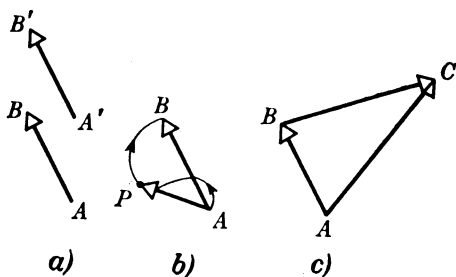


2. Wektory

2-1. Wektory i skalary

Zmianę położenia punktu materialnego nazywamy *przemieszczeniem*. Jeżeli punkt materialny porusza się od położenia A do położenia B (rys. 2-1a), jego przemieszczenie przedstawia linia prosta łącząca A i B ; kierunek przemieszczenia można określić rysując w pobliżu B ostrze strzałki, co wskazuje, że przemieszczenie odbywało się od A do B . Rzeczywista droga przebyta przez punkt nie musi być oczywiście linią prostą; strzałka przedstawia jedynie wypadkowy efekt ruchu, a nie prawdziwy ruch.



Rys. 2-1. Wektory przemieszczenia. (a) Wektory AB i $A'B'$ są identyczne, ponieważ mają tę samą długość i taki sam kierunek. (b) Rzeczywistą drogą punktu materialnego poruszającego się od A do B może być krzywa przedstawiona na rysunku; przemieszczenie pozostaje wektorem AB . Dla pewnego pośredniego punktu P przemieszczenie względem punktu A jest wektorem AP . (c) Po przemieszczeniu AB punkt materialny doznaje innego przemieszczenia BC . Wypadkowy efekt tych dwóch przemieszczeń przedstawia wektor AC

Na rysunku 2-1b, na przykład, narysowaliśmy drogę przebytą przez punkt materialny poruszający się od A do B . Droga ta nie pokrywa się z przemieszczeniem AB . Robiąc migawkowe zdjęcie punktu materialnego w położeniu A , a następnie w pewnym bardzo bliskim położeniu P , moglibyśmy otrzymać wektor przemieszczenia AP , przedstawiający wypadkowy efekt ruchu w rozważanym przedziale czasu, nawet gdybyśmy nie znali rzeczywistej drogi punktu między tymi położeniami. Ponadto, przemieszczenie takie jak $A'B'$ (rys. 2-1a), równoległe do AB oraz mające taki sam zwrot i taką samą długość jak AB , przedstawia tę samą zmianę położenia co AB . Nie będziemy różnicować tych dwu przemieszczeń. Przemieszczenie jest więc scharakteryzowane przez *długość* i *kierunek*.

W podobny sposób możemy przedstawić kolejne przemieszczenie od B do C (rys. 2-1c). Wypadkowy efekt tych dwóch przemieszczeń będzie równy przemieszczeniu od A do C . AC nazywamy więc *sumą* lub *wypadkową* przemieszczeń AB i BC . Zauważmy, że suma ta nie jest sumą algebraiczną i że sama liczba nie wystarcza do jej jednoznacznego określenia.

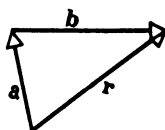
Wielkości, które zachowują się jak przemieszczenia, nazywane są *wektorami**. Wektory są to więc wielkości, mające określoną zarówno wartość, jak i kierunek oraz podlegające pewnym regułom dodawania**. Reguły te zostaną podane w następnym paragrafie. Przemieszczenie jest więc wygodnym prototypem wektora. Innymi wielkościami fizycznymi, które można traktować jako wektory, są siła, prędkość, przyspieszenie, natężenie pola elektrycznego oraz pola magnetycznego. Wiele praw fizycznych przy użyciu notacji wektorowej da się zapisać w bardziej zwartej postaci, a to z kolei często bardzo upraszcza wywodenie tych praw.

Wielkości, które można jednoznacznie określić za pomocą liczby i jednostki, a więc mające jedynie wartości, nazywane są *skalarami*. Wielkościami fizycznymi, które zachowują się jak skalary, są: masa, długość, czas, gęstość, energia oraz temperatura. Skalary podlegają działaniom zwykłej algebry.

2-2. Dodawanie wektorów, metoda geometryczna

Graficznie wektory przedstawiamy jako strzałki. Kierunek strzałki jest zgodny z kierunkiem wektora, przy czym ostrze strzałki określa zwrot wektora; długość strzałki natomiast dobieramy proporcjonalnie do wartości wektora, tzn. ustalamy pewną skalę. Na przykład przemieszczenie o 40 m w kierunku północno-wschodnim na skali, której 1 cm odpowiada 10 m, będzie przedstawione jako strzałka o długości 4 cm, nachylona pod kątem 45° do linii wskazującej kierunek wschodni, o ostrzu umieszczonym na prawym końcu strzałki. W druku wektory oznaczamy najczęściej grubymi literami, np. $\mathbf{d}$. Przy pisaniu ręcznym wygodniej jest rysować strzałkę nad literą będącą symbolem danej wielkości wektorowej, np. $\vec{d}$.

Często interesuje nas jedynie wartość (długość) wektora, a nie jego kierunek. Wartość wektora $\mathbf{d}$ jest to jego wartość bezwzględna, można więc ją oznaczyć jako $|\mathbf{d}|$; jeszcze częściej wartość wektora przedstawiamy za pomocą litery napisanej kursywą d . Grubym drukiem oznaczamy obie właściwości wektora; jego wartość i kierunek.



Rys. 2-2. Suma wektorów $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{r}$; porównać z rys. 2-1c

Rozważmy teraz rys. 2-2, na którym przerysowaliśmy i oznaczyliśmy symbolami wektory przemieszczenia z rys. 2-1c. Zależność między tymi przemieszczeniami (wektorami) można zapisać jako

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{r}. \quad (2-1)$$

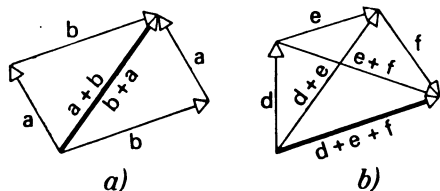
* Słowo wektor pochodzi z łac. i znaczy przewoźnik, co kojarzy się z przemieszczeniem.

Gdyby Czytelnik chciał się zapoznać szerzej z wektorami może skorzystać z książki: E. Karaśkiewicz, Zarys teorii wektorów i tensorów, wyd. III, PWN, Warszawa 1975.

** W wielu podręcznikach wyróżnia się jeszcze jedną właściwość wektora, a mianowicie jego *zwrot*. Dwa wektory o tym samym kierunku mogą mieć zgodne lub przeciwne zwroty, które na rysunkach oznacza się strzałką. W niniejszej książce używa się na ogół terminów: dodatni i ujemny kierunek wektora, mając na myśli zwrot zgodny ze zwrotem danego wektora i zwrot przeciwny. (Przyp. tłum. wyd. pol.)

Reguły pozwalające wykonać geometrycznie dodawanie wektorów są następujące: przedstawiamy na wykresie, po wybraniu odpowiedniej skali, wektor $\mathbf{a}$; następnie rysujemy wektor $\mathbf{b}$, tak aby ostrze wektora $\mathbf{r}$ stykało się z ostrzem wektora $\mathbf{b}$. Otrzymane w ten sposób przemieszczenie jest równoważne co do wartości i kierunku dwóm kolejnym przemieszczeniom $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$. Postępowanie to można uogólnić, otrzymując sumę dowolnej liczby kolejnych przemieszczeń.

Ponieważ wektory są wielkościami nowymi, musimy podać nowe reguły, jakim podlegają działania na wektorach. Symbol „+” w równaniu (2-1) ma inne znaczenie niż w arytmetyce czy zwykłej algebrze. Nakazuje on nam wykonanie innego układu operacji.



