dowolny element powierzchni w pewnym kierunku równa się co do wartości sile działającej na ten element w kierunku przeciwnym. Każda z tych dwóch sił jest poza tym przyłożona w tym samym miejscu, a mianowicie do rozważanego elementu powierzchni. Obie siły muszą więc mieć tę samą linię działania. W związku z tym, w równaniach opisujących czasowe zmiany pędu oraz momentu pędu płynu ciśnienia wewnętrzne będą się znosić. Możemy stąd wywnioskować, że szybkość zmian całkowitego pędu poruszającego się płynu o objętości V jest równa całkowitej *sile zewnętrznej* działającej na płyn. Podobnie szybkość zmian całkowitego momentu pędu poruszającego się płynu o objętości V równa jest całkowitemu *momentowi sił zewnętrznych* działającemu na płyn. Zasady zachowania pędu i momentu pędu są więc spełnione dla płynów.

18-7. Pole przepływu

W rozdziale poświęconym grawitacji widzieliśmy, jak za pomocą pola można opisać zjawiska fizyczne zachodzące w pobliżu mas. Można uważać, że z każdym punktem takiego pola związany jest wektor $\mathbf{g}$, będący siłą grawitacyjną działającą w tym punkcie na jednostkę masy. Alternatywnie, z każdym punktem w przestrzeni możemy też łączyć pewną wielkość skalarną, a mianowicie potencjał grawitacyjny V . Przez wszystkie punkty mające

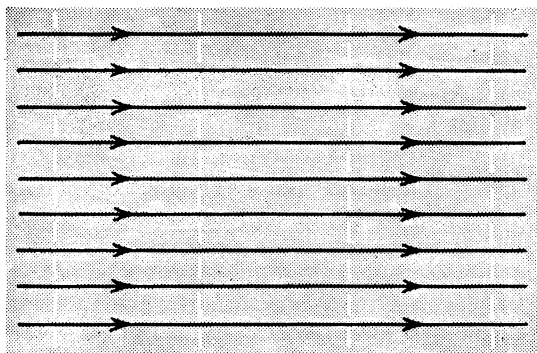
ten sam potencjał możemy przeprowadzić powierzchnię zwaną *powierzchnią ekwipotencjalną*. Wykreślamy wiele takich powierzchni; potencjał na jednej powierzchni różni się o stałą wielkość od potencjału na powierzchni następnej itd. Wtedy siła grawitacyjna w dowolnym punkcie jest skierowana wzdłuż linii przechodzącej przez ten punkt prostopadłe do wykreślonych powierzchni. Wartość siły obliczamy z szybkości zmian potencjału z odległością w tym kierunku, którą określają odstęp między powierzchniami ekwipotencjalnymi. Rysując linie sił możemy sobie jasno wyobrazić, w jaki sposób obecność masy wpłynęła na własności przestrzeni.

W dynamice płynów możemy zupełnie podobnie przedstawić zjawiska fizyczne zachodzące wewnątrz płynu za pomocą pola przepływu. Pole przepływu jest, w ogólności, polem wektorowym. Z każdym punktem przestrzeni wiążemy wielkość wektorową, a mianowicie prędkość przepływu $\mathbf{v}$ w tym punkcie. Dla przepływu ustalonego pole przepływu jest stacjonarne. Oczywiście, nawet w tym wypadku poszczególne cząstki płynu traktowane indywidualnie mogą mieć zmieniającą się prędkość w trakcie ruchu od punktu do punktu w tym polu. Pole przepływu podaje takie właściwości przestrzeni, z których wnioskujemy o zachowaniu się cząstek w tej przestrzeni. *Przepływem potencjalnym* nazywamy przepływ bezwirowy oraz ustalony. Wtedy prędkość przepływu $\mathbf{v}$ może być związana z pewnym potencjałem prędkości ψ zupełnie tak samo, jak w grawitacji $\mathbf{g}$ może być związane z potencjałem grawitacyjnym V . Jeżeli wykreślimy powierzchnie równego potencjału prędkości, to możemy z nich wyznaczyć $\mathbf{v}$ zupełnie tak samo, jak wyznaczane jest $\mathbf{g}$ z powierzchni równego potencjału grawitacyjnego. Pole dla przepływu potencjalnego jest więc podobne do pola sił zachowawczych.

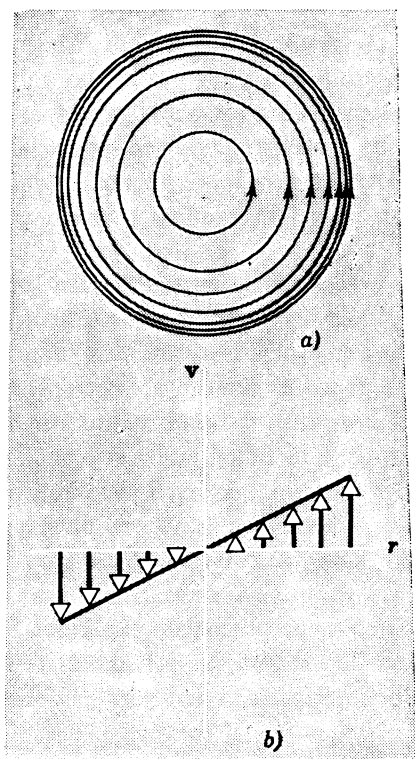
Masę płynącego płynu możemy zawsze podzielić na strugi prądu. Kiedy przepływ jest ustalony, wtedy strugi zachowują swój kształt i płyn znajdujący się w pewnej chwili czasu w jednej z nich pozostanie wewnątrz niej zawsze. Widzieliśmy, że wewnątrz strugi prądu prędkość przepływu jest równoległa do tej strugi i ma wartość odwrotnie proporcjonalną do pola przekroju [równanie (18-1)]. Przypiszmy strugom takie przekroje, żeby stała proporcjonalności była dla wszystkich jednakowa; przyjmijmy dla tej stałej wartość jednostkową. Oznacza to, że strumień objętościowy jest dla wszystkich strug jednakowy i jest strumieniem jednostkowym. Wtedy z pola przekroju strug prądu można określić wartość prędkości przepływu. Istnieje również inna, równoważna procedura polegająca na zbudowaniu jednostkowego pola prostopadłego do kierunku przepływu i narysowaniu przez to pole tylu linii prądu, ile jednostek ma wartość prędkości w tym punkcie.

