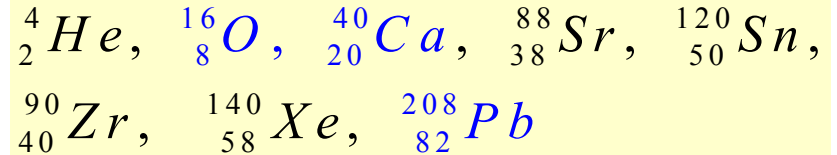


# Model powłokowy

Jądro w modelu powłokowym to układ słabo-oddziałujących nukleonów poruszających się w polu potencjalnym.

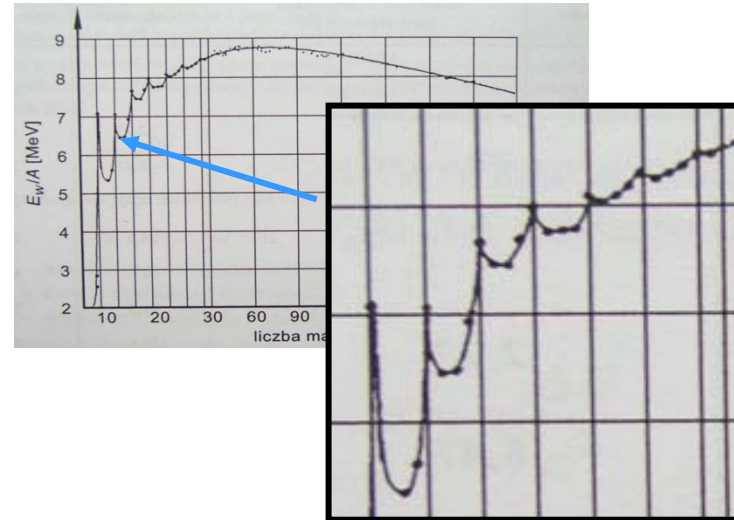
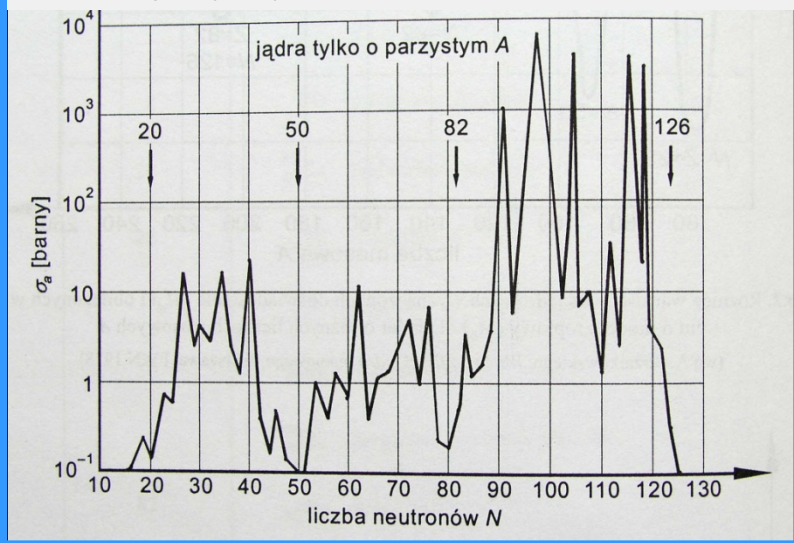
Na początku, zanim zrozumiano strukturę jądra, zaobserwowano, że niektóre jądra są znacznie trwalsze niż inne (chodzi o dowolne procesy jądrowe). Ogólnie istnieje pewna okresowość w zachowaniu się jąder. To przypominało własności atomowe związane z zapętnieniem powłok elektronowych. Da tych jąder występują nieciągłości dla pewnych parametrów jąder.



Widzimy, że energia wiązania dla pewnych jąder jest większa niż dla innych. Szczególnie trwałe są jądra których liczby protonów i neutronów wynoszą **2,8,20,50,82,126,....**

Odpowiadają one tzw. liczbom magicznym.

Przekrój czynny na pochłanianie neutronów



To jest wykres energii wiązania /nukl

10

30

## Siły jądrowe:

Dwucząstkowe przybliżenie - hamiltonian oddziaływania jako suma hamiltonianów par nukleonów

$$\hat{H} = \sum_{i < j}^A \hat{H}_{ij}$$

Wszystko sprowadza się wtedy do sił między dwoma nukleonami. Siły typu centralnego - niezależność od kątów

$\mathcal{G}, \varphi$

Siły krótko-zasięgowe - rzędu jednego 1 fm. Jeśli zapomnieć o innych oddziaływaniach i założyć zależność od odległości  $r$  to mamy tzw. potencjał Yukawy

$$U(r) = -\frac{U_0}{r} \exp\left(-\frac{r}{R_s}\right)$$

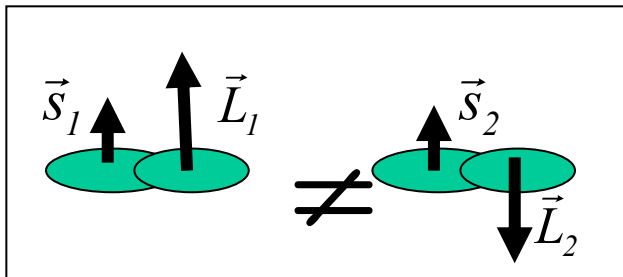
W rzeczywistości

Siły te zależą nie tylko od odległości  $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$  ale także od ich

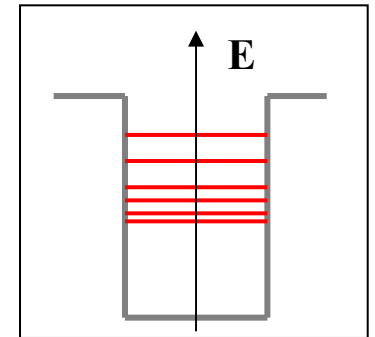
parametr  
związany z  
rozmiarem  
jądra

spinów  $\vec{s}_1, \vec{s}_2$  i wektorów orbitalnych momentów pędów  $\vec{L}$  oraz od wektorów izospinów

$$\hat{H} = \hat{T}_{kin} + \hat{V}(r) + \hat{U}(\hat{s}, \hat{L}, I) \approx \hat{T}_{kin} + \hat{V}(r) - f(r) \cdot \vec{L} \cdot \vec{s}$$



↑  
energia potencjalna



## Atom kwantowo opisany jest

$$\psi_{n,l,m} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{Stany energii}$$

$$l = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$$

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar \quad l \text{ - numeruje stany o danym momencie pędu (numeruje możliwe orbity)}$$

Stany numerowane  $l = 0, 1, 2, 3, \dots$  nazywają się odpowiednio  $s, p, d, \dots$

$$m = -l, (-l+1), (-l+2), \dots, -1, 0, +1, 2, \dots, (l-1), l \quad \text{ilość stanów } m \text{ przy danej liczbie } l \quad (2l+1)$$

$m$  rzut  $L$  na jakiś wyróżniony kierunek (np. na kierunek pola magnetycznego  $B$ )

Oprócz tego istnieje spin wewnętrzny stopień swobody (Niezależny od współrzędnych!)  
Istnieje również pojęcie rzutu spinu na wyróżnioną oś  $z$ .