Rys. 2-3. (a) Prawo przemienności dla sumy wektorowej: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$. (b) Prawo łączności dla sumy trzech wektorów: $\mathbf{d} + (\mathbf{e} + \mathbf{f}) = (\mathbf{d} + \mathbf{e}) + \mathbf{f}$

Korzystając z rys. 2-3 możemy udowodnić dwie ważne właściwości dodawania wektorowego:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \text{ (prawo przemienności)} \quad (2-2)$$

oraz

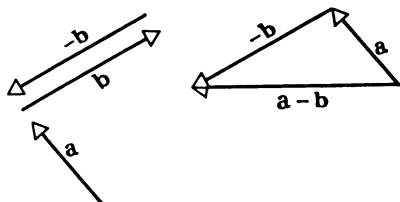
$$\mathbf{d} + (\mathbf{e} + \mathbf{f}) = (\mathbf{d} + \mathbf{e}) + \mathbf{f} \text{ (prawo łączności)} \quad (2-3)$$

Prawa te wykazują, że nie jest ważne, w jakiej kolejności dodajemy wektory i jak je grupujemy; w obu przypadkach suma jest taka sama. Pod tym względem dodawanie wektorowe i skalarne podlegają tym samym regułom.

Definiując wektor ujemny jako wektor o tej samej długości, lecz przeciwnie skierowany niż wektor dodatni, możemy dołączyć do naszej algebry wektorów działanie odejmowania. Wówczas

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}), \quad (2-4)$$

jak pokazano na rys. 2-4.



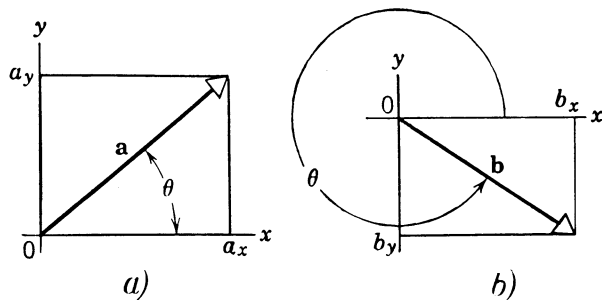
Rys. 2-4. Różnica wektorów $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$

Pamiętajmy, że chociaż przy ilustrowaniu powyższych operacji korzystaliśmy z wektorów przesunięcia, podane reguły stosują się do *wszystkich* wielkości wektorowych.

2-3. Rozkładanie wektorów na składowe i dodawanie wektorów. Metoda analityczna

Geometryczna metoda dodawania wektorów jest niewygodna w przestrzeni trójwymiarowej; często jest ona również niewygodna w przypadku dwuwymiarowym. Inną metodą dodawania wektorów jest metoda analityczna, wykorzystująca rozkładanie wektorów na składowe, w jakimś szczególnym układzie współrzędnych.

Na rysunku 2-5a pokazany jest wektor $\mathbf{a}$, którego początek został umieszczony w początku prostokątnego układu współrzędnych. Jeżeli koniec wektora $\mathbf{a}$ zrzutujemy na osie układu prostopadle, to otrzymane tak wielkości a_x i a_y nazywamy *składowymi wektora $\mathbf{a}$* . Sama operacja nazywa się *rozkładaniem wektora na składowe*. Na rysunku 2-5 przedstawiono, dla wygody, dwuwymiarowy przypadek rozkładania wektora; uogólnienie wyciągniętych wniosków na przypadek trójwymiarowy będzie bardzo proste.



Rys. 2-5. Dwa przykłady rozkładania wektora na składowe skalarne w pewnym szczególnym układzie współrzędnych

Dowolny wektor może mieć wiele składowych. Na przykład, jeżeli osie x i y z rys. 2-5a obrócimy o 10° w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, otrzymamy inne składowe wektora $\mathbf{a}$. Ponadto możemy korzystać z nieprostokątnych, skośnych układów współrzędnych, tzn. takich układów, w których kąt między dwiema osiami jest różny od 90° . Składowe wektora są więc jednoznacznie określone dopiero wtedy, gdy wybraliśmy jakiś układ współrzędnych. Aby znaleźć składowe wektora, nie musimy koniecznie umieszczać początku wektora w początku układu — zrobiliśmy tak jedynie dla wygody; wektor można dowolnie przesuwać w danym układzie współrzędnych i dopóty, dopóki kąty, jakie tworzy ten wektor z osiami współrzędnych, są zachowane, jego składowe zostają niezmienione.

Składowe a_x i a_y , pokazane na rys. 2-5a łatwo znaleźć z zależności

$$a_x = a \cos \theta, \quad a_y = a \sin \theta, \quad (2-5)$$

gdzie θ jest kątem, jaki tworzy wektor $\mathbf{a}$ z dodatnią częścią osi x , mierzonym od tej osi w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara. Zauważmy, że w zależności od wielkości kąta θ składowe a_x i a_y mogą być dodatnie lub ujemne. Na przykład, na rys. 2-5b składowa b_y jest ujemna, a b_x dodatnia. Składowe wektora zachowują się jak wielkości skalarne, ponieważ w dowolnym, ustalonym układzie współrzędnych do określenia ich wystarcza jedynie liczba z odpowiednim znakiem algebraicznym.

Z chwilą gdy wektor został rozłożony na składowe, składowe te można wykorzystywać do określenia tego wektora. Zamiast dwu liczb, a (określającej wartość wektora) i θ (określającej kierunek wektora względem osi x), mamy teraz dwie liczby a_x i a_y . Możemy przechodzić w obie strony od opisu wektora za pomocą składowych a_x i a_y do równoważnego opisu za pomocą wartości i kierunku wektora, a i θ , i na odwrót. Aby określić a i θ za pomocą a_x i a_y , zauważmy na podstawie rys. 2-5a, że

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad (2-6a)$$

oraz

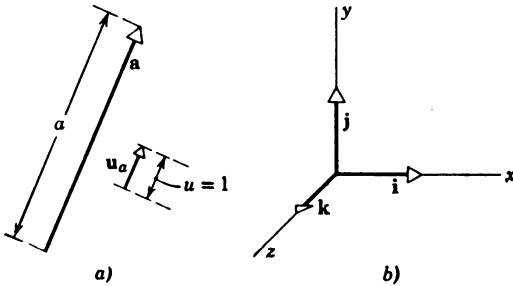
$$\operatorname{tg} \theta = \frac{a_x}{a_y}. \quad (2-6b)$$

Ćwiartka, w której leży θ , określona jest przez znaki a_x i a_y .

Przy rozkładaniu wektora na składowe wygodnie jest czasami wprowadzić wektor jednostkowy o określonym kierunku. I tak na przykład wektor $\mathbf{a}$ z rys. 2-6a można zapisać jako

$$\mathbf{a} = u_a \mathbf{a}, \quad (2-7)$$

gdzie u_a jest *wektorem jednostkowym* o kierunku wektora $\mathbf{a}$. Często wygodnie jest narysować wektory jednostkowe wzdłuż osi wybranego, szczególnego układu współrzędnych. W prostokątnych układach współrzędnych dla oznaczenia jednostkowych wektorów o kierunku dodatnim osi x , y i z stosuje się zwykle odpowiednio symbole $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ i $\mathbf{k}$, patrz rys. 2-6b. Zauważmy, że wektory $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, i $\mathbf{k}$ nie muszą być umieszczone w początku układu współrzędnych. Podobnie jak inne wektory, mogą one być dowolnie przesuwane względem danego układu współrzędnych, byleby tylko ich kierunek względem osi współrzędnych pozostał niezmienny.