Rozważmy kilka przykładów pola przepływu. Dla wygody w rysowaniu będziemy zajmować się jedynie przykładami *dwuwymiarowymi*. W przykładach tych prędkość przepływu jest w dowolnym punkcie jednakowa dla wszystkich punktów leżących na prostej prostopadłej do płaszczyzny rysunku.

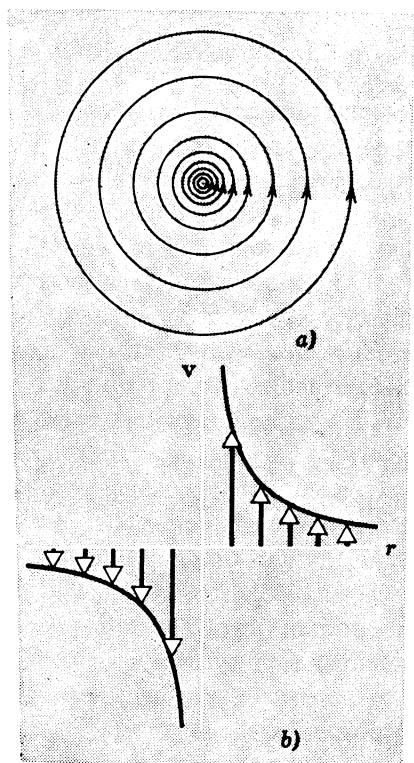
Na rysunku 18-10 narysowaliśmy *jednorodne pole przepływu*. Wszystkie linie prądu są tu równoległe



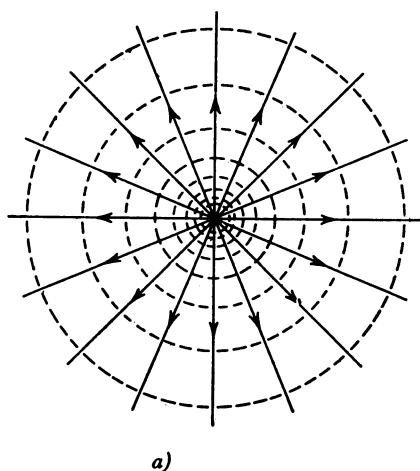
Rys. 18-10. Linie prądu (poziome) i powierzchnie równego potencjału prędkości (pionowe) dla jednorodnego pola przepływu



Rys. 18-11. (a) Pole przepływu dla jednostajnego obrotu. (b) Zmiana prędkości płynu przy oddalaniu się od centrum



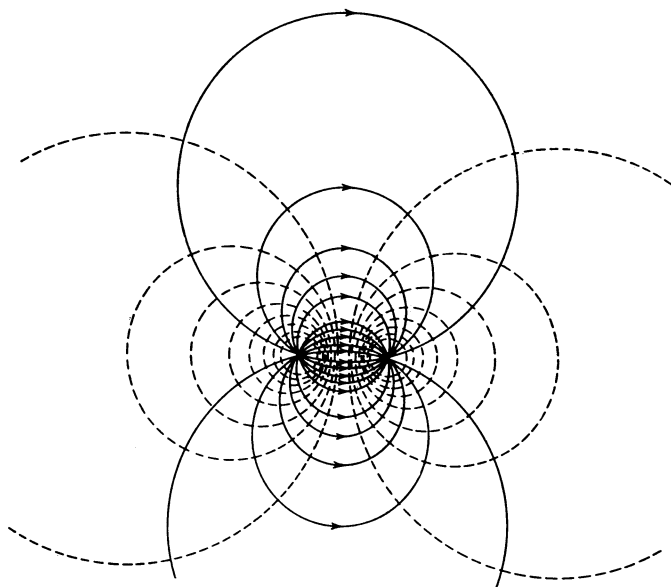
Rys. 18-12. (a) Pole przepływu dla wiru. (b) Zmiana prędkości płynu przy oddalaniu się od centrum



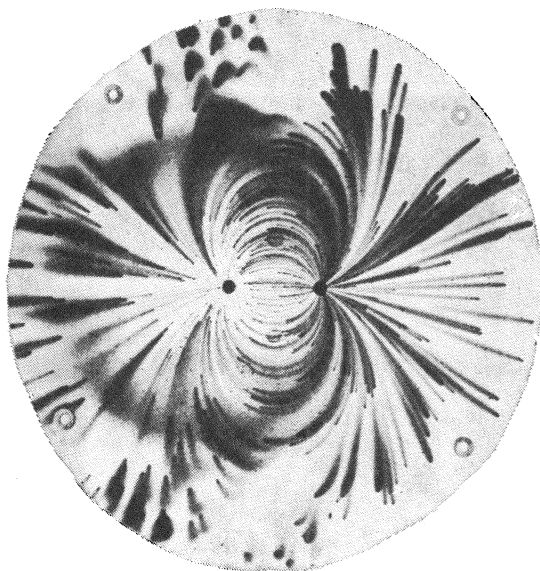
Rys. 18-13. (a) Wypływ z liniowego źródła punkтового. (b) Szkic takiego wypływu. Szkic wykonano przepuszczając wodę między poziomą płytką szklaną i poziomą płytką gipsową. Na rysunku (b) woda wypływa z otworu wykonanego w środku płytki gipsowej i płynie w kierunku brzegów. Kierunek przepływu jest widoczny, gdyż gips posypano kryształkami nadmanganianu potasu, które rozpuszczały się i zabarwiały wodę na kolor ciemnopurpurowy. (Powyższy szkic przepływu płynu został sfotografowany przez profesora A. D. Moore'a z Uniwersytetu Michigan i zamieszczony w książce W. E. Rogersa, *Introduction to Electric Fields*, McGraw-Hill Book Co., 1954)

i prędkość przepływu v jest we wszystkich punktach jednakowa. Widzieliśmy już, że istnieją dwa równoważne sposoby znajdowania, na podstawie takich pól, względnych wartości prędkości przepływu: (a) z szerokości strug prądu oraz (b) z odległości między liniami równego potencjału prędkości. Tę ostatnią metodę można stosować jedynie do bezwrotnych przepływów ustalonych. Dla takich przepływów linie równego potencjału prędkości rysujemy w postaci linii przerywanych.

