wykład 1.

Fizyka Jądrowa

Bogdan Muryn

Jednostki:

Podczas tego wykładu obowiązują jednostki układu SI. Przez ładunek będziemy rozumieć (o ile nie zaznaczymy inaczej):

$$Q \rightarrow \frac{Q}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}$$

Wtedy ładunek elementarny ma postać (pamiętamy, że epsilon posiada wymiar:

$$e = 1.52 \cdot 10^{-24} kg^{1/2} \cdot m^{3/2} \cdot s^{-1}$$

Używa się często jednostek odpowiadających skali rozważanego problemu: np. jednostką długości w fizyce jądrowej jest "femtometr"

$$1\, fm = 10^{-15} m$$

Przekrój czynny na dany proces przyjmujemy w barnach:

$$1\, b = 10^2\ fm^2 = 10^{-28} m^2$$

W skali energetycznej fizyki jądrowej przyjmuje się się jednostkę 1 MeV:

$$\boxed{1\ MeV = 10^6\ eV = 1,6 \cdot 10^{-13}\ J}$$

W fizyce cząstek elementarnych definiujemy jednostkę

$$1\ GeV = 10^9\ eV$$

Nowa Fizyka ? i przyszłe eksperymenty zmieniają dotychczasową skalę na TeV:

$$1\ TeV = 10^{12}\ eV$$

Masę obiektów mikroświata wyrażamy w jednostkach:

$$\left(GeV / c^2\right)$$

$$\left(zgodnie\ z\ wzorem\ \ E^2 = m^2c^4 + p^2c^2\right)$$

Gdzie c jest prędkością światła. Pęd cząstek mierzymy w jednostkach:

$$\left(GeV / c\right)$$

(Zgodnie ze wzorem $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$)

Energia odpowiada temperaturze zgodnie z $\mathrm{E} \sim \mathrm{kT}$ $\quad \mathrm{k} \approx 8.6 \cdot 10^{-5} \frac{\mathrm{eV}}{\mathrm{J}}$

$$\boxed{1\ \mathrm{GeV} \equiv 10^{13}\,\mathrm{K}}$$

Często używa się relatywistycznego układu jednostek , c=1. Wtedy

$$E=\frac{m}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2}},\quad \vec{p}=\frac{m\vec{\mathrm{v}}}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2}},\quad E^2=\vec{p}^{\,2}+m^2 \qquad [E]=[p]=[m]=GeV$$

Skądinąd w fizyce kwantowej wybiera się często układ jednostek z warunkiem $\hbar=1$
Można połączyć oba te układy w tzw. Naturalny Układ Jednostek,

$$\hbar=c=1$$

$$[c]=\frac{[L]}{[t]}=1 \quad \Rightarrow \quad [L]=[t]$$

oczywiście każda prędkość jest bezwymiarowa

Wtedy:

$$\underbrace{[E]=[m]=[p]}_{E^2=p^2+m^2}=\underbrace{\left[L^{-1}\right]=\left[t^{-1}\right]}_{bo\ \ \Delta p\Delta L\sim\hbar=1}$$

$$[p]=[L]^{-1}$$

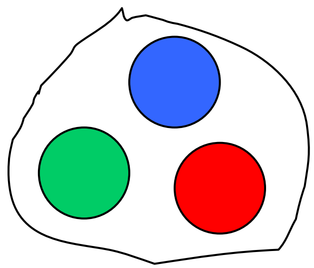
$$\boxed{\begin{aligned}&[E]=[m]=[p]=1\ GeV=[L]^{-1}\\&[L]=[t]=1\ GeV^{-1}\end{aligned}}$$

Podstawy Mechaniki Kwantowej (MK)

Klasycznie – rozwiązanie problemu zwykle przez równanie różniczkowe. Np. równanie Newtona. Wyznaczamy trajektorię.W MK możemy podać tylko prawdopodobieństwo danej cechy – nie możemy stwierdzić, że na pewno.

Tu mamy konstrukcję matematyczną polegająca na tym, że równania mechaniki kwantowej zawierają pojęcie operatora odpowiadającego danej wielkości fizycznej. Operator taki działa na pewien obiekt (którego zdefiniowanie było wielkim osiągnięciem XX wieku) – funkcję falową ψ .

$$\widehat{Operator}\cdot\Psi = liczba\cdot\Psi$$



układ fizyczny

ψ

Operator danej wielkości fizycznej "działa" na funkcję falową dając wartość fizyczną.

Wspomniana liczba nazywa się wartością własną operatora. Jeśli jest to operator energii to daje on wartość własną energii czyli energię układu, a jeśli jest to operator np. pędu to po działaniu na funkcję falową otrzymujemy wartość własną pędu, która jest wartością pędu rozpatrywanego układu fizycznego.

Niech fala płaska opisuje stan opisujący strumień lecących cząstek np. fotonów. (równanie fali EM). Przepiszmy nasze równanie w innej postaci,

$$\Psi = Ae^{i(kx-\omega t)} = Ae^{i(\frac{2\pi}{\lambda}\cdot x-\omega t)} = \ldots \quad \lambda = \frac{h}{p} \quad \ldots = Ae^{i(\frac{2\pi p}{h}\cdot x-\omega t)}$$

$$Ae^{i\left(\frac{p}{\frac{h}{2\pi}}\cdot x-\omega t\right)} = Ae^{i(\frac{p}{\hbar}\cdot x-\omega t)}$$

operator pędu ma postać

$$\boxed{\hat{P} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}}$$

wróćmy do naszego zasadniczego równania

$$\hat{P}\Psi = wartość_{pędu}\cdot\Psi = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}Ae^{i(\frac{p}{\hbar}\cdot x-\omega t)} = p\cdot Ae^{i(\frac{p}{\hbar}\cdot x-\omega t)}$$

liczba określająca pęd cząstek w strumieniu

Możemy skonstruować również operator energii

$$\widehat{E} = i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}$$

$$\boxed{\widehat{E}\Psi = wartos\acute{c}_{p\k{e}du} \cdot \Psi} \Rightarrow \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} A e^{i(\frac{p}{\hbar}\cdot x - \omega t)} = -i^2 \hbar \omega A e^{i(\frac{p}{\hbar}\cdot x - \omega t)} =$$

$$\frac{h}{2\pi} \cdot 2\pi \nu A e^{i(\frac{p}{\hbar}\cdot x - \omega t)} = \underbrace{h\nu}_{E} A e^{i(\frac{p}{\hbar}\cdot x - \omega t)} = E A e^{i(\frac{p}{\hbar}\cdot x - \omega t)}$$

Ale operator energii można również wyrazić przez kwadrat pędu

$$\hat{E} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$$

wtedy

$$\hat{E} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{1}{2m} i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial}{\partial x^2}$$

Również operatorem energii jest tzw. hamiltonian, w którym pęd został zastąpiony operatorem pędu

$$\boxed{\hat{H}} = \hat{E} = \boxed{\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(r)} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r) \qquad \widehat{E}\cdot\Psi = wartość_{energii}\cdot\Psi$$

Jeśli stan fizyczny (funkcja falowa) jest stanem własnym dla danego operatora wtedy