Rys. 2-6. (a) Wektor $\mathbf{a}$ można przedstawić w postaci $u_a \mathbf{a}$, gdzie u_a jest wektorem jednostkowym mającym kierunek wektora $\mathbf{a}$. (b) Wektory jednostkowe $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ i $\mathbf{k}$ określające odpowiednio dodatni kierunek osi x , y i z

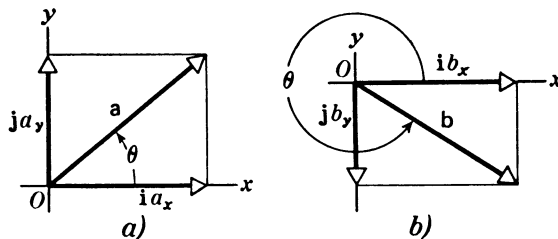
Wektory $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ z rys. 2-5 można zapisać za pomocą ich składowych oraz wektorów jednostkowych w postaci

$$\mathbf{a} = i a_x + j a_y, \quad (2-8a)$$

oraz

$$\mathbf{b} = i b_x + j b_y, \quad (2-8b)$$

(patrz rys. 2-7). Zależność wektora dana równaniem (2-8a) jest równoważna zależnościom skalarnym z równań (2-6); zależności te wiążą wektor ($\mathbf{a}$ lub a i θ) z jego składowymi (a_x i a_y). Wielkości takie jak $i a_x$ oraz $j a_y$ z równania (2-8a) będziemy czasami nazywać *wektorowymi składowymi* wektora $\mathbf{a}$; są one przedstawione jako wektory na rys. 2-7a. Samo słowo *składowa* w dalszym ciągu będzie odnosić się do wielkości skalarnej a_x lub a_y .



Rys. 2-7. Dwa przykłady rozkładania wektora na składowe wektorowe w pewnym szczególnym układzie współrzędnych; porównać z rys. 2-5

Rozważmy obecnie analityczną metodę dodawania wektorów. Niech $\mathbf{r}$ będzie sumą dwóch wektorów $\mathbf{b}$ i $\mathbf{a}$ leżących w płaszczyźnie xy , czyli

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b}. \quad (2-9)$$

W danym układzie współrzędnych dwa wektory, takie jak $\mathbf{r}$ oraz $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ mogą być równe jedynie wtedy, jeżeli ich odpowiednie składowe będą równe, tzn. gdy

$$r_x = a_x + b_x \quad (2-10a)$$

oraz

$$r_y = a_y + b_y. \quad (2-10b)$$

Te dwa równania algebraiczne traktowane łącznie są równoważne pojedynczemu równaniu wektorowemu (2-9). Z równań (2-6) możemy znaleźć r oraz kąt θ , jaki wektor $\mathbf{r}$ tworzy z osią x ; mianowicie

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$$

oraz

$$\operatorname{tg} \theta = r_y / r_x.$$

W ten sposób otrzymaliśmy następującą analityczną regułę dodawania wektorów: rozłożyć w danym układzie współrzędnych każdy z wektorów na jego składowe; algebraiczna suma składowych wzdłuż pewnej osi jest równa składowej wektora wypadkowego wziętej wzdłuż tej samej osi; znając składowe wektora wypadkowego możemy znaleźć sam ten wektor. Omówioną metodę dodawania wektorów można uogólnić na przypadek większej liczby wektorów oraz dla przestrzeni trójwymiarowej (patrz zadania 13 oraz 18).

Zaletą metody analitycznej (w porównaniu z metodą bezpośredniego dodawania wektorów przy użyciu odpowiednich zależności trygonometrycznych) jest to, że przy rozkładaniu wektorów na składowe mamy zawsze do czynienia z trójkątami prostokątnymi, co znacznie upraszcza obliczenia.

Przy dodawaniu wektorów za pomocą metody analitycznej odpowiedni wybór układu współrzędnych może znacznie uprościć proces daddawania. Czasami znane są z góry składowe wektora w jakimś szczególnym układzie współrzędnych. Wówczas wybór układu jest oczywisty. W innych przypadkach właściwy wybór osi może bardzo uprościć rozkładanie wektorów na składowe. Na przykład osie powinny być tak zorientowane, aby przynajmniej jeden z wektorów był równoległy do którejś z osi.

Przykład 1. Samolot przebywa odległość 130 km, lecąc wzdłuż linii prostej tworzącej kąt $22,5^\circ$ z północą, w kierunku północno-wschodnim. Jak daleko na wschód i jak daleko na północ oddali się on od swego początkowego położenia?

Wybieramy taki układ współrzędnych, w którym kierunek dodatni osi x jest skierowany na wschód, a osi y — na północ. Następnie (rys. 2-8) rysujemy wektor przemieszczenia z początku układu współrzędnych (punkt startu samolotu) tak, aby tworzył on kąt $22,5^\circ$ z osią y (północną), pochylając go w kierunku dodatnim osi x (wschodnim). Długość wektora tak dobieramy, aby odpowiadała ona 130 km. Jeżeli ten wektor nazwiemy wektorem $\mathbf{d}$, to d_x będzie równe odległości przebytej przez samolot w kierunku wschodnim od punktu początkowego, a d_y — odpowiedniej odległości przebytej w kierunku północnym. Mamy

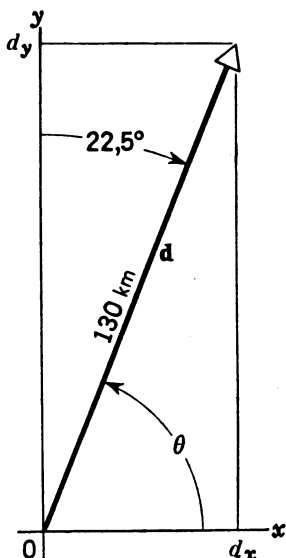
$$\theta = 90,0^\circ - 22,5^\circ = 67,5^\circ,$$

tak że [patrz równania (2-5)]

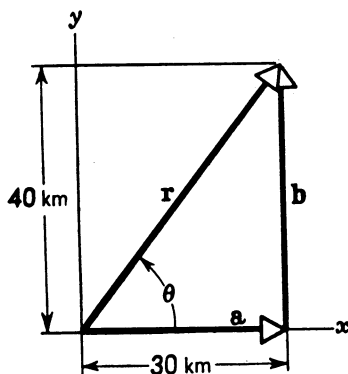
$$d_x = d \cos \theta = 130 \text{ km} \cdot \cos 67,5^\circ = 50 \text{ km}$$

oraz

$$d_y = d \sin \theta = 130 \text{ km} \cdot \sin 67,5^\circ = 120 \text{ km}.$$



Rys. 2-8. Przykład 1



Rys. 2-9. Przykład 2

Przykład 2. Samochód jedzie po poziomej drodze prosto na wschód, przebywając odległość 30 km. Następnie skręca na północ i jadąc dokładnie w kierunku północnym przebywa drogę równą 40 km, po czym zatrzymuje się. Znaleźć wypadkowe przemieszczenie samochodu.

Wybieramy układ współrzędnych nieruchomy względem Ziemi, o osiach tak dobranych, że dodatni kierunek osi x wskazuje wschód, a dodatni kierunek osi y — północ. Następnie rysujemy kolejne przemieszczenia $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$, jak pokazano na rys. 2-9. Wypadkowe przemieszczenie $\mathbf{r}$ otrzymujemy ze związku $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Ponieważ wektor $\mathbf{b}$ nie ma składowej x , a wektor $\mathbf{a}$ — składowej y , mamy [z równań (2-10)]

$$r_x = a_x + b_x = 30 \text{ km} + 0 = 30 \text{ km},$$

$$r_y = a_y + b_y = 0 + 40 \text{ km} = 40 \text{ km}.$$

Wartość i kierunek $\mathbf{r}$ wynoszą wówczas [patrz równania (2-6)]:

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \sqrt{(30 \text{ km})^2 + (40 \text{ km})^2} = 50 \text{ km},$$

$$\operatorname{tg} \theta = r_y / r_x = 40 \text{ km} / 30 \text{ km} = 1,33, \quad \theta = \arctg 1,33 = 53^\circ.$$

Wypadkowy wektor przemieszczenia $\mathbf{r}$ ma więc wartość bezwzględną 50 km i skierowany jest pod kątem 53° względem północy w kierunku północno-wschodnim.