Na rysunku 18-11 przedstawiliśmy pole dla *jednostajnego obrotu* (patrz zadanie 18, rozdz. 17). W tym przypadku v jest proporcjonalne do r . Na rysunku 18-12 narysowaliśmy pole przepływu wiru. Teraz v



a)



b)

Rys. 18-14. (a) Przepływ dla dipola liniowego. Źródło znajduje się po stronie lewej, ściek po stronie prawej. (b) Szkic takiego przepływu. (Szkic został sfotografowany przez profesora A. D. Moore'a z Uniwersytetu Michigan i zamieszczony w książce W. E. Rogersa, *Introduction to Electric Fields*, McGraw-Hill Book Co., 1954)

jest proporcjonalne do $1/r$ (patrz zadanie 29). Zauważmy, że chociaż zarówno obrót jednostajny, jak i wir są reprezentowane przez kołowe linie prądu, to jednak są to całkowicie różne rodzaje przepływów. Kształt linii prądu daje, naturalnie, informację niepełną; trzeba znać także odstępy między nimi.

Na rysunku 18-13 widzimy pole przepływu źródła. Wszystkie linie prądu są skierowane od środka, wzdłuż promienia. Źródło, przedstawione jako linia przechodząca przez środek prostopadle do płaszczyzny rysunku, wysyła w jednostce czasu pewną masę Q płynu. Pole przepływu dookoła liniowego ścieku jest takie samo, jak pole dla źródła, z wyjątkiem zwrotu linii prądu, które są skierowane wzdłuż promienia do środka.

Dla układu utworzonego przez nieznacznie oddalone od siebie źródło liniowe i liniowy ściek, o tych samych natężeniach Q i $-Q$, otrzymujemy pole złożone, zwane *połem przepływu dipola liniowego* (rys. 18-14).

Jak się później przekonamy, pole elektrostatyczne, pole magnetyczne oraz pole przepływu prądu elektrycznego są również polami wektorowymi. W związku z tym pole jednorodne (rys. 18-10) odpowiada polu elektrycznemu kondensatora płaskiego, pole źródła lub pole ścieku (rys. 18-13) odpowiada polu elektrycznemu kondensatora cylindrycznego lub też prostoliniowego przewodnika naładowanego dodatnio lub ujemnie, a pole dipola liniowego (rys. 18-14) odpowiada polu elektrycznemu dwóch przeciwnie naładowanych przewodników. We wszystkich tych przypadkach pole przepływu jest polem potencjalnym, a pole elektryczne jest zachowawcze.

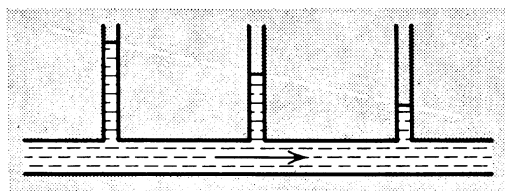
Pole jednorodne z rys. 18-10 przedstawia również pole magnetyczne wewnątrz cewki. Pole wiru z rys. 18-12 przedstawia pole magnetyczne dookoła prostego przewodnika z prądem. To ostatnie pole jest przykładem pola wirowego (dookoła osi wiru).

Ze względu na podobieństwa między polami płynów i polami elektromagnetycznymi możemy często określić pole przepływu, które trudno obliczyć współczesnymi metodami matematycznymi, za pomocą pewnych pomiarów wykonywanych na odpowiednich przyrządach elektrycznych.

Jak widzieliśmy w tym rozdziale, podstawowe idee polowe i zasady zachowania znajdują zastosowanie w wielu dziedzinach fizyki. Spotkamy się z nimi jeszcze wiele razy.

Pytania

1. Opisać krótko i zilustrować przykładem sens następujących przepływów płynu: (a) ustalony, (b) nieustalony, (c) wirowy, (d) bezwirowy, (e) ściśliwy, (f) nieściśliwy, (g) lepki, (h) nielepki.
2. Czy dwóm powierzchniom, z których jedna jest powierzchnią płynu, można przypisać współczynnik tarcia statycznego?
3. Jak wiadomo, z zalutowanej puszki, w której wybito dwie dziury, ciecz wypłynie szybciej i gładszym strumieniem niż z puszki, w której zrobiono jedną dziurę. Wyjaśnij to.
4. Wymienić wszystkie założenia czynione przy wyprowadzaniu równania Bernoulliego (18-6).
5. Opisać siły działające na element płynu podczas jego przepływu przez rurę o zmiennym przekroju.
6. Na pokazie lekcyjnym, za pomocą pionowego strumienia powietrza „zawiesza się” w powietrzu piłeczkę pingpongową. Czy równowaga piłki jest stała, chwiejna, czy też obojętna? Wyjaśnić to.
7. Poziom cieczy w rurach ciśnieniowych (rys. 18-15) wykazuje, że ciśnienie spada wzdłuż kanału nawet w przypadku, gdy ma on stały przekrój i gdy przepływająca ciecz jest nieściśliwa. Wyjaśnić to.



Rys. 18-15. Pytanie 7

8. Im wyższy komin tym lepszy jest ciąg odprowadzający dym z paleniska. Wyjaśnić to. Dlaczego dym nie wpada do pokoju, w którym znajduje się palenisko?