Na pierwszej orbicie  $n = 1, l = n - 1 = 0$  mamy dwa elektrony różniące się rzutem spinu

Dla  $n = 2$  mamy  $l = 0, 1$  dla  $l = 0$  znowu mamy dwa elektrony a dla  $l = 1, m = 1, 0, -1$  mamy ich sześć (bo dla danego  $m$  mamy dwa możliwe rzuty spinu)

Jeśli konstruujemy równanie dla jądra musimy pamiętać, że nie możemy już wprowadzić potencjału typu Coulomba ale musimy uwzględnić przede wszystkim potencjał krótko zasięgowy – wtedy zwykle piszemy **trójwymiarowy potencjał oscylatora**

$$V(r) = -U(\text{studnia}) + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$$

W takim przypadku energia zależy od trzech wartości  $n$  (3-wymiarowy)

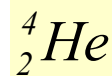
$$E_{n_1, n_2, n_3} = (N + 1/2) \cdot \hbar \omega$$

$$N = n_1 + n_2 + n_3$$

Tyle co do głównej liczby kwantowej – a jeśli chodzi o część związana z momentem pędu to istnieje podobne (jak dla wodoru) rozwiązanie zależne od liczby kwantowej  $l$ , która odpowiada pewnemu stanowi, który można interpretować w języku atomu jako "powłokę". Na powłokę mieści się

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \downarrow \\ \text{spin}}}{2} \cdot (2l + 1) \text{ Protonów i tyle samo } \underset{\substack{\uparrow \\ \downarrow \\ \text{spin}}}{2} \cdot (2l + 1) \text{ neutronów}$$

Jeśli mamy stan  $S: l = 0$  to aby spełnić zakaz Pauliego w stanie tym mogą znajdować się dwa protony  $2(2 \cdot 0 + 1) = 2$  i dwa neutrony  $2(2 \cdot 0 + 1) = 2$ . Więcej NIE i na tym polega wypełnienie. Mamy wtedy stan o dwóch protonach i dwóch neutronach, "niechętnie" przyjmujący dodatkowe nukleony (chyba, że energetycznie się zmusi), jest to hel

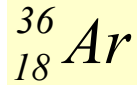


Czyli dla helu wypełniona jest powłoka  $S$ . Natura zaczyna wypełniać następną powłokę  $P: (l = 1)$

Wypełni ją całkowicie gdy umieści na niej  $2(2 \cdot 1 + 1) = 6$  protonów i tyle samo neutronów – razem 12. Zapełnienie powłoki  $S$  oraz  $P$  daje  $(2 + 6) = 8$  protonów i  $(2 + 6) = 8$  neutronów. Wtedy znowu powłoki wypełnione, niechętnie patrząc na przyszłość (Stan silniej związany).



Jeśli wypełniamy następną powłokę **D** to mamy (zgodnie z powyższym) **dziesięć protonów oraz 10 neutronów** co daje razem **po wypełnieniu powłok S,P,D 18 protonów i 18 neutronów**. Otrzymujemy



Do tej pory mówiliśmy o zapewnianiu powłok zarówno przez protony jak i neutrony (tzw. **Podwójnie zamknięta powłoka**). Zdarza się jednak tak, że jedne z nich tylko wysycają powłokę (zgodnie z zasadą Pauliego) - reszta nie. Problem bardziej skomplikowany. Istnieją pewne jądra o tzw. **liczbach magicznych 20,28,50,82,126** które są **wyjątkowo stabilne**.

Przy okazji modelu powłokowego dyskusja na temat momentów pędów jąder.

$$J_{total} = \underbrace{\sum_{\text{protony}} \vec{s}_{prot}}_{\text{spiny prot.}} + \underbrace{\sum_{\text{neutrony}} \vec{s}_{neut}}_{\text{spiny neutr.}} + \underbrace{\sum_{\text{protony}} \vec{L}_{prot}}_{\text{momenty orbit.}} + \underbrace{\sum_{\text{neutrony}} \vec{L}_{neutrony}}_{\text{momenty orbit.}}$$

Z	N	$J_{tot} (\hbar)$
parzyste	parzyste	0 ( <b>obserwacja</b> )
parzyste	nieparzyste	1/2, 3/2, 5/2, 7/2....itd
nieparzyste	parzyste	1/2, 3/2, 5/2, 7/2....itd
nieparzyste	nieparzyste	1, 2, 3, 4, .....itd

Jądra wypełniają powłoki parami protonów (neutronów) o przeciwnie skierowanych orbitalnych mom. pędu

Istnienie zerowych spinów jąder parzysto-parzystych uważa się za **dowód układania się** identycznych nukleonów w pary o całkowitym momencie pędu równym zero

Parzystość przestrzenna P jądra

$$P = \prod_{i=1}^A \eta_i \cdot \left( (-1)^{\sum l_i} \right)$$

$l_i$  - liczba kwantowa określająca "ruch"  $i$ -tego nukleonu względem środka masy jądra

ale parzystość przestrzenna nukleonu jest dodatnia,  $\eta = +1$

patrz dyskusja o budowie kwarkowej nukleonów

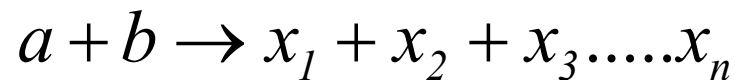
stąd parzystość przestrzenna jądra atomowego

$$P = (-1)^{\sum l_i}$$

np.  ${}^7_3\text{Li}$  w stanie podstawowym ma 4 nukleony w stanie s ( $l = 0$ ) i 3 w stanie p ( $l = 1$ )  
Parzystość przestrzenna jądra wynosi

$$(-1)^3 = -1$$

## Kinematyka reakcji jądrowych



$$E_a + E_b = \sum_i E_i \quad \text{Energia całkowita i pęd zachowane}$$

$$p_{pocz} = p_{konc} \quad (\text{czteropędy})$$

stosujemy wzory dla umiarkowanie relatywistycznych obiektów  $E = mc^2 + E_k$

$$(m_a + m_b)c^2 + (K_a^{kin} + K_b^{kin}) = \sum_i m_i c^2 + \sum_i K_i^{kin}$$

$$\sum_i K_i^{kin} - (K_a^{kin} + K_b^{kin}) = (m_a + m_b)c^2 - \sum_i m_i c^2 \quad \text{Znowu widzimy zamianę masy na energię}$$

energia reakcji  $Q$

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} K_{końc}^{kin} - K_{pocz}^{kin} = (m_a + m_b)c^2 - \sum_i m_i c^2 = m_{pocz} - m_{końcowa}$$

Jeśli w reakcji energia jest wydzielana to znaczy,  $Q > 0$  - reakcja egzotermiczna - energia spoczynkowa idzie na kinetyczną

Jeśli w reakcji energia jest pobierana to znaczy,  $Q < 0$  - reakcja endotermiczna - powstaje masa dzięki energii kinetycznej.

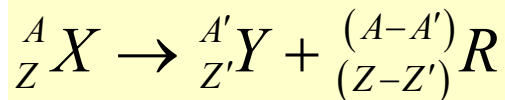
Jeśli proces jest elastyczny to  $Q = 0$

Energia progowa jest to najniższa energia jaką musi mieć uderzająca w jądro (tarczę - układ laboratoryjny) aby dany proces był energetycznie możliwy do przeprowadzenia.