Przykład 3. Trzy leżące w jednej płaszczyźnie wektory określone są, względem pewnego prostokątnego układu współrzędnych, wyrażeniami

$$\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j},$$

$$\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

oraz

$$\mathbf{c} = -3\mathbf{j},$$

przy czym składowe wyrażone są w pewnych umownych jednostkach. Znaleźć wektor $\mathbf{r}$ będący sumą tych wektorów.

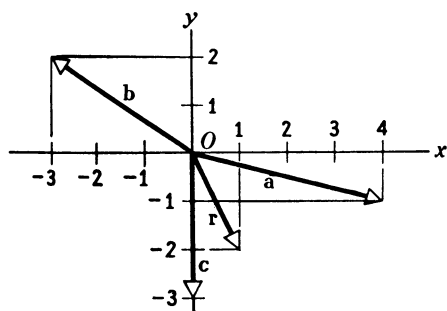
Z równań (2-10) mamy

$$r_x = a_x + b_x + c_x = 4 - 3 + 0 = 1$$

$$r_y = a_y + b_y + c_y = -1 + 2 - 3 = -2.$$

Stąd

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}r_x + \mathbf{j}r_y = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}.$$



Rys. 2-10. Trzy wektory a , b i c oraz ich suma geometryczna r

Na rysunku 2-10 pokazane są wszystkie cztery wektory. Z równania (2.6) możemy obliczyć, że wartość wektora r wynosi $\sqrt{5}$, a kąt, jaki tworzy r z dodatnim kierunkiem osi x , mierzony od tej osi w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, jest równy $\arctg(-2/1) = 297^\circ$.

2-4. Mnożenie wektorów*

W poprzednich rozważaniach zakładaliśmy, że dodawane wektory są podobnego typu; tzn. wektory przemieszczenia są dodawane do wektorów przemieszczenia, wektory prędkości do wektorów prędkości itd. Tak samo jak nie ma sensu dodawanie wielkości skalarnych różnego rodzaju, takich jak masa i temperatura, nie ma też sensu dodawanie wielkości wektorowych różnego rodzaju, na przykład przemieszczenia i natężenia pola elektrycznego.

Jednakże, podobnie jak w przypadku skalarów, różne rodzaje wektorów możemy mnożyć przez siebie tworząc nowe wielkości fizyczne, o nowych wymiarach. Ponieważ wektory mają określoną zarówno wartość bezwzględną, jak i kierunek, mnożenie wektorowe nie może podlegać dokładnie tym samym regułom algebraicznym co mnożenie skalarne. Musimy ustalić nowe reguły mnożenia dla wektorów.

Omówimy jedynie definicje trzech najczęściej stosowanych rodzajów mnożenia dla wektorów: (1) mnożenie wektora przez skalar, (2) mnożenie dwóch wektorów w taki sposób, aby iloczyn ich był skalarą i (3) mnożenie dwóch wektorów w taki sposób, aby dawały one nowy wektor. Istnieją jeszcze inne możliwości, ale nie będziemy ich tutaj rozpatrywać.

Mnożenie wektora przez skalar ma prostą interpretację: iloczyn skalara k i wektora a , zapisywany jako ka , jest z definicji nowym wektorem, o wartości k razy większej od wartości wektora a . Nowy wektor ma taki sam kierunek jak a , jeżeli k jest dodatnie, a kierunek przeciwny, jeżeli k jest ujemne. Aby podzielić wektor przez skalar, po prostu mnożymy wektor przez odwrotność skalarą.

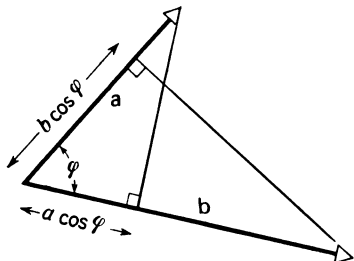
Kiedy mnożymy wielkość wektorową przez inną wielkość wektorową, musimy rozróżniać między *iloczynem skalarnym* (oznaczonym kropką) i *iloczynem wektorowym* (ozna-

* Z materiału podanego w tym paragrafie będziemy korzystać później. Iloczyn skalarny wektorów po raz pierwszy użyty jest w rozdziale 7, a iloczyn wektorowy w rozdziale 11. Czytelnik może ten paragraf pominąć. Mnożenie wektorów umieściliśmy tutaj w tym celu, aby dać jednolity opis algebry wektorów, z którego będziemy korzystać w dalszych częściach podręcznika.

czonym krzyżykiem). Iloczyn skalarny dwóch wektorów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ oznaczany symbolem $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, jest zdefiniowany następująco:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \varphi \quad (2-11)$$

gdzie a jest wartością bezwzględną wektora $\mathbf{a}$, b — wartością bezwzględną $\mathbf{b}$, a $\cos \varphi$ — cosinusem mniejszego kąta φ zawartego między tymi dwoma wektorami* (patrz rys. 2-11).



Rys. 2-11. Iloczyn skalarny $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} (= ab \cos \varphi)$ jest iloczynem wartości bezwzględnej któregośkolwiek z wektorów (powiedzmy a) i rzutu drugiego wektora na kierunek pierwszego (powiedzmy $b \cos \varphi$)

Ponieważ a i b są skalarami, a $\cos \varphi$ — zwykłą liczbą, więc *iloczyn skalarny dwóch wektorów jest skalarom*. Iloczyn ten można traktować jako iloczyn wartości bezwzględnej jednego wektora i składowej drugiego wektora wzdłuż kierunku pierwszego. Przypominamy, że symbolem mnożenia skalarnego jest kropka.

Iloczyn $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ moglibyśmy zdefiniować w jakikolwiek inny sposób, przyjmując np., że jest on równy $a^{1/3} b^{1/3} \tan(\varphi/2)$, ale taka definicja nie miałaby żadnego zastosowania w fizyce. Przy naszej definicji iloczynu skalarnego wiele ważnych wielkości fizycznych da się przedstawić w postaci iloczynu skalarnego dwóch wektorów. Jako przykłady można podać: pracę mechaniczną, grawitacyjną energię potencjalną, potencjał elektryczny, moc elektryczną oraz gęstość energii elektromagnetycznej. Omawiając w dalszych paragrafach te wielkości pokażemy, w jaki sposób można je przedstawić za pomocą iloczynu skalarnego wektorów.

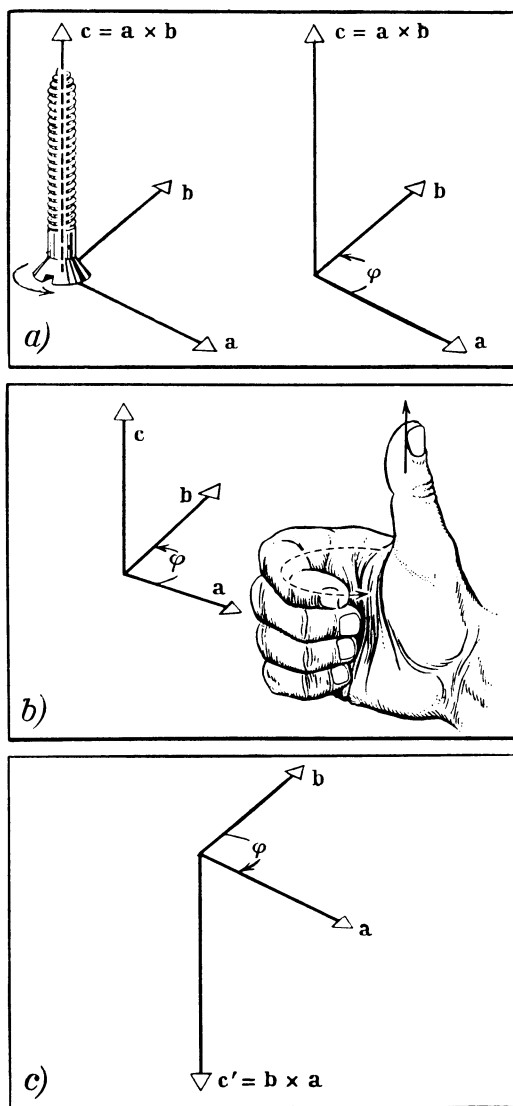
Iloczyn wektorowy dwóch wektorów, oznaczany symbolem $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, jest *nowym wektorem* $\mathbf{c}$, przy czym $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$. *Wartość bezwzględna* wektora $\mathbf{c}$ jest określona równaniem

$$c = ab \sin \varphi, \quad (2-12)$$

gdzie φ jest mniejszym kątem zawartym między wektorami $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$.