9. (a) Wyjaśnić, w jaki sposób należy rzucić piłkę do palanta, żeby poleciała po torze zakrzywionym w prawo lub w lewo. Czy dla takiej kręjącej się piłki uzasadnione jest zastosowanie równania Bernoulliego (patrz odnośnik na str. 452 do artykułu Smitha)? (b) Dlaczego rzut tego rodzaju wykonany piłką tenisową jest łatwiejszy niż rzut piłką palantową?

10. Nie tylko piłka o szorstkiej powierzchni, ale również piłka gładka może być rzucona tak, by zakreślać podczas lotu. Jednak piłki gładkie skreślają w przeciwną stronę. Dlaczego? (Patrz artykuł: Lyman J. Briggs, Effect of Spin and Speed on the Curve of a Baseball, and the Magnus Effect for Smooth Spheres, *American Journal of Physics*, November 1959.)

11. Dwie łódki poruszające się równolegle w tym samym kierunku przyciągają się nawzajem. Dwa samochody jadące równolegle również się przyciągają. Wyjaśnić zjawiska tego typu na podstawie równania Bernoulliego.

12. Działaniu jakich sił wywołanych przez ruch powietrza trzeba zapobiegać przy budowie drapaczy chmur? Jak się to robi? (Patrz artykuł: Carl W. Condit, The Wind Bracing of Buildings, *Scientific American*, February 1974.)

13. Czy działanie spadochronu opóźniające spadek swobodny może być wyjaśnione za pomocą równania Bernoulliego?

14. Wewnątrz poziomej rury, mającej w pewnym miejscu zwężenie, płynie ciecz. Do szerokiej i do wąskiej części rury podłączono manometry o pionowych ramionach. Czy ciecz w manometrach podniesie się, czy też opadnie, jeżeli zostanie zamknięty kurek wylotowy rury? Uzasadnić odpowiedź.

15. Strumień wody z kranu staje się węższy podczas spadania. Wyjaśnić to.

16. Czy możesz wyjaśnić, dlaczego w pionowej rurze woda płynie w dół ciągłym strumieniem, podczas gdy przy spadaniu swobodnym rozpada się ona na krople?

17. Jak naprawdę działa urządzenie do splukiwania w toaletach? (Patrz: W. Reyburn, Englewood Cliffs, *Flushed with Pride: The Story of Thomas Crapper*, N. J., Prentice-Hall, 1969.)

18. Czy możesz wyjaśnić, dlaczego przedmiot spadający z dużej wysokości osiąga ustaloną prędkość graniczną?

19. Równanie Bernoulliego (18-6) jest zapisem zasady zachowania energii dla ruchów płynów. Postaraj się, patrząc na rurkę Venturiego (str. 451), znaleźć formalny związek ze zmianami energetycznymi zachodzącymi w diabelskim młynie, gdy opada on w dolinę i wznosi się po drugiej stronie.

20. Niektórzy ludzie wyjmują listy z kopert odcinając pasek papieru z wąskiego końca koperty, trzymając mocno ten koniec i dmuchając weń. Czy równanie Bernoulliego gra tu jakąś rolę? Wyjaśnić to.

21. Czy łatwiej jest samolotowi startować pod wiatr, czy z wiatrem? Jak jest łatwiej lądować?

22. Czy różnica ciśnień między dolną i górną powierzchnią skrzydła zależy od wysokości, na której porusza się samolot? Wyjaśnić to.

23. Gromadząca się na skrzydle samolotu warstwa lodu może zmieniać kształt skrzydła w taki sposób, że siła nośna zostaje znacznie zredukowana. Wyjaśnić to.

24. W jaki sposób samolot może latać spodem do góry?

25. Pewien inżynier lotnictwa twierdzi, że potrafi zaprojektować helikopter, który będzie mógł lądować miękko bez wywoływania ciągu powietrza zstępującego. Czy jest to możliwe? Wyjaśnić swój pogląd.

26. „Charakterystyczny bananowy kształt większości powracających bumerangów nie ma prawie żadnego związku z ich zdolnością do wracania... Podstawową sprawą jest przekrój ramienia bumerangu, który z jednej strony musi być bardziej wypukły niż z drugiej, podobnie do profilu skrzydła samolotu”. (Z artykułu Felixa Hessa, The Aerodynamics of Boomerangs, *Scientific American*, November 1968.) Wyjaśnić to.

27. Co podtrzymuje lot szybujących ptaków? (Patrz artykuł: C. D. Cone, The Soaring Flight of Birds, *Scientific American*, April 1962.)

28. Dlaczego w równaniu (18-9) pojawia się czynnik „2”, a nie „1”? Można by naiwnie oczekiwać, że siła ciągu równa jest po prostu różnicy ciśnień pomnożonej przez pole powierzchni, czyli $A_0(p - p_0)$.

29. Niszczące działanie cyklonu (trąby powietrznej) jest większe blisko centrum niż w okolicy brzegu. Wyjaśnić to.

30. Kiedy wyciągnie się zatyczkę w napełnionej wannie, woda wypływa z wanny kręcąc się jak mały wir wodny. Okazuje się, że prędkość kątowna elementu płynu względem przechodzącej przez ujście pionowej osi jest największa blisko ujścia. Wyjaśnić to.

31. Czy prawdą jest, że na półkuli północnej woda wypływa z wanny wirem obracającym się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, podczas gdy na półkuli południowej obrót jest zgodny z ruchem wskazówek. Jeśli tak, wyjaśnić to zjawisko i przewidzieć co będzie się dziać na równiku. (Patrz artykuł: Ascher H. Shapiro, Bath-Tub Vortex, *Nature*, December 15, 1962.)

32. Im dłuższa deska i płytsza woda, tym dalej deska surfingowa ślizga się po wodzie. Wyjaśnić to. (Patrz artykuł: R. D. Edge, The Surf Skimmer, *American Journal of Physics*, July 1968.)