Rozważmy teraz dokładniej **rozpady**. Załóżmy, że jądro X jest w spoczynku ( $K_X = 0$ )

Zasada zach.  
energii

$$E_X = \sum_{i=Y,R} E_i$$



$$M_{Z,A} \cdot c^2 + \underbrace{K_X}_0 = M_{Z',A'} \cdot c^2 + K_Y + M_{Z-Z',A-A'} \cdot c^2 + K_R \equiv$$

$$K_Y + K_R = \left[ M_{Z,A} - (M_{Z',A'} + M_{Z-Z',A-A'}) \right] \cdot c^2$$

Przy rozpadzie różnica mas idzie na energię kinetyczną prod. rozpadu

$$Q = K_Y + K_R = \left[ M_{Z,A} - (M_{Z',A'} + M_{Z-Z',A-A'}) \right] \cdot c^2 =$$

$$\left[ \left( Nm_n + Zm_p - \frac{B_{Z,A}}{c^2} \right) \right] - \left[ N'm_n + Z'm_p - \frac{B_{Z',A'}}{c^2} + (N - N')m_n + (Z - Z')m_p - \frac{B_{Z-Z',A-A'}}{c^2} \right] c^2$$

Wyrazy z masami nukleonów redukują się i otrzymujemy

$$Q = K_Y + K_R = \left[ (B_{Z',A'} + B_{Z-Z',A-A'}) - B_{Z,A} \right]$$

Energia reakcji  $Q$  równa jest różnicy odpowiednich energii wiązania z porządek odwrotny niż dla mas!

Aby wyrwać z jądra np. cząstkę  $\alpha$  potrzeba  $E_\alpha = -Q = - \left[ (B_{2,4} + B_{Z-2,A-4}) - B_{Z,A} \right]$

Energia potrzebna do usunięcia jednego protonu z jądra wynosi zgodnie z powyższym wzorem (energia wiązania swobodnego protonu wynosi 0)

$$E_p = -Q = - \left[ \left( \underbrace{B_p}_0 + B_{Z-1,A-1} \right) - B_{Z,A} \right] = - (B_{Z-1,A-1} - B_{Z,A}) = B_{Z,A} - B_{Z-1,A-1}$$



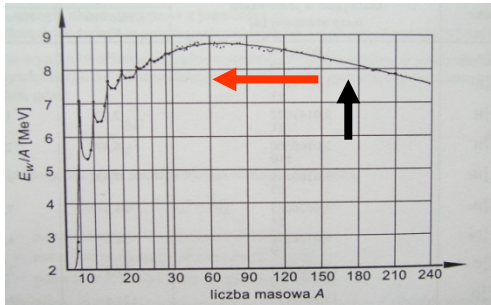
Energia potrzebna do usunięcia jednego neutronu

$$E_n = -Q = - \left[ \left( \underbrace{B_n}_0 + B_{Z,A-1} \right) - B_{Z,A} \right] = - (B_{Z,A-1} - B_{Z,A})$$

W pewnych okolicznościach różnica ta może być dodatnia a w innych ujemna

Wszystko to możemy wyrazić w funkcji energii wiązania

$$\varepsilon = \frac{B}{A}$$



Zauważmy, że energia wiązania na nukleon opada trochę ze wzrostem  $A$  (wzrost  $Z$ ). Dzieje się tak dzięki odpychaniu Coulomba, które jest proporcjonalne do  $Z^2$

Chcemy udowodnić tezę, że jeśli ciężkie jądro rozpada się na dwa lżejsze to proces ten jest egzotermicznym  $Q > 0$

$$Q = \left[ \left( B_{Z',A'} + B_{Z-Z',A-A'} \right) - B_{Z,A} \right] = \varepsilon_{A'} \cdot A' + \varepsilon_{A-A'} \cdot (A - A') - \varepsilon_A \cdot A = (\varepsilon_{A'} - \varepsilon_{A-A'}) A' + (\varepsilon_{A-A'} - \varepsilon_A) A$$

Założmy, że nastąpił rozpad na dwa podobne jądra  $\varepsilon_{A-A'} \approx \varepsilon_{A'}$  wtedy -  $Q \approx (\varepsilon_{A-A'} - \varepsilon_A) A$

**Jeśli rozpad idzie na jądra o większym  $\varepsilon$  to  $Q > 0$**

Wróćmy do rozpadów alfa. W chwili obecnej znamy ponad 20 jąder podlegających rozpadowi  $\alpha$ . Są one ciężkie ( $Z > 83$ ). Czasy życia rozpadów zawierają się w przedziale:

$$T_{1/2} = 5 \cdot 10^{15} \text{ lat dla } {}_{58}^{142}\text{Ce} \quad \text{Cer}$$

$$T_{1/2} = 0.23 \text{ sekund } {}_{71}^{158}\text{Lu} \quad \text{Lutet}$$

Każdy z rozpadów jest egzotermiczny tzn.  $Q > 0$  oraz (patrz trzy folie wstecz)

$$Q = \left[ (B_{\alpha} + B_{Z-2, A-4}) - B_{Z, A} \right] = A \cdot (\varepsilon_{A-4} - \varepsilon_A) + 4 \cdot (\varepsilon_{\alpha} - \varepsilon_{A-4})$$

Jeśli założymy, że jądra są dostatecznie ciężkie, tzn.  $\varepsilon_{A-4} \approx \varepsilon_A$  to

Warunek na rozpad

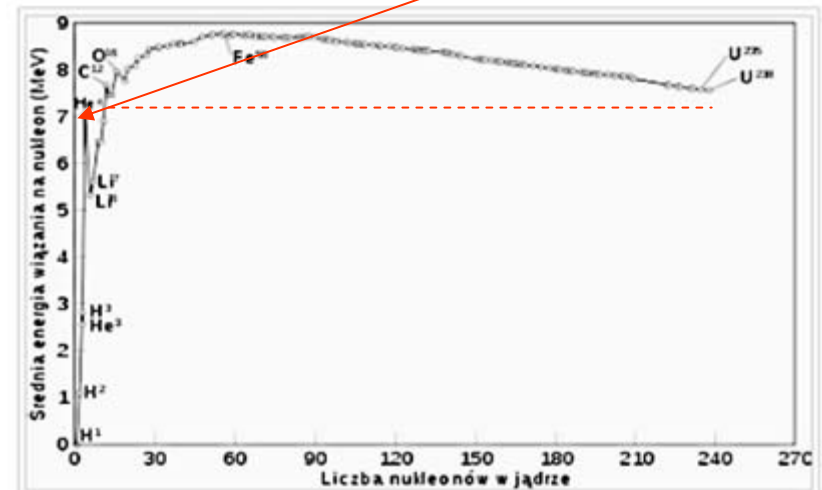
$$Q = 4(\varepsilon_{\alpha} - \varepsilon_A) > 0 \rightarrow \varepsilon_A < \varepsilon_{\alpha} \text{ ale wiadomo, że } \varepsilon_{\alpha} \approx 7 \text{ MeV}$$

Jak popatrzymy na rozkład energii wiązania na jeden nukleon to widzimy, że warunek ten nie jest spełniony.