Kierunek wektora $\mathbf{c}$ będącego iloczynem wektorowym wektorów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ jest z definicji prostopadły do płaszczyzny utworzonej przez te dwa wektory. Aby określić dodatni kierunek wektora $\mathbf{c}$ (jego zwrot), musimy odwołać się do rys. 2-12. Wyobraźmy sobie, że śruba prawoskrętna, której oś jest prostopadła do płaszczyzny utworzonej przez wektory $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$, obraca się *od wektora a do wektora b* o kąt φ równy kątowi zawartemu między tymi wektorami. Kierunek poruszania się śruby określa dodatni kierunek iloczynu wektorowego $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (rys. 2-12a). Inny wygodny sposób określenia kierunku iloczynu wektorowego jest następujący. Wyobraźmy sobie oś prostopadłą do płaszczyzny utworzonej przez wektory $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$, i przechodzącą przez ich wspólny początek. Następnie owińmy palce *prawej ręki* wokół tej osi i pchnijmy czubkami palców wektor $\mathbf{a}$ w stronę wektora $\mathbf{b}$, poprzez mniejszy

* Między parą wektorów istnieją zawsze dwa kąty, zależnie od wyboru kierunku obrotu. Przy mnożeniu wektorowym interesuje nas zawsze mniejszy z tych dwu kątów. W równaniu (2-11) nie ma to znaczenia, ponieważ $\cos(2\pi - \varphi) = \cos \varphi$. Ale w równaniu (2-12) ma znaczenie, ponieważ $\sin(2\pi - \varphi) = -\sin \varphi$.



Rys. 2-12. Iloczyn wektorowy. (a) W iloczynie $c = a \times b$ kierunek wektora c jest taki, jak kierunek ruchu śruby prawoskrętnej obracanej od a do b po mniejszym łuku. (b) Kierunek wektora c można również określić na podstawie reguły prawej ręki: Jeśli palce prawej ręki zwinimy w ten sposób, żeby kierunek ich ruchu był zgodny z kierunkiem obrotu a w stronę wektora b , wyprostowany prawy kciuk wskaże kierunek wektora c . (c) Iloczyn wektorowy zmienia znak, jeśli zmieniamy kolejność czynników: $a \times b = -b \times a$. (Zastosować regułę prawej ręki lub regułę prawoskrętnej śruby, aby pokazać, że c oraz c' mają przeciwnie kierunki)

kąt między tymi wektorami, trzymając kciuk wyprostowany; kierunek kciuka wskaże wówczas kierunek iloczynu wektorowego $a \times b$ (rys. 2-12b)*.

* Postępowanie przedstawione na rys. 2-12 jest postępowaniem umownym. Istnieją dwa kierunki prostopadłe do płaszczyzny utworzonej przez dwa wektory, takie jak a i b . Wybieramy konwencję prawej ręki lub śruby prawoskrętnej; wybranie ręki lewej lub śruby lewoskrętnej prowadziłoby do zmiany kierunku iloczynu wektorowego $a \times b$.

Zauważmy, że iloczyn $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ nie jest tym samym wektorem, co iloczyn $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$; oznacza to, że w iloczynie wektorowym ważny jest porządek czynników. Zupełnie inaczej jest w przypadku skalarów, ponieważ w algebrze i w arytmetyce kolejność czynników nie wpływa na ostateczny wynik. W przypadku iloczynu wektorowego $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ (rys. 2-12c). Można to wywnioskować z faktu, że wartość $ab \sin \varphi$ równa jest wartości $ba \sin \varphi$, natomiast kierunek $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ jest przeciwny do kierunku $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$; wynika to stąd, że śruba prawoskrętna porusza się w jednym kierunku, gdy obracamy ją od $\mathbf{a}$ do $\mathbf{b}$ poprzez kąt φ , i w kierunku przeciwnym, gdy obraca się ona od $\mathbf{b}$ do $\mathbf{a}$ poprzez ten sam kąt φ . Taki sam wynik otrzymalibyśmy stosując regułę prawej ręki.

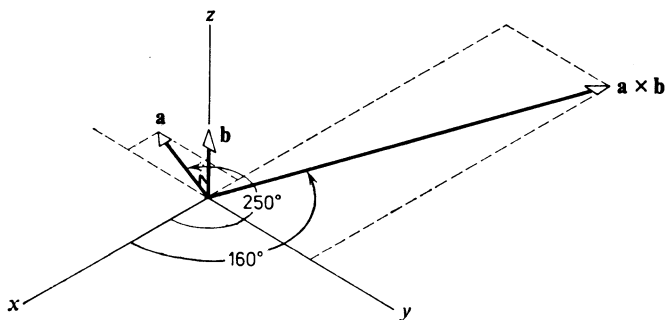
Jeżeli $\varphi = 90^\circ$, wektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ ($\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$) tworzą nawzajem ze sobą kąty proste i wskazują kierunki osi trójwymiarowego, prawoskrętnego układu współrzędnych.

Podana wyżej definicja iloczynu wektorowego została wybrana dlatego, że okazała się bardzo użyteczna w fizyce. Często spotykamy wielkości fizyczne będące wektorami, których iloczyn wektorowy zdefiniowany w powyższy sposób jest wielkością wektorową mającą ważne znaczenie fizyczne. Przykładami wielkości fizycznych będących iloczynami wektorowymi są: moment siły, moment pędu, siła działająca na ładunek poruszający się w polu magnetycznym oraz strumień energii elektromagnetycznej. Omawiając dalej te wielkości zwróćmy uwagę na ich związek z iloczynem wektorowym dwóch wektorów.

Iloczyn skalarny jest najprostszym iloczynem dwóch wektorów. Kolejność mnożenia nie wpływa na wartość tego iloczynu. Iloczyn wektorowy jest następnym z kolei prostym przypadkiem. Tutaj kolejność mnożenia wpływa jedynie na znak iloczynu, co oznacza odwrócenie kierunku. Znałe są również inne iloczyny wektorów, równie pożyteczne, ale bardziej skomplikowane. Można na przykład utworzyć *tensor*, mnożąc kolejno każdą z trzech składowych jednego wektora przez trzy składowe drugiego wektora. Taki tensor (drugiego rzędu) utworzony jest więc z dziewięciu liczb, wektor z trzech liczb, a skalar tylko z jednej liczby. Przykładami wielkości fizycznych, które można przedstawić za pomocą tensora, są naprężenia mechaniczne i elektryczne, momenty bezwładności i odkształcenia. Znałe są jeszcze bardziej skomplikowane wielkości fizyczne. W tym podręczniku jednakże będziemy mieli do czynienia jedynie z wektorami i skalarami.

Przykład 4.

Pewien wektor $\mathbf{a}$ leży w płaszczyźnie xy pod kątem 250° od dodatniej osi x licząc w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Jego wartość bezwzględna wynosi 7,4 jednostek. Wektor $\mathbf{b}$ ma wartość bezwzględną równą 5,0 jednostek i jest skierowany równoległe do osi z . Obliczyć (a) iloczyn skalarny $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ oraz (b) iloczyn wektorowy $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.



Rys. 2-13. Przykład 4

(a) Ponieważ $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ są prostopadłe do siebie, kąt φ między nimi wynosi 90° , zatem $\cos \varphi = \cos 90^\circ = 0$. Stąd iloczyn skalarny (z równania (2-11))

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \varphi = ab \cos 90^\circ = (7,4)(5,0)0 = 0.$$

Jest to zgodne z faktem, że wektor $\mathbf{a}$ nie ma składowej w kierunku wektora $\mathbf{b}$ i odwrotnie.