33. Woda wylewana z czajnika do herbaty lubi ściekać po dolnej stronie dzióbka. Wyjaśnić to. (Patrz artykuł: Markus Reiner, The Teapot Effect... a Problem, *Physics Today*, September 1956.)

34. Świstaki amerykańskie żyją w koloniach wewnątrz połączonych nor tworzących złożony podziemny system. Aby się nie udusić, muszą rozwiązać problem utrzymania odpowiedniego zaopatrzenia w powietrze. Radzą sobie z tym budując stożkowe kopce ziemne dookoła niektórych spośród wielu wylotów nor. Za pomocą równania Bernoulliego (18-6) wyjaśnić, jak działa taki system wentylacji. Zwróćmy uwagę, że ze względu na siły lepkości szybkość wiatru na prerii jest na poziomie gruntu mniejsza niż kilka nawet centymetrów wyżej. (Patrz: *New Scientist*, p. 191, 27 January 1972.)

35. Użyć kółka z łopatkami (rys. 18-1) jako kryterium do określenia, które pola przepływu (rysunki 18-10 do 18-14) są wirowe.

36. W przepływie ustalonym wektor prędkości $\mathbf{v}$ jest w dowolnym punkcie stały. Wobec tego, czy w takim przepływie może się odbywać przyspieszony ruch cząstek płynu? Przedyskutować to.

Zadania

Paragraf 18-3

1. Gumowy wąż ogrodowy o średnicy wewnętrznej wynoszącej 2 cm połączony jest z rozpryskiwaczem, który składa się z oprawki zaopatrzonej w 24 otwory, każdy o średnicy 0,15 cm. Z jaką prędkością wylatuje woda z rozpryskiwacza, jeżeli w wężu ma ona prędkość 1 m/s?

Odp.: 7,4 m/s.

2. Jaka praca jest wykonana przez ciśnienie podczas przepychania $1,4 \text{ m}^3$ wody przez rurę o średnicy 13 mm, jeżeli różnica ciśnień na obu końcach rury wynosi 1 kg/cm^2 ($1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$)?

3. Z kranu o średnicy wewnętrznej d płynie ciągłym strumieniem woda z prędkością początkową v_0 . Znaleźć zależność średnicy strumienia od odległości h od wylotu. (Zaniedbać opór powietrza i założyć, że nie tworzą się krople.)

Odp.: $d[v_0/\sqrt{v_0^2 + 2gh}]^{1/2}$.

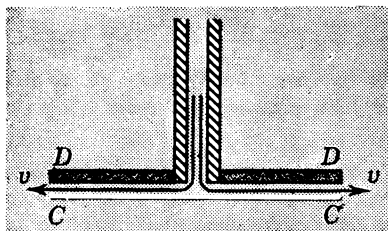
4. Z zalanej piwnicy pompuje się wodę z prędkością 5,0 m/s za pomocą jednorodnego węża o promieniu 1,0 cm. Wąż wychodzi przez okno znajdujące się 3,0 m nad poziomem wody. Z jaką mocą działa pompa?

Paragraf 18-4

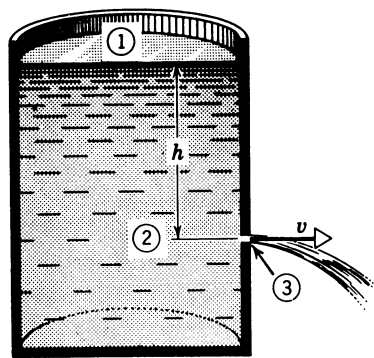
5. Do końca pustej rury przymocowano krążek DD . Kiedy przez rurę dmucha się powietrze, wtedy krążek ten przeciąga kartę CC . Niech pole powierzchni karty wynosi A , a średnia prędkość powietrza pomiędzy CC a DD wynosi v (rys. 18-16); obliczyć siłę wypadkową działającą do góry na CC . Pominąć ciężar karty.

Odp.: $\frac{1}{2}\rho v^2 A$, gdzie ρ jest gęstością powietrza.

6. W poziomym rurociągu naftowym o stałym przekroju spadek ciśnienia między dwoma punktami oddalonymi o 500 m wynosi $0,5 \text{ kg/cm}^2$. Ile wynosi strata energii na metr sześcienny ropy na jednostkę długości rurociągu?



Rys. 18-16. Zadanie 5



Rys. 18-17. Zadanie 7

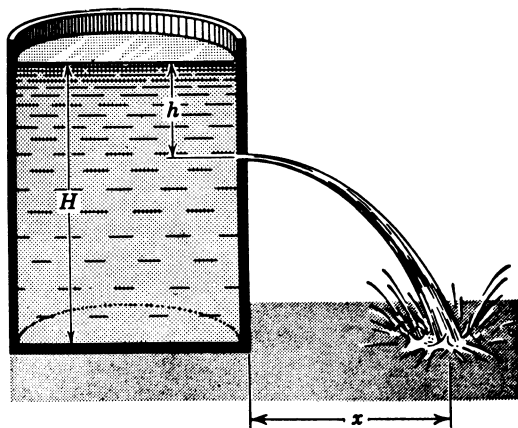
7. Rysunek 18-17 przedstawia wodę wypływającą z dużego zbiornika przez otwór umieszczony w odległości h poniżej poziomu wody. (a) Zastosować równanie Bernoulliego do linii prądu łączącej punkty 1, 2 i 3 i wykazać, że prędkość wpływu wody wynosi

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Związek ten jest znany jako prawo Torricellego, (b) Jak wysoko wzniosłby się strumień wody, gdyby otwór był skierowany do góry? (c) Jak wpłynęłaby na ruch strumienia lepkość lub turbulencja?

Odp.: (b) Wzniosłby się na wysokość h .

8. Zbiornik jest napełniony wodą do wysokości H . W jednej ze ścian, w odległości h poniżej powierzchni wody zrobiono otwór (rys. 18-18). (a) Pokazać, że odległość x od podstawy ściany, na której strumień wody uderza o podłogę wynosi $x = 2\sqrt{h(H-h)}$. (b) Czy można by zrobić otwór na innej głębokości i otrzymać taki sam zasięg dla drugiego strumienia? Jeśli tak, to na jakiej głębokości?