Rozpad jednak się zdarza i jest możliwy tylko dla ciężkich jąder, tzn. w obszarze gdzie

$$\varepsilon_A \approx 8 \text{ MeV}$$

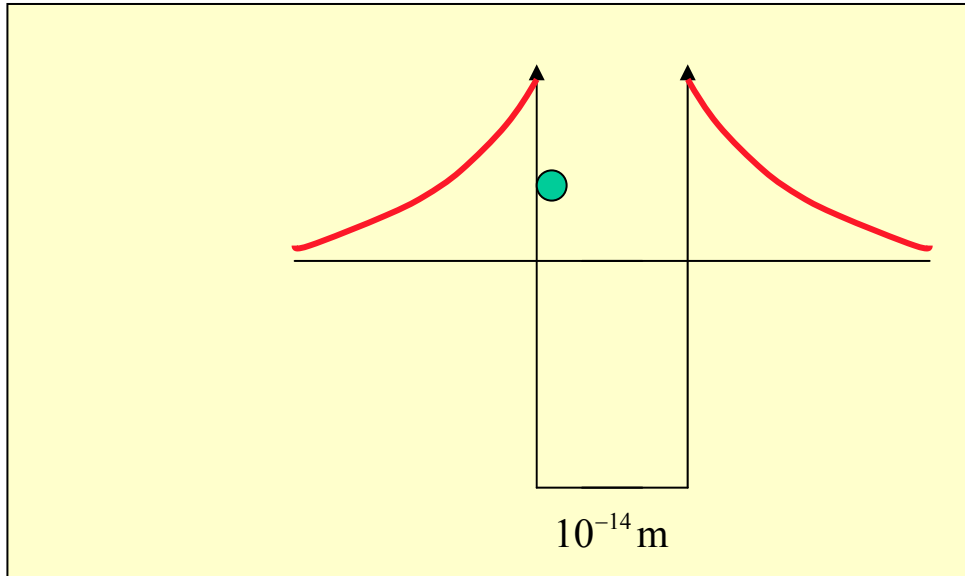
W mechanice kwantowej proces, który spełnia zasady zachowania może się z jakimś prawdopodobieństwem odbyć.



Dane doświadczalne pokazują, że z rozpadami  $\alpha$  mamy do czynienia już od  $A=140$  jak również dla pośrednich jąder z

$$\varepsilon_A \approx 8 \text{ MeV}$$

Procesowi temu pomaga Kulombowskie odpychające oddziaływanie. Dla jąder z deficytem neutronów proces ten przebiega łatwiej.



Cząstka w jądrze dostaje się na brzeg jądra i **odpychana jest** przez pot. Coulomba. Energia potencjalna na brzegu jądra wynosi

$$V_0 = k \frac{Q_\alpha \cdot Q_{\text{jądra}}}{r_{\text{jądra}}} \approx 30 \text{ MeV} !$$

Stąd cząstka powinna dzięki odpychaniu uzyskać taką energię. Energie cząstek alfa są jednak dużo mniejsze i wynoszą zwykle około **5-10 MeV**. Aby to bardziej intuicyjnie zrozumieć odwróćmy problem i starajmy się wepchnąć cząstkę alfa do jądra, co energetycznie jest tym samym.

Klasycznie aby cząstka wpadła do jądra musi mieć energię co najmniej 30 MeV a ma około 5-10 MeV i dostaje się do jądra! [Dzieje się tak dzięki zjawisku tunelowemu.](#)

O ile energie cząstek alfa leżą w wąskich przedziałach o tyle czasy półrozpadów leżą w bardzo szerokim zakresie czasowym ( od  $10^{17}$  lat do  $10^{-7}$  s ).  
 Prawidłowość tą można wyjaśnić **empiryczną** regułą (1912 rok Geiger-Nettol)

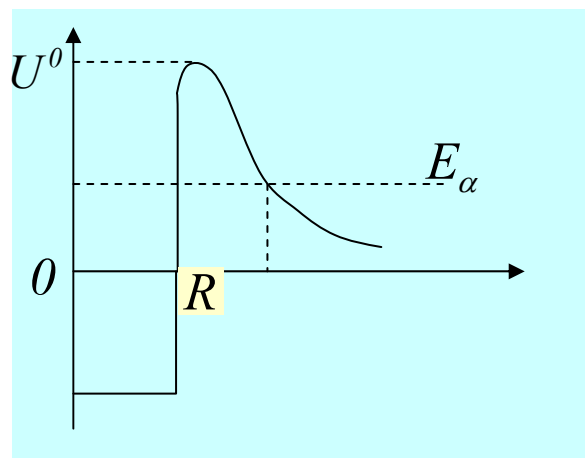
$$T_{1/2} = \exp\left(C + \frac{D}{\sqrt{E_\alpha}}\right) = A \cdot \exp\left(\frac{D}{\sqrt{E_\alpha}}\right)$$

C i D stałe

Widać, że **małe zmiany w energii powodują duże zmiany w czasie życia**. Powyższa reguła ma swoje uzasadnienie w modelu rozpadu  $\alpha$  (1928 Gamow, Condon i Gerni) opartego o kwantowe przejście tunelowe.

Na zewnątrz jądra tylko potencjał Coulomba

$$U = U_{Coul} = k \frac{2(Z-2)e^2}{r}$$



Na granicy  $U_0 = U_{Coul} = k \frac{2(Z-2)e^2}{R} = k \frac{2(Z-2)e^2}{r_0 A^{1/3}}$

Dla przykładu weźmy jądro Uranu  $A=238$   $Z=92$  - po podstawieniu mamy  $U_0 \approx 30 \text{ MeV}$

Emitowane alfy mają zaledwie 10 MeV a nie 30 MeV i gdyby podlegały klasycznej mechanice to rozpad taki byłby zabroniony

Proces jednak ma miejsce dzięki efektowi tunelowemu. Załóżmy prostokątny potencjał  $U$

poza studnią

energia kinetyczna

obszar studni

$$-\frac{\hbar^2}{2m_\alpha} \frac{d^2\psi}{d^2r} = E_\alpha \psi$$

$$\frac{d^2\psi}{d^2r} = \frac{2m_\alpha}{\hbar^2} (U - E_\alpha) \psi = \eta^2 \psi$$