(b) Wartość bezwzględna iloczynu wektorowego z równ. 2-12

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin \varphi = (7,4)(5,0) \sin 90^\circ = 37.$$

Kierunek wektora powstałego z iloczynu wektorowego jest prostopadły do płaszczyzny utworzonej przez $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$. Zatem, jak na rys. 2-13, leży on w płaszczyźnie xy (prostopadły do $\mathbf{b}$) pod kątem $250^\circ - 90^\circ = 160^\circ$ od osi $+x$ (prostopadły do $\mathbf{a}$) licząc zgodnie z regułą prawej ręki.

2-5. Wektory a prawa fizyki

Okazuje się, że wektory znajdują bardzo wiele zastosowań w fizyce. Spróbujmy nieco głębiej zastanowić się nad tym, dlaczego tak jest.

Przypuśćmy, że w pewnym układzie współrzędnych xyz mamy trzy wektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{r}$ o składowych równych $a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z$ oraz r_x, r_y, r_z . Załóżmy następnie, że te trzy wektory są ze sobą związane w następujący sposób:

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad (2-13)$$

co oznacza — na podstawie prostego uogólnienia równań (2-10) — że

$$r_x = a_x + b_x, \quad r_y = a_y + b_y, \quad r_z = a_z + b_z. \quad (2-14)$$

Rozważmy teraz inny układ współrzędnych $x'y'z'$ mający następujące właściwości: (1) jego początek nie pokrywa się z początkiem pierwszego układu, czyli układu xyz , (2) żadna z jego trzech osi nie jest równoległa do odpowiedniej osi układu pierwszego. Innymi słowy, drugi układ współrzędnych jest zarówno *przesunięty*, jak i *obrócony* względem układu pierwszego.

Wszystkie składowe wektorów $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{r}$ w nowym układzie powinny być w zasadzie inne niż w pierwotnym; możemy je oznaczyć odpowiednio jako $a_{x'}, a_{y'}, a_{z'}, b_{x'}, b_{y'}, b_{z'}$ oraz $r_{x'}, r_{y'}, r_{z'}$. Te nowe składowe powinny być jednakże (patrz zadanie 39) związane ze sobą w następujący sposób:

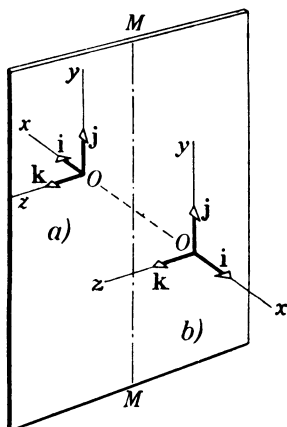
$$r_{x'} = a_{x'} + b_{x'}; \quad r_{y'} = a_{y'} + b_{y'}; \quad r_{z'} = a_{z'} + b_{z'}. \quad (2-15)$$

Stwierdzamy więc, że w nowym układzie [patrz równanie (2-13)]

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

Mówiąc formalnie: *związki między wektorami*, których przykładem jest równanie (2-13), są *niezmiennie względem przesunięć (translacji) i obrotów układu współrzędnych*. Z drugiej strony jest faktem stwierdzonym doświadczalnie, że doświadczenia, na których opierają się prawa fizyki, a więc i same prawa fizyki również nie zmieniają się podczas obrotów i przesunięć układu współrzędnych. Notacja wektorowa jest więc idealnym językiem do wyrażania praw fizyki. Jeżeli jakieś prawo możemy przedstawić w postaci wektorowej, dzięki omówionym ściśle geometrycznym właściwościom wektorów, zapewniona jest niezmienniczość tego prawa względem obrotów i przesunięć układu współrzędnych.

Aż do roku około 1956 sądzono, że wszystkie prawa fizyki są ponadto niezmiennicze względem innego rodzaju transformacji współrzędnych, mianowicie zmiany prawoskrętnego układu współrzędnych na układ lewoskrętny (patrz rys. 2-14). W roku 1956 jednakże przeanalizowano dokładnie pewne doświadczenie dotyczące rozpadu niektórych cząstek elementarnych i okazało się, że wyniki zależą od skrętności układu współrzędnych, w którym je przedstawiono. Innymi słowy, okazało się, że doświadczenie i jego odbicie w lustrze mogą dawać różne wyniki*! Ten zadziwiający fakt zmusił fizyków do ponownego rozważenia zagadnienia symetrii praw fizycznych; stanowi ono jedno z najciekawszych zagadnień fizyki.



Rys. 2-14. Na rysunku (a) przedstawiono lewoskrętny, a na rysunku (b) prawoskrętny układ współrzędnych. Zauważmy, że układy te są związane ze sobą w ten sposób, że każdy z nich można uważać za obraz drugiego otrzymany w zwierciadle MM . Skrętności układu nie można zmienić za pomocą obrotów tego układu. Zwracamy uwagę, że w przypadku (b) $i \times j = k$, podczas gdy w przypadku (a) $i \times j = -k$

Pytania

1. Trzej astronauta opuścili Przylądek Canaveral i polecili na Księżyc. Po powrocie wylądowali na Pacyfiku. Admirał pożegnał się z nimi na Przylądku, a następnie popłynął lotniskowcem, aby ich zabrać z Pacyfiku. Biorąc pod uwagę powyższe podróże, kto dokonał większego przemieszczenia: astronauta czy Admirał?

2. Czy wypadkowa dwóch wektorów o różnych długościach może być równa zeru? A wypadkowa trzech wektorów?

3. Czy długość wektora może być równa zeru, jeżeli jedna z jego składowych jest różna od zera?

4. Czy ma sens nazywanie wektorem wielkości, której długość jest równa zeru?

5. Jeżeli suma trzech wektorów wynosi 0, muszą leżeć w tej samej płaszczyźnie. Uzasadnij to.

6. Czy wektor jednostkowy ma jednostki?

7. Wymień kilka wielkości skalarnych. Czy wartość dowolnej wielkości skalarnej zależy od wybranego układu współrzędnych.

8. Zdarzenia możemy porządkować w czasie. Na przykład zdarzenie b poprzedza zdarzenie c i następuje po zdarzeniu a ; określa to kolejność zdarzeń a , b i c . Wprowadziliśmy w ten sposób pojęcie przeszłości, teraźniejszości i przyszłości. Czy wobec tego czas jest wektorem? Jeśli nie, to dlaczego?

9. Czy prawa przemienności i łączności stosują się do odejmowania wektorów?

10. Czy iloczyn skalarny może być wielkością ujemną?

11. (a) Jeśli $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, to czy wynika stąd, że $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ są do siebie prostopadłe? (b) Jeśli $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, to czy wynika stąd, że koniecznie $\mathbf{b}$ równa się $\mathbf{c}$?

12. Jeśli $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$, to czy $\mathbf{a}$ musi być równoległe do $\mathbf{b}$? A odwrotnie?

13. (a) Wykazać, że jeśli wszystkie składowe wektora mają kierunki przeciwne, to wektor ma również kierunek przeciwny. (b) Wykazać, że jeśli składowe iloczynu wektorowego są przeciwne, to iloczyn wektorowy się nie zmienia. (c) Czy zatem iloczyn wektorowy jest wektorem?

14. Dotąd omówione zostało dodawanie, odejmowanie i mnożenie wektorów. Dlaczego nie rozważano dzielenia wektorów? Czy możliwe jest zdefiniowanie takiej operacji?

* W roku 1957 C. N. Yang i T. D. Lee otrzymali nagrodę Nobla za to, że przewidzieli teoretycznie ten fakt. Patrz: Phillip Morrison, *The Overthrow of Parity Scientific American*, April 1957. Znajduje się tam bardzo przejrzyste omówienie tej sprawy.

15. Czy trzeba określić układ współrzędnych gdy: (a) dodaje się dwa wektory? (b) tworzy się ich iloczyn skalarny? (c) tworzy się ich iloczyn wektorowy? (d) znajduje się ich składowe?