Rys. 18-18. Zadanie 8

9. Górna powierzchnia wody w rurze ciśnieniowej znajduje się na wysokości H nad poziomem ziemi. (a) Na jakiej głębokości h powinien być umieszczony mały otwór, by wypływający zeń poziomy strumień wody rozbił się o ziemię w maksymalnej odległości od podstawy rury? (b) Ile wynosi ta maksymalna odległość?

Odp.: (a) $H/2$, (b) H .

10. (a) Rozważmy powietrze zatrzymane przed przednim brzegiem skrzydła i powietrze przesuwające się z prędkością v ponad powierzchnią tego skrzydła. Zakładając, że powietrze jest nieściśliwe i że ciśnienie na przednim brzegu jest w przybliżeniu równe atmosferycznemu, znaleźć największą możliwą wartość prędkości v na linii prądu tego przepływu; skorzystać z równania Bernoulliego. Dla gęstości powietrza przyjąć wartość $1,2 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3$. (b) Jak różni się ta prędkość od prędkości dźwięku 1240 km/h? Czy możesz wyjaśnić różnicę? Dlaczego między tymi wielkościami powinien być jakikolwiek związek?

11. Jaka będzie różnica poziomów wody w U-rurce, jeśli dmuchać z prędkością 15 m/s ponad jednym z jej wylotów? Założyć, że gęstość powietrza wynosi $1,2 \text{ kg/m}^3$.

Odp.: 1,4 cm.

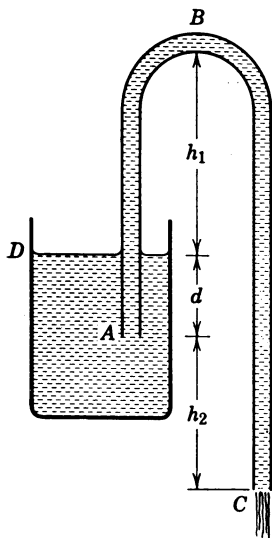
12. Syfon jest urządzeniem do usuwania cieczy ze zbiornika, który nie może być przechylany. Działa on w sposób pokazany na rys. 18-19. Rurka musi być wstępnie napełniona, ale od tego momentu ciecz wypływa dotąd aż jej poziom opadnie poniżej otworu A rurki. Ciecz ma gęstość ρ i zaniedbywalną lepkość. (a) Z jaką prędkością wypływa ciecz z rurki (w punkcie C)? (b) Jakie ciśnienie panuje w cieczy w najwyższym punkcie B? (c) Jaka jest największa możliwa wysokość h_1 na jaką syfon może podnieść wodę?

Paragraf 18-5

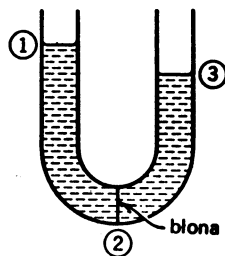
13. W celu wyznaczenia prędkości samolotu względem powietrza (w temperaturze 0°C) na skrzydle przymocowano rurkę Pitota. Rurka zawiera alkohol i wykazuje różnicę poziomów wynoszącą 26 cm. Jaka jest prędkość samolotu względem powietrza? Gęstość alkoholu wynosi $0,81 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.

Odp.: 200 km/h.

14. Czasem modele torped wypróbowuje się w poziomej rurze, przez którą płynie woda, zupełnie podobnie jak modele samolotów w tunelu aerodynamicznym. Rozważmy kołową rurę o średnicy wewnętrznej równej 25 cm i model torpedy o średnicy 5 cm umieszczony wzdłuż osi tej rury. Torpeda ma być wypróbowana przy prędkości opływającej ją wody wynoszącej 2,5 m/s. (a) Z jaką prędkością musi płynąć woda w niezwązonej przez torpedę części rury? (b) Ile wyniesie różnica ciśnień między zwężoną i niezwążoną częścią rury?



Rys. 18-19. Zadanie 12



Rys. 18-20. Zadanie 19

15. Woda porusza się z prędkością 5,0 m/s przez rurkę o przekroju 4,0 cm². Rurka stopniowo obniża się o 10 m i zwiększa swój przekrój do 8,0 cm². (a) Jaka jest prędkość przepływu na niższym poziomie? (b) Jakie ciśnienie panuje na niższym poziomie, jeśli na górnym wynosi 1,50 · 10⁵ Pa?

Odp.: (a) 2,5 m/s; (b) 2,6 · 10⁵ Pa.

16. Przypuśćmy, że dwa zbiorniki 1 i 2, z których każdy ma duży otwór u góry, zawierają dwie różne ciecze. W bocznej ścianie każdego zbiornika, w tej samej odległości h poniżej powierzchni cieczy zrobiono małą dziurkę, przy czym dziurka w zbiorniku 1 ma przekrój dwukrotnie mniejszy niż dziurka w zbiorniku 2. (a) Jaki jest stosunek gęstości obu cieczy ρ_1/ρ_2 , jeżeli zaobserwowano, że strumień masy jest dla obu dziurek jednakowy? (b) Ile wynosi stosunek natężeń przepływu (strumieni objętościowych) z obu zbiorników? (c) Do jakiej wysokości ponad dziurkę w drugim zbiorniku trzeba dolać (lub odlać) ciecz na to, by wyrównać natężenia przepływu?

17. Mały samolot ma powierzchnię skrzydła (jednego) wynoszącą 9,3 m². Przy pewnej szybkości powietrza, opływa ono górną powierzchnię skrzydła z prędkością 49 m/s, zaś dolną z prędkością 40 m/s. Ile waży ten samolot? Założyć, że samolot porusza się ze stałą prędkością i że siła wyporu wywołana przez kadłub i ogon jest mała. Przedyskutować siłę wyporu w trzech przypadkach, przy tej samej prędkości powietrza: (a) lot poziomy, (b) wznoszenie się pod kątem 15° oraz (c) opadanie pod kątem 15°. Przyjąć, że gęstość powietrza wynosi 1,2 kg/m³.