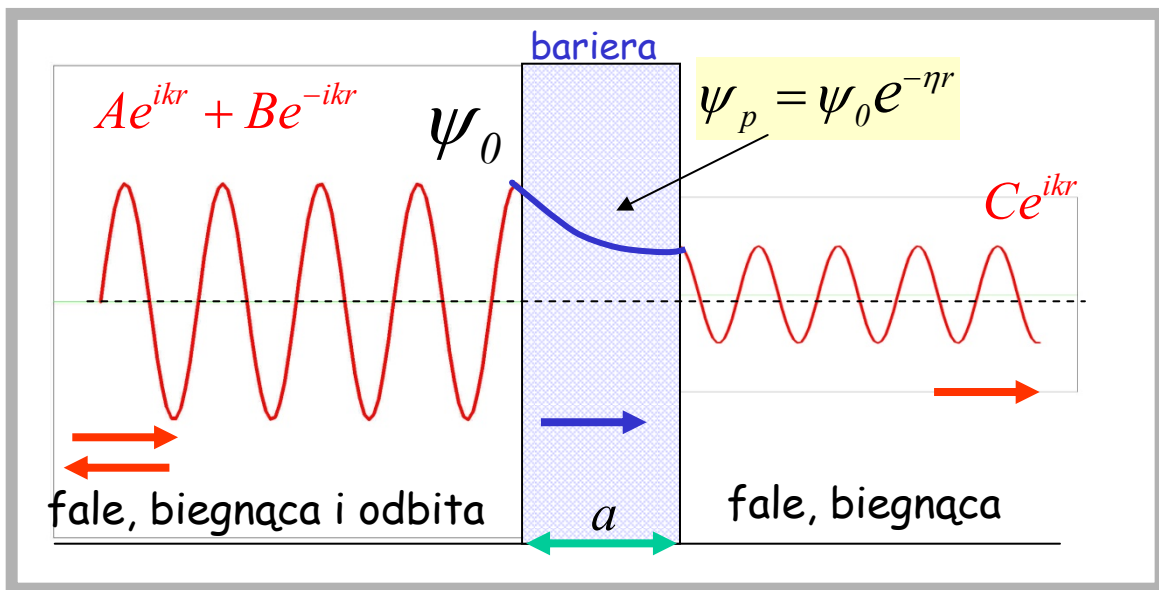
$$\eta^2 = \frac{2m_\alpha}{\hbar^2} (U - E_\alpha)$$

Rozwiązaniem jest fala zanikająca typu  $\psi = \psi_0 e^{-\eta r}$

$$\eta = \sqrt{\frac{2m_\alpha}{\hbar^2} (U - E_\alpha)}$$

definiujemy tzw. parametr penetracji  $\psi_p$

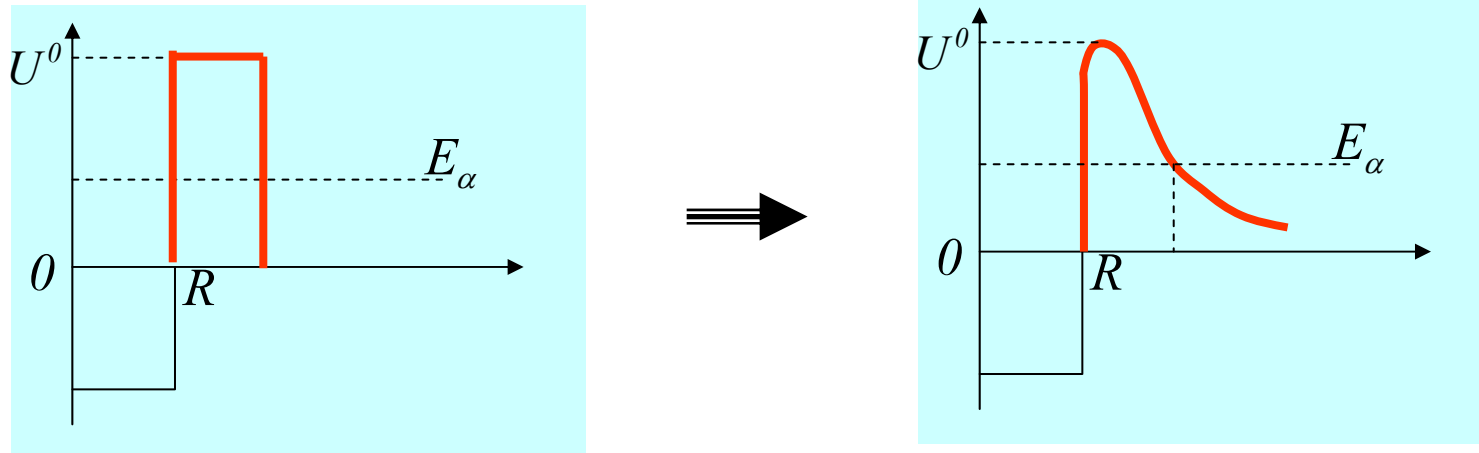
$$P = \frac{|\psi_p(r)|^2}{|\psi_0|^2} = \frac{|\psi_0|^2 |e^{-\eta r}|^2}{|\psi_0|^2} \Bigg|_{r=a} = e^{-2\eta a} = \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m_\alpha (U - E_\alpha)} \cdot a \right\}$$



Czyli

$$P = \exp \left\{ -\frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m_\alpha (U - E_\alpha)} \right\}$$

Jeśli zastąpimy potencjał prostokątny (dla którego powyższe rozumowanie zostało przeprowadzone przez potencjał Coulomba ,



to musimy trochę zmodyfikować nasze równanie

$$P = \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \sqrt{2 m_{\alpha} (U - E_{\alpha})} \cdot a \right\} \Rightarrow$$

$$P = \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \int_R^{r_0} \sqrt{2 m_{\alpha} (U(r) - E_{\alpha})} \cdot dr \right\}$$

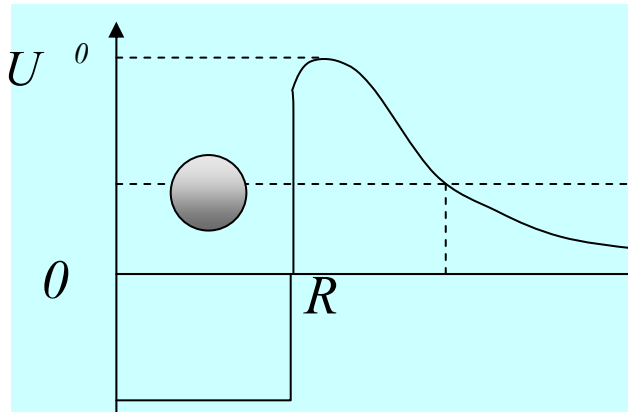
$P$  wielkość bezwymiarowa

Zauważmy, że gdy  $E_\alpha = U$  to  $P=1$ , zaś  $P$  maleje z maleniem  $E$  lub wzrostem  $U$

stąd możemy obliczyć stałą rozpadu  $\lambda$  mnożąc współczynnik penetracji przez ilość  $\omega$  cząstek  $\alpha$  dochodzących w 1 sek do brzegu jądra

$$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \omega P \quad [\lambda] = s^{-1}$$

Wewnątrz jądra formują się co chwila cząstki alfa i uderzają o barierę jądra



$\omega$  reprezentuje sobą dwa efekty:

1. prawdopodobieństwo kreacji wewnątrz jądra,
2. częstość zderzeń z barierą  $f$

$$\omega = p_\alpha f$$

ocena  $p_\alpha$  jest trudna i podlega modelom, zwykle przyjmujemy  $p_\alpha \approx 1$  zaś  $f$  jest odwrotnością czasu  $t$  przelotu przez jądro

$$t = \frac{2R}{v} \quad \text{ale} \quad v = \frac{p_\alpha}{m_\alpha} \quad \text{zasada Heisenberga} \quad p_\alpha \approx \frac{\hbar}{R} \quad \text{bo} \quad p_\alpha R \sim \hbar$$

$$t = \frac{2m_\alpha R^2}{\hbar} \quad f = \frac{1}{t} = \frac{\hbar}{2m_\alpha R^2}$$

$$\text{jeśli } p_\alpha \approx 1 \quad \text{to} \quad \omega \approx f \approx \frac{\hbar}{2m_\alpha R^2}$$

proste podstawienie z  $R \approx 1,5 \text{ fm}$  prowadzi do

$$\omega = \frac{10^{20}}{s}$$

### Z taka częstotliwością uderza w barierę cząstka alfa

Rachunki pokazują, że cząstka przejdzie barierę po  $10^{40}$  zderzeniach. Dlatego średnio jądro wyemituje alfę po

$$\frac{10^{40} \text{ zderzeń / rozpad}}{10^{20} \text{ zderzeń / s}} = 10^{20} \text{ s} \quad \text{Setki miliardów lat}$$