16. W rachunku wektorów używa się reguły prawej ręki. Jakie zmiany byłyby konieczne, gdyby zastosować w zamian zasadę lewej ręki?

Zadania

Paragraf 2-2

1. Rozważmy dwa przemieszczenia, jedno o wartości 3 m, a drugie o wartości 4 m. Jakie kierunki powinny mieć odpowiednie wektory przemieszczenia, aby wielkość przemieszczenia wypadkowego była równa: (a) 7 m, (b) 1 m, (c) 5 m.

Odp.: Przemieszczenia winny być: (a) równoległe, (b) nierównoległe, (c) prostopadłe.

2. Co można powiedzieć o dwóch wektorach **a** i **b** spełniających związki:

(a) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$ oraz $a + b = c$;

(b) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$;

(c) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$ oraz $a^2 + b^2 = c^2$.

3. Dodano dwa wektory **a** i **b**. Pokazać, że długość wektora wypadkowego nie może być większa niż $a + b$, ani mniejsza niż $|a - b|$ (pionowe kreski oznaczają wartość bezwzględną różnicy).

4. Samochód przebył odległość 50 km jadąc na wschód, następnie 30 km jadąc na północ i w końcu 25 km jadąc w kierunku odchylonym o 30° od północy ku wschodowi. Przedstawić drogę przebytą przez samochód za pomocą wektorów i znaleźć wypadkowe przemieszczenie samochodu licząc od punktu startu.

5. Grający w golfa trzykrotnie uderzył w piłkę, zanim wpadła ona do dołka znajdującego się na trawniku. Po pierwszym uderzeniu piłka przesunęła się o 12 m na północ, po drugim uderzeniu o 6 m w kierunku południowo-wschodnim, a po trzecim uderzeniu o 3 m w kierunku południowo-zachodnim. Jakie musiałyby być przemieszczenie piłki, aby wpadła ona do dołka po pierwszym uderzeniu?

Odp.: 6 m, o kąt $20,5^\circ$ od kierunku północnego w kierunku wschodnim.

6. Wektor **a** ma wartość 5 jednostek i jest skierowany na wschód. Wektor **b** jest skierowany w kierunku zachodnim, pod kątem 45° do kierunku północy i ma wartość 4 jednostek. Skonstruować wykresy wektorów by obliczyć: (a) $(\mathbf{a} + \mathbf{b})$; (b) $(\mathbf{b} - \mathbf{a})$. Oszacuj wartości i zwroty $(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ i $(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ ze swoich wykresów.

Paragraf 2-3

7. Znaleźć sumę przemieszczeń wektorowych **c** i **d**, których składowe wzdłuż trzech wzajemnie prostopadłych kierunków wynoszą w km:

$$c_x = 5,0, \quad c_y = 0, \quad c_z = -2,0; \quad d_x = -3,0, \quad d_y = 4,0, \quad d_z = 6,0.$$

Odp.: $r_x = 2$ km, $r_y = r_z = 4$ km.

8. (a) Po opuszczeniu frontowych drzwi domu chłopiec przebył odległość 300 m idąc na wschód i 600 m idąc na północ, a następnie wyjął z kieszeni monetę 10 gr i zrzucił ją ze stromej ściany o wysokości 150 m. Wybrać jakiś układ współrzędnych i napisać wyrażenie na przemieszczenie monety posługując się jednostkowymi wektorami osi. (b) Chłopiec wraca do tych samych drzwi idąc z powrotem inną drogą. Jak jest jego wypadkowe przemieszczenie na całej drodze?

9. Dane są dwa wektory: $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$; $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. Znaleźć (a) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$; (b) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$; (c) wektor **c** taki, że $\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$.

Odp.: (a) $3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, (b) $5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, (c) przeciwnie niż w (b).

10. Pokój ma wymiary $3,0 \times 3,6 \times 4,2$ m. Mucha przelatuje z jednego rogu pokoju do rogu diametralnie przeciwnego. (a) Jaka jest wartość jej przemieszczenia? (b) Czy długość przebytej przez nią drogi może być krótsza niż ta odległość? Dłuższa niż ta odległość? Równa tej odległości? (c) Wybrać odpowiedni układ współrzędnych i znaleźć składowe wektora przemieszczenia w tym układzie.

11. Dane są dwa wektory $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ oraz $\mathbf{b} = 6\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$. Znaleźć długość i kierunek wektorów **a**, **b**, $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ oraz $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

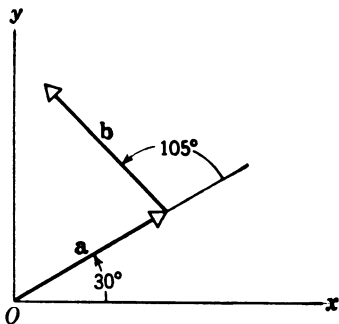
Odp.: Długości wynoszą odpowiednio: 5, 10, 11, 11 i 11. Kąty, jakie tworzą z dodatnią osią x wynoszą: 323° , 53° , 27° , 80° i 260° .

12. Dwa wektory o długościach a i b , których początki stykają się ze sobą, tworzą kąt θ . Udowodnić, znajdując ich składowe wzdłuż dwu prostopadłych osi, że długość wektora wypadkowego wynosi

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}.$$

13. Uogólnić analityczną metodę rozkładania wektorów na składowe i dodawanie wektorów na przykład trzech i większej ilości wektorów, w dwóch wymiarach.

14. Dwa wektory $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ o jednakowej długości, równej powiedzmy 10 jednostkom, są zorientowane tak, jak pokazano na rys. 2-15, a ich suma geometryczna wynosi $\mathbf{r}$. Znaleźć (a) składowe x i y wektora $\mathbf{r}$; (b) długość wektora $\mathbf{r}$ oraz (c) kąt, jaki tworzy wektor $\mathbf{r}$ z osią x .



Rys. 2-15. Zadania 14 i 25

15. Częstka doznaje trzech następujących kolejnych przemieszczeń na płaszczyźnie: 4 m w kierunku południowo-zachodnim, 5 m w kierunku wschodnim i 6 m w kierunku odchylonym o 60° od północy ku wschodowi. Przyjąć, że oś y jest skierowana na północ, a oś x na wschód i znaleźć: (a) składowe każdego przemieszczenia, (b) składowe przemieszczenia wypadkowego, (c) wartość i kierunek przemieszczenia wypadkowego oraz (d) przemieszczenie, jakiego musiałaby doznać cząstka, aby powrócić do punktu początkowego.

Odp.: (a) $a_x = -2,8$ m, $a_y = -2,8$ m,

$b_x = +5,0$ m, $b_y = 0$,

$c_x = +3,0$ m, $c_y = +5,2$ m;

(b) $d_x = +5,2$ m, $d_y = +2,4$ m;

(c) 5,7 m; pod kątem 25° do kierunku wschodniego w kierunku północnym;

(d) 5,7 m; pod kątem 25° do kierunku zachodniego, w kierunku południowym.

16. Przyjąć skalę 2 m = 1 cm i dodać graficznie przemieszczenia z zadania 15. Określić na podstawie wykresu wartość i kierunek przemieszczenia wypadkowego.

17. Pewna osoba leci samolotem z Waszyngtonu do Manili. (a) Opisać wektor przemieszczenia. (b) Jaka jest jego wartość, jeśli szerokości i długości geograficzne obu tych miast wynoszą odpowiednio: 39° szer. geogr. półn., 77° dług. geogr. zach. i 15° szer. geogr. półn., 121° dług. geogr. wsch.?

Odp.: 11 230 km.

18. Uogólnić analityczną metodę rozkładania wektorów na składowe i ich dodawanie na przypadek przestrzeni trójwymiarowej.