Odp.: 900 kG (8900 N). Siła wyporu jest taka sama we wszystkich trzech przypadkach.

18. Jaka prędkość przepływu powietrza ponad górną powierzchnią skrzydła wywoła siłę nośną 1 kG/cm², jeżeli prędkość przepływu pod dolną powierzchnią wynosi 100 m/s? Przyjąć gęstość powietrza równą 1,2 kg/m³.

19. Rozważmy rurkę w kształcie litery U o stałym przekroju, zaopatrzoną u dołu w błonę i wypełnioną pewną cieczą do wysokości różnych w każdym ramieniu (patrz rys. 18-20). Wyobraźmy sobie teraz, że w wyniku przebicia błony ciecz przepływa z ramienia lewego do prawego. (a) Pokazać, że zastosowanie równania Bernoulliego do punktów 1 i 3 prowadzi do sprzeczności. (b) Wyjaśnić, dlaczego równanie to nie może być tu stosowane. (Wskazówka: Czy przepływ ten jest ustalony?).

20. Uwzględniając w podany niżej sposób prędkość górnej powierzchni cieczy obliczyć prędkość wypływu tej cieczy przez otwór w zbiorniku. (a) Pokazać na podstawie równania Bernoulliego, że

$$v_0^2 = v^2 + 2gh,$$

gdzie v jest prędkością powierzchni górnej. (b) Następnie z równania ciągłości obliczyć v/v_0 , rozpatrując przepływ jako jedną wielką strugę prądu, tak że

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - (A_0/A)^2}},$$

gdzie A jest przekrojem zbiornika na powierzchni cieczy, zaś A_0 przekrojem otworu. (c) Pokazać dalej, że gdy przekrój otworu jest mały w porównaniu z przekrojem zbiornika, wówczas

$$v_0 \cong \sqrt{2gh} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{A_0}{A} \right)^2 \right].$$

21. Stosując do punktów 1 i 2 z rys. 18-6 równanie Bernoulliego i równanie ciągłości wykazać, że prędkość przepływu przy wlocie wynosi

$$v = a \sqrt{\frac{2(\rho' - \rho)gh}{\rho(A^2 - a^2)}}.$$

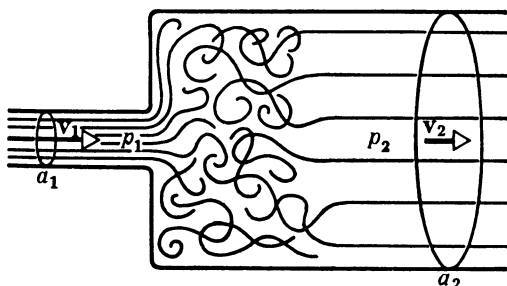
22. Rurka Venturiego ma średnicę 25 cm i średnicę zwężenia 12,5 cm. Wyznaczyć natężenie przepływu wody w m^3/s (strumień objętościowy), jeżeli ciśnienie wody w rurce wynosi $0,54 \text{ kG/cm}^2$, a ciśnienie w zwężeniu $0,41 \text{ kG/cm}^2$.

23. Rozważmy rurkę Venturiego (rys. 18-6) bez manometru. Niech A równa się $5a$. Przypuśćmy, że ciśnienie w A wynosi $2,0 \text{ atm}$. (a) Obliczyć wartości v w A oraz v' w a , przy których ciśnienie p' w a równa się zeru. (b) Obliczyć odpowiadający tej sytuacji strumień objętościowy, jeżeli średnica w A równa się $5,0 \text{ cm}$. Zjawisko, przy którym ciśnienie p' w a spada prawie do zera, nazywa się *kawitacją*. Woda paruje tworząc małe pęcherzyki.

Odp.: (a) 20 m/s , (b) $8,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$.

Paragraf 18-6

24. (a) Rozważmy strumień płynu o gęstości ρ i prędkości v_1 przepływający gwałtownie z rury cylindrycznej o przekroju a_1 do szerszej rury cylindrycznej o przekroju a_2 (patrz rys. 18-21). Strumień ten miesza



Rys. 18-21. Zadanie 24

się z otaczającym płynem i, po wymieszaniu, płynie ruchem niemal jednostajnym ze średnią prędkością v_2 . Nie wnikając w szczegóły tego mieszania pokazać, wykorzystując zasadę zachowania pędu, że wzrost ciśnienia wywołany zmieszaniem płynów wynosi w przybliżeniu

$$p_2 - p_1 = \rho v_2 (v_1 - v_2).$$

(b) Pokazać na podstawie równania Bernoulliego, że dla rury rozszerzającej się stopniowo otrzymalibyśmy

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2).$$

(c) Znaleźć stratę ciśnienia wywołaną gwałtownym rozszerzeniem rury. Czy można przeprowadzić analogię ze zderzeniami sprężystymi i niesprężystymi w mechanice punktów materialnych?

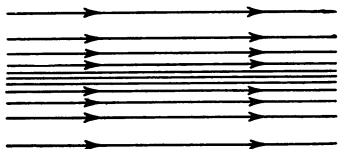
Paragraf 18-7

25. Pokazać, że dla wszystkich linii prądu w przepływie ustalonym i bezwirowym z rys. 18-10 stała w równaniu Bernoulliego [równanie (18-6)] jest jednakowa.