Jak to jednak jest, że obserwujemy wiele rozpadów? Jeśli kilka gramów np.. Uranu zawiera około

$10^{23}$  jąder to

$$10^{20} \text{ zderzeń/jądro} \times 10^{23} \text{ jąder} = 10^{43} \text{ zderzeń/s}$$

$$\frac{10^{43} \text{ zderzeń/s}}{10^{40} \text{ zderzeń/rozpad}} = 1000 \text{ rozpadów/s}$$



Podstawiając

$$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \omega P$$

$$\omega \approx f \approx \frac{\hbar}{2m_\alpha R^2}$$

$$\lambda = \omega P = \frac{\hbar}{2m_\alpha R^2} \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \int_R^{r_0} \sqrt{2m_\alpha (U(r) - E_\alpha)} \cdot dr \right\}$$

Rozpad podlega temu samemu prawu i w przypadku rozpadów niezależnych (jeden niezależny od drugiego) mamy

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

Czas życia  $\tau$

$$\tau = \int_0^\infty t \cdot \frac{dN(t)}{N_0} = \frac{-1}{N_0} \int_0^\infty t \cdot \lambda N_0 e^{-\lambda t} dt = -\lambda \int_0^\infty t \cdot e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

stąd

Ważna informacja - czas życia jądra jest odwrotnie proporcjonalny do stałej rozpadu.

Można zapytać jaki jest związek czasu życia obiektu z rozmyciem energii (lub masy) stanu w jakim się dany obiekt (cząstka) znajduje. Można to pokazać na gruncie mechaniki kwantowej (patrz uzupełnienie na końcu wykładu).

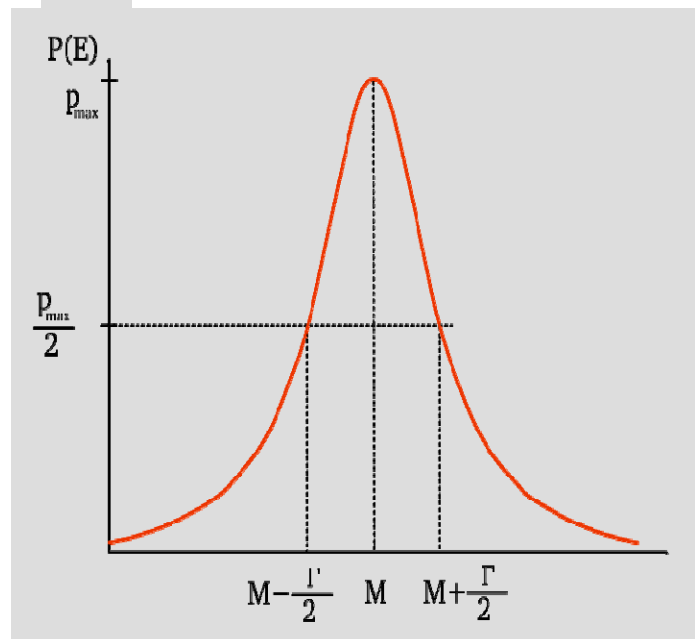
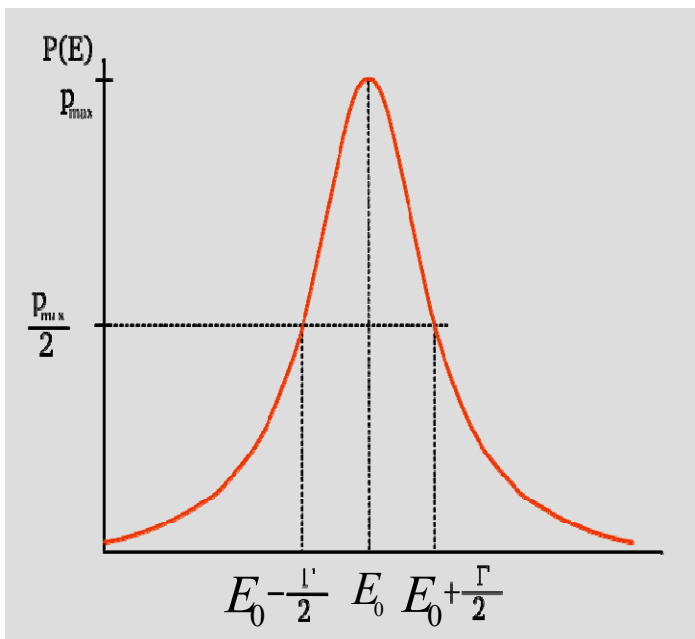
Otóż uprzednio rozważaliśmy związek pomiędzy czasem życia  $\tau$  a tzw. stałą rozpadu  $\lambda$

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

Można zdefiniować podobną **kwantową** wielkość, która ma trochę inną interpretację niż  $\lambda$  ale jest z nią prosto powiązana

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau} \quad \Gamma = \hbar\lambda \quad [\Gamma] = eV$$

i opisuje rozmycie energetyczne (masowe) badanego obiektu – tzn stan kwantowy niekoniecznie musi mieć ściśle określoną energię lub masę.



Problem czasu życia przy rozpadzie beta i jego związek z amplitudą opisującą proces.

Rozpad beta musi być inaczej traktowany w porównaniu z rozpadem alfa ze względu na fakt, że mamy do czynienia z kompletnie różnymi procesami

Musimy wprowadzić pewne podstawowe pojęcia. Jeśli mamy stan początkowy pewnego procesu i stan końcowy to istnieje pewien operator unitarny, (zachowujący prawdopodobieństwo) zwany macierzą rozpraszania  $\hat{S}$  taki, że

$$|końc\rangle = \hat{S} |pocz\rangle \quad \text{w skrócie} \quad |f\rangle = \hat{S} |i\rangle$$

dla  $n \rightarrow pe^{-}\bar{\nu}$   $i$  - (initial) - stan początkowy  $n$   
 $f$  - (final) stan końcowy  $pe^{-}\bar{\nu}$

Jeśli nie ma żadnego oddziaływania to  $\hat{S} = \hat{I}$  (jednostkowa)

ogólnie oddziaływanie wyraża się poprzez operator  $T$   $\hat{S} = \hat{I} + \hat{T}$

$$T_{if} = \langle f | \hat{T} | i \rangle = \int \psi_f^* \hat{T} \psi_i d\Lambda$$

gdzie całkowanie przebiega wszystkie zmienne od których zależą funkcje  $\psi$

Jeśli oddziaływanie między cząstkami jest w miarę słabe to amplituda może być wyliczona z rachunku zaburzeń i wtedy w pierwszym przybliżeniu mamy

$$\begin{aligned}
 T_{if} &\stackrel{\text{def}}{=} \langle f | \hat{T} | i \rangle \approx \text{const} \cdot \delta^4(P_f - P_i) \langle f | \hat{H}_{\text{int}} | i \rangle = \\
 &\text{const} \cdot \delta^4(P_f - P_i) \underbrace{\int \psi_f^* \hat{H}_{\text{int}} \psi_i d\Lambda}_{M_{if}} = \text{const} \cdot \delta^4(P_f - P_i) M_{if}
 \end{aligned}$$

zasada zachowania czteropędu

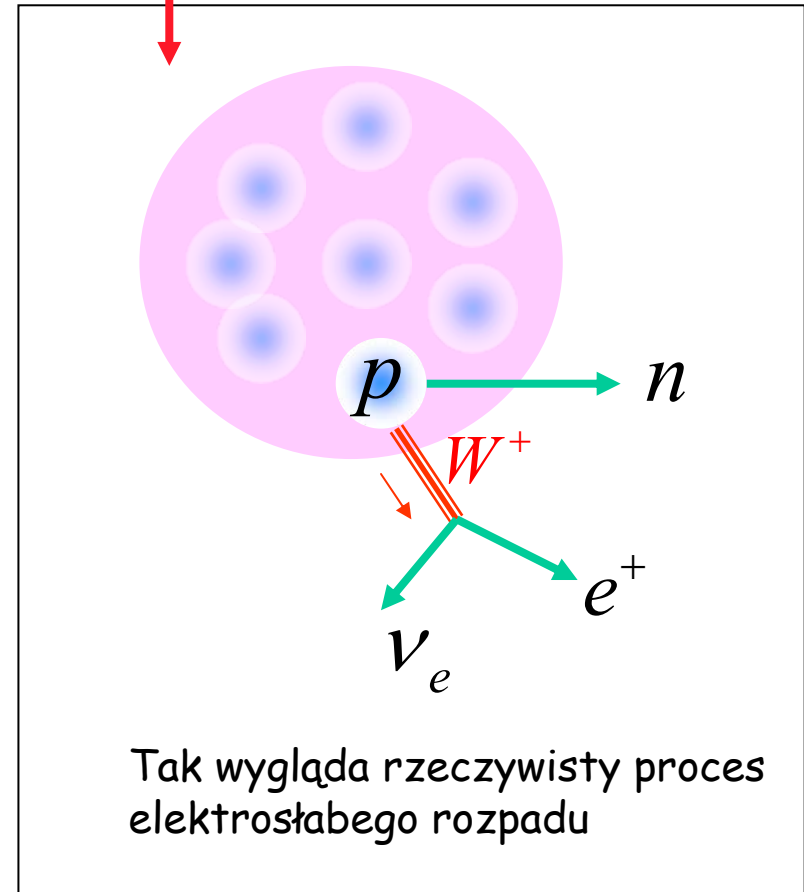
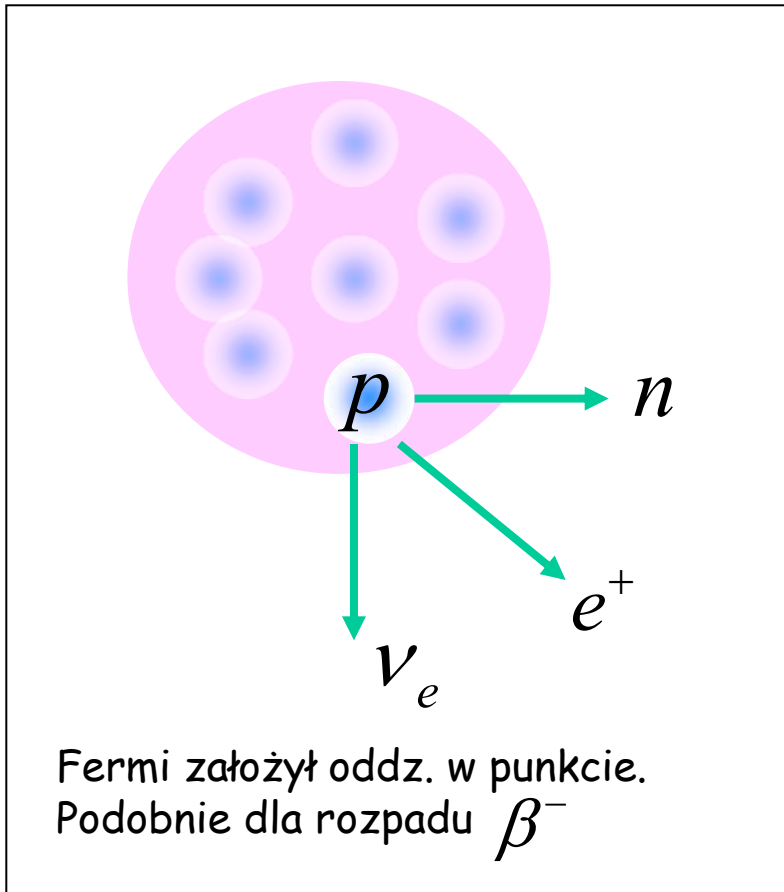
Rozumowanie opisujące wielkość amplitudy jest następujące:

Jeśli amplituda na dany proces rozpadu jest "duża" w sensie gęstości prawdopodobieństwa to znaczy, że proces zachodzi stosunkowo łatwo a więc obiekt krócej żyje. Musimy więc powiązać razem te rzeczy ilościowo. Miara "łatwości" procesu jest pewna wielkość związana z kwadratem amplitudy i podająca prawdopodobieństwo przejścia w danym procesie.

Jeśli  $\psi_i$  jest "podobne" do  $\psi_f$  to  $M_{if}$  jest "duże" i prawdopodobieństwo rozpadu jest duże (czas życia krótki).

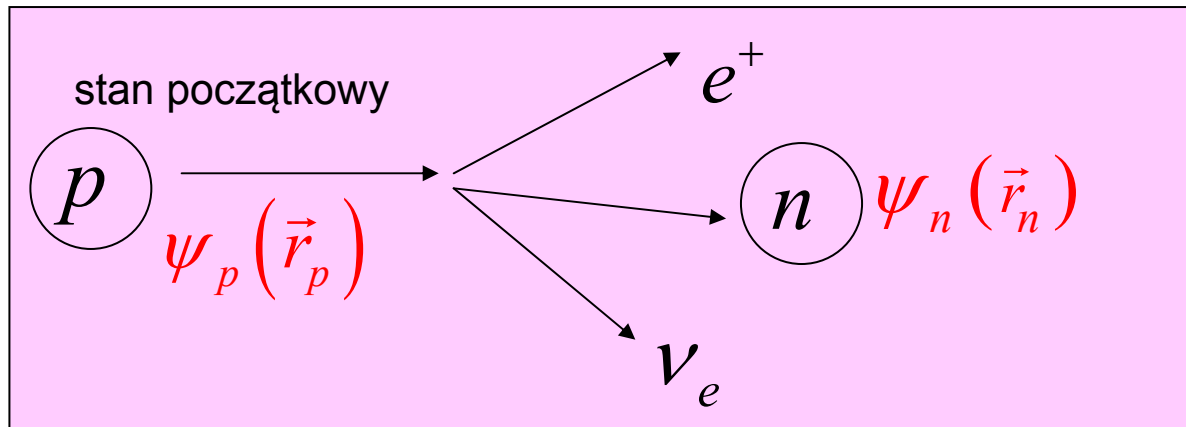
Cały jak widać problem polega na obliczeniu naprzód amplitudy  $M_{if}$

Istnieją dwie metody policzenia tego problemu. Historyczny, Fermiego i współczesna w oparciu o teorię **elektrosłabych oddziaływań** (wymiana  $W$ ).



Dokładny rachunek w obu przypadkach jest czasochłonny i wymaga (w szczególności dla oddziaływań elektrosłabych) dodatkowej wiedzy. **Dlatego przedyskutujemy tylko przybliżenie Fermiego.**

Weźmy na przykład  ${}^{17}_9F \rightarrow {}^{17}_8O + e^+ + \nu_e$



proton zamienia się w neutron (podproces)

Model Fermiego daje przepis na amplitudę  $M$  - nie zależy bezpośrednio od zmiennych ani neutrina ani elektronu !

$$M_{if} = G_W \underbrace{\int \psi_n^*(\vec{r}) \cdot \psi_p(\vec{r}) \cdot d^3\vec{r}}_{M_F} = G_W \cdot M_F$$

$G_W - const$

Jeśli  $\psi_n^*(\vec{r}) \approx \psi_p(\vec{r})$  to jak wspomniałem amplituda duża, czas życia krótki - rozpad zachodzi szybko

Jeśli amplituda (związana z prawdopodobieństwem) jest duża (duże prawdopodobieństwo - to jądro szybko się rozpadnie, a więc czas życia jest odwrotnie proporcjonalny do amplitudy.

$$\tau \sim \left[ G_W^2 \cdot |M_F|^2 \right]^{-1}$$

ale ze znanego  
związku mamy

$$\lambda = \frac{1}{\tau} \sim G_F^2 \cdot |M_F|^2$$

$$X \rightarrow Y + \nu + e$$

Przywołujemy postać

$$M_F = \int \psi_n^*(\vec{r}) \cdot \psi_p(\vec{r}) \cdot d^3\vec{r}$$

Widać stąd, że jeśli  $\psi_n^*(\vec{r})$  "podobne" do  $\psi_p(\vec{r})$  to wtedy całka przyjmuje maksimum i czas życia jest krótki. Gdyby były identyczne to z normalizacji byłoby

$$M_F = \int \psi_n^*(\vec{r}) \cdot \psi_p(\vec{r}) \cdot d^3\vec{r} = 1$$

Jeśli natomiast stan protonu jest bardzo różny od stanu neutronu to "przekrywanie" się obu funkcji jest małe co skutkuje długim czasem życia (patrz równanie na  $\tau$ ).

Rozpady beta są procesem słabym i bariera Kulombowska nie przeszkadza - dlatego krótsze czasy życia.

Zadajmy pytanie kiedy funkcje są prawie identyczne ? Gdyby pominąć oddz. Kulomba to z niezmienniczości izospinowej

$$\psi_n(\vec{r}) = \psi_p(\vec{r})$$

(pod warunkiem, że mają jednakowe orientacje spinów i jednakowe parzystości)

Gdy różne są spiny lub parzystości to funkcje te są różne i  $M_F$  jest małe - jądro żyje długo. Stąd pierwsze reguły wyboru Fermiego: dozwolone są tylko przejścia spełniające

zmiana spinu jądra  $\Delta I = 0$

zmiana parzystości jądra  $\Delta \eta = 0$

tylko dla (antyrównoległe)

$$\vec{S} = \vec{S}_e + \vec{S}_\nu = 0$$

Teoria Fermiego nie brała pod uwagę zależności  $M_{if}$  od równoległych spinów neutrina i elektronu. Udoskonalony model Gamowa-Tellera, który to uwzględnia osłabia trochę reguły wyboru Fermiego

zmiana spinu jądra  $\Delta I = 0, \pm 1$

zmiana parzystości jądra  $\Delta \eta = 0$

$$\vec{S} = \vec{S}_e + \vec{S}_\nu = 0$$

$$\vec{S} = \vec{S}_e + \vec{S}_\nu = 1$$



## Materiał nadprogramowy

Formalizm poniższy dotyczy zarówno formacji cząstek jak również ich rozpadu

W przypadku rozpadu cząstek mamy do czynienia ze stanem niestacjonarnym - zależnym od czasu (patrz rozwiązania równania Schroedingera.)

$$\psi(t) = \psi(0) \cdot e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$$

Z drugiej strony znamy prawo rozpadu dla dowolnych, niezależnie rozpadających się obiektów

$$|\psi(t)|^2 = |\psi(0)|^2 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Do tej pory energia była rzeczywista - spróbujmy napisać ją w postaci zespolonej

$$E = E_0 - \frac{i\Gamma}{2}$$

U góry mamy napisaną funkcję w postaci zależnej od czasu. Jeśli chcemy ją wyrazić jako funkcję energii musimy zrobić **transformatę**

**Fouriera**

$$\tilde{\psi}(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dt \cdot e^{\frac{iEt}{\hbar}} \cdot \psi(t)$$

$$\tilde{\psi}(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dt \cdot e^{\frac{iEt}{\hbar}} \cdot \underbrace{\psi(0)}_{\psi(t)} \cdot e^{-\frac{iEt}{\hbar}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dt \cdot e^{\frac{iEt}{\hbar}} \cdot \psi(0) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} \overbrace{(E_0 - i\Gamma/2)}^{\text{wstawiamy za } E}} t =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \psi(0) \cdot \int_0^{\infty} dt \cdot e^{\left[ it \frac{\overbrace{A}}{(E-E_0)} - t \frac{\overbrace{B}}{2\hbar} \right]}$$

dolna granica całki wynosi 0  
bo funkcja  $\Psi(0)$  jest różna od  
zera dla wartości  $t$  dodatnich

Jest to całka typu

$$\int_0^{\infty} dt \cdot e^{\overbrace{(iA-B)t}^z} = \frac{1}{(iA-B)} \int_0^{\infty(iA-B)} dz \cdot e^z = \frac{1}{(iA-B)} \left( \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x(iA-B)} - e^0 \right)$$

$$= \frac{1}{(iA-B)} \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{iAx}}{e^{Bx}} - 1 \right) = \frac{1}{(B-iA)}$$

Po podstawieniu za A i B do wartości całki mamy

$$\tilde{\psi}(E) = \frac{\psi(0)}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\frac{\Gamma}{2\hbar} - \frac{i(E-E_0)}{\hbar}} = \frac{\hbar\psi(0)}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\frac{\Gamma}{2} - i(E-E_0)} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i\hbar\psi(0)}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(E-E_0) + i\frac{\Gamma}{2}}$$

Po obliczeniu gęstości prawdopodobieństwa

$$|\tilde{\psi}(E)|^2 = |\tilde{\psi}(E) \cdot \tilde{\psi}^*(E)| = \frac{\hbar^2 |\psi(0)|^2}{2\pi} \frac{1}{(E-E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$$

to przedstawia sobą rozkład energii rozpadającego się obiektu

Istnieje kilka postaci wzoru np. wzór relatywistyczny (nie dyskutujemy).

Kwadrat amplitudy związany jest z przekrojem czynnym stąd przekrój czynny wygląda podobnie