19. Niech N będzie liczbą całkowitą większą od jedności; wówczas

$$\cos 0 + \cos \frac{2\pi}{N} + \cos \frac{4\pi}{N} + \dots + \cos(N-1) \frac{2\pi}{N} = 0,$$

to znaczy

$$\sum_{n=0}^{n=N-1} \cos \frac{2\pi n}{N} = 0.$$

Podobnie

$$\sum_{n=0}^{n=N-1} \sin \frac{2\pi n}{N} = 0.$$

Udowodnić te dwa twierdzenia, znajdując sumę N wektorów o jednostkowej długości, tak rozmieszczonych, że każdy wektor tworzy z wektorem poprzedzającym go kąt $2\pi/N$.

Paragraf 2-4

20. Wektor $\mathbf{d}$ o długości 2,5 m skierowany jest prosto na północ. Jaka jest długość i kierunek wektorów: (a) $-\mathbf{d}$ (b) $\mathbf{d}/2$, (c) $-2,5\mathbf{d}$ i (d) $4,0\mathbf{d}$?

21. Wykazać, korzystając z układu współrzędnych, przedstawionego na rys. 2-6b, że

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$$

oraz

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0.$$

22. Korzystając z prawoskrętnego układu współrzędnych przedstawionego na rys. 2-6b wykazać, że

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$$

oraz

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}.$$

23. Wykazać, że dla dowolnego wektora $\mathbf{a}$ zachodzi: (a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2$ oraz (b) $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$.

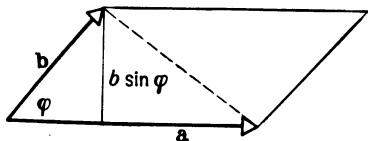
24. W standardowym (prawoskrętnym) układzie współrzędnych dany jest wektor $\mathbf{a}$ w kierunku dodatnim osi x , wektor $\mathbf{b}$ w kierunku dodatnim osi y oraz wielkość skalarna d . (a) Jaki jest kierunek iloczynu wektorowego $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$? (b) Jaki jest kierunek iloczynu wektorowego $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$? (c) Jaki jest kierunek wektora $\mathbf{b}/d$? (d) Jaka jest wartość iloczynu $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$?

25. Dla dwóch wektorów z zadania 14 znaleźć: (a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ oraz (b) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

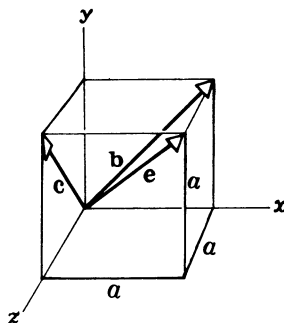
Odp.: (a) -26 , (b) $97\mathbf{k}$.

26. Kierunek wektora $\mathbf{a}$ o długości 10 jednostek i wektora $\mathbf{b}$ o długości 6 jednostek różnią się o 60° . Znaleźć (a) iloczyn skalarny tych dwóch wektorów i (b) ich iloczyn wektorowy.

27. Wykazać, że powierzchnia trójkąta zawartego między wektorami $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ (patrz rys. 2-16) jest równa $\frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$, gdzie pionowe kreski oznaczają wartość bezwzględną.



Rys. 2-16. Zadania 27 i 28



Rys. 2-17. Zadanie 35

28. Wykazać, że wartość bezwzględna iloczynu wektorowego dwóch wektorów równa jest liczbowo polu równoległoboku, którego bokami są te dwa wektory (patrz rys. 2-16). Czy fakt ten sugeruje, w jaki sposób można by za pomocą wektora przedstawić element powierzchni zorientowany w przestrzeni?

29. Wykazać, że wartość iloczynu $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ jest równa liczbowo objętości równoległościanu zbudowanego na wektorach $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$.

30. Udowodnić, że dwa wektory muszą mieć równe długości, jeśli ich suma jest prostopadła do ich różnicy.

31. Iloczyn skalarny w notacji wektorów jednostkowych. Mamy dwa wektory przedstawione w postaci

$$\mathbf{a} = i\mathbf{a}_x + j\mathbf{a}_y + k\mathbf{a}_z$$

oraz

$$\mathbf{b} = i\mathbf{b}_x + j\mathbf{b}_y + k\mathbf{b}_z.$$

Wykazać analitycznie, że

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

(Wskazówka: patrz zadanie 21.)

32. Korzystając z definicji iloczynu skalarnego $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \varphi$ oraz z faktu, że $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ (patrz zadanie 31), obliczyć wartość kąta zawartego między dwoma wektorami $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ oraz $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

33. Iloczyn wektorowy w notacji wektorów jednostkowych. Wykazać analitycznie, że

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \mathbf{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \mathbf{k}(a_x b_y - a_y b_x).$$

(Wskazówka: patrz zadanie 22.)

34. Dane są trzy wektory: $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$; $\mathbf{b} = -\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$; $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Znaleźć: (a) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, (b) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$, (c) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})$.

35. Niech wektory $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ będą dwiema przecinającymi się przekątnymi ścian sześcianu o krawędzi a (patrz rys. 2-17). (a) Znaleźć składowe wektora $\mathbf{d}$, gdzie $\mathbf{d} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$. (b) Znaleźć wartości iloczynów $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$, $\mathbf{d} \cdot \mathbf{c}$ oraz $\mathbf{d} \cdot \mathbf{b}$. (c) Znaleźć kąt między przekątną $\mathbf{e}$ i przekątną $\mathbf{b}$ (patrz rys. 2-17).

Odp.: (a) $d_x = d_z = a^2$, $d_y = -a^2$, (b) $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = a^2$, $\mathbf{d} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{b} = 0$, (c) 35° .

36. Przypuśćmy, że $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ są trzema dowolnymi wektorami nie leżącymi w jednej płaszczyźnie. Nie muszą one tworzyć ze sobą kątów prostych. (a) Wykazać, że

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

(b) Niech

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{v}, \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{v}, \quad \mathbf{C} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{v},$$

gdzie $v = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$. Obliczyć wartość iloczynu skalarnego każdego z wektorów $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ z każdym z wektorów $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$ (c) Jakie są wymiary wektorów $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$, jeśli $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ mają wymiary długości?

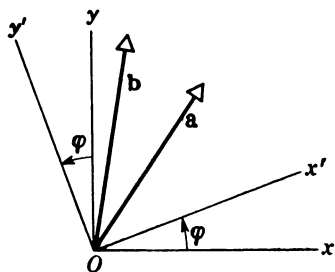
37. Dwa wektory $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ mają w dowolnych jednostkach następujące składowe $a_x = 3,2$, $a_y = 1,6$, $b_x = 0,5$, $b_y = 4,5$. (a) Znaleźć kąt między $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$; znaleźć składowe wektora $\mathbf{c}$, który jest prostopadły do $\mathbf{a}$, leży w płaszczyźnie x i y i ma wartość 5 jednostek.

Odp.: (a) 57° , (b) $c_x = \pm 2,2$ jednostki, $c_y = \pm 4,5$ jednostki.

38. (a) Widzieliśmy, że do iloczynu wektorowego nie stosuje się prawo przemienności, tzn. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ nie równa się $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$. Wykazać, że prawo to stosuje się do iloczynu skalarnego, tzn. że $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$. (b) Wykazać, że prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania stosuje się zarówno do iloczynu skalarnego, jak i do wektorowego, tzn. wykazać, że

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}, \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}.$$

(c) Czy prawo łączności stosuje się do iloczynu wektorowego, tzn. czy $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ jest równe $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$? Czy ma sens mówienie o prawie łączności dla iloczynu skalarnego?



Rys. 2-18. Zadanie 39

Paragraf 2-5

39. Niezmienniczość dodawania wektorów względem obrotów układu współrzędnych. Na rysunku 2-18 przedstawione są dwa wektory $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ oraz dwa układy współrzędnych różniące się tym, że osie x i x' oraz y i y' tworzą ze sobą kąt φ . Udowodnić analitycznie, że $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ma zawsze taką samą wartość i kierunek, niezależnie od tego, w którym układzie wykonujemy dodawanie.