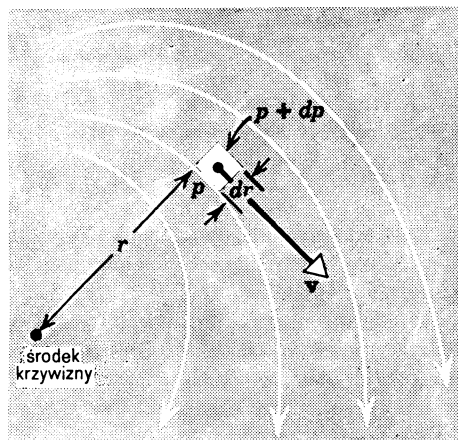
26. Pole siły jest zachowawcze, jeżeli $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$. Kółko na znaku całki oznacza, że całkowanie ma być wykonywane wzdłuż krzywej zamkniętej (okrężna podróż tam i z powrotem) znajdującej się w polu. Przepływ jest potencjalny (a więc bezwirowy), jeżeli $\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = 0$ dla każdej drogi zamkniętej zawartej w polu przepływu.

Używając tego kryterium pokazać, że pola z rysunków (a) 18-10 i (b) 18-13 są polami przepływu potencjalnego.

27. Na rysunku 18-22 pokazane jest pole przepływu zwane polem Poiseuille'a. Odstępy między liniami prądu oznaczają, że występuje tu poprzeczny gradient prędkości, chociaż ruch jest prostoliniowy. Pokazać, że przepływ taki jest wirowy.



Rys. 18-22. Zadanie 27



Rys. 18-23. Zadanie 28

28. W przepływach, które gwałtownie zakręcają, występują istotne efekty związane z siłą odśrodkową. Rozważmy element płynu poruszający się z prędkością v wzdłuż zakrzywionej linii prądu leżącej na płaszczyźnie poziomej (rys. 18-23). (a) Pokazać, że $dp/dr = \rho v^2/r$, czyli że przyrost ciśnienia na jednostkę drogi wynosi $\rho v^2/r$, jeżeli poruszamy się prostopadłe do linii prądu w kierunku od strony wklęsłej do wypukłej. (b) Następnie, korzystając z równania Bernoulliego i powyższego wyniku pokazać, że vr równa się pewnej stałej, czyli że prędkość wzrasta w kierunku środka krzywizny. Linie prądu, które w nurze prostej były rozmieszczone równomiernie, będą więc w zakrzywionym kolanku zagęszczają się stopniowo w kierunku ściany wewnętrznej i rozrzedzają w kierunku ściany zewnętrznej. Zadanie to należy porównać z zadaniem 18 z rozdziału 17, gdzie krzywoliniowość ruchu była wywołana przez obracanie naczynia z płynem. Wtedy prędkość zmieniała się proporcjonalnie do r . Tu zmienia się odwrotnie proporcjonalnie. (c) Pokazać, że przepływ ten jest bezwirowy.

29. Przed teorią grawitacji Newtona szeroko rozpowszechniony był model ruchu planetarnego zaproponowany przez Kartezjusza. W modelu Kartezjusza planety były wciągane przez wiry cząstek eteru skupione dookoła Słońca. Newton pokazał, że ten wirowy model jest sprzeczny z obserwacjami, ponieważ: (a) Prędkość cząstki eteru w tym wirze zmienia się jak odwrotność jej odległości od Słońca. (b) Okres obrotu takiej cząstki zmienia się jak kwadrat jej odległości od Słońca. (c) Wynik ten jest sprzeczny z trzecim prawem Keplera. Udowodnić (a), (b) i (c).

19. Fale w ośrodkach sprężystych

19-1. Fale mechaniczne

Ruch falowy jest zjawiskiem, z którym stykamy się niemal w każdej gałęzi fizyki. Wszyscy dobrze znamy fale na powierzchni wody. Istnieją również fale dźwiękowe, a także fale świetlne, fale radiowe oraz inne fale elektromagnetyczne. Jedną z teorii mechaniki atomów i cząstek elementarnych nosi nazwę *mechaniki falowej*. Widzimy więc, że własności i zachowanie się fal są ważnym przedmiotem zainteresowania fizyków.

W tym oraz następnym rozdziale skupimy naszą uwagę na falach powstających w ośrodkach sprężystych. Fale te, których przykładem są fale dźwiękowe rozchodzące się w powietrzu, nazywamy *falami mechanicznymi*. Powstają one w wyniku wychylenia jakiegoś fragmentu ośrodka sprężystego z normalnego położenia, będącego położeniem równowagi, co w następstwie powoduje drgania fragmentu wokół tego położenia. Dzięki sprężystym właściwościom ośrodka drgania te są przekazywane kolejno do coraz dalszych jego części i w ten sposób zaburzenie, inaczej mówiąc fala, przechodzi przez cały ośrodek. Należy tu podkreślić, że sam ośrodek, jako całość, nie przesuwa się wraz z falą; różne jego części wykonują jedynie drgania w ograniczonych obszarach przestrzeni. Na przykład, w przypadku fal na powierzchni wody, pływające na tej powierzchni małe przedmioty, takie jak kawałek korka, wskazują, że rzeczywiste ruchy cząsteczek wody polegają na niewielkich wychyleniach do góry i na dół, a także w przód i w tył. Natomiast same fale przesuwały się ruchem jednostajnym. Gdy dobiegną one do pływającego przedmiotu, wprawiają go w ruch, przekazując mu tym samym energię*. W ten sposób energia może być przekazywana za pośrednictwem ruchu falowego na znaczne odległości. Energia fal — to kinetyczna i potencjalna energia cząstek materii. Przenoszenie energii odbywa się drogą przekazywania jej kolejno do coraz to dalszych części ośrodka, a nie przez długozasięgowy ruch samej materii. Cechą charakterystyczną fal mechanicznych jest więc to, że przenoszą one energię poprzez materię dzięki przesuwananiu się zaburzenia w tej materii, a nie na skutek postępowego ruchu samej materii.

Do rozchodzenia się fal mechanicznych niezbędny jest ośrodek materialny. Natomiast do przenoszenia fal elektromagnetycznych taki ośrodek nie jest potrzebny; na przykład, światło gwiazd biegnie swobodnie przez prawie próżną przestrzeń międzygwiazdową.

* Patrz artykuł: Willard Bascom, Ocean Waves, *Scientific American*, August 1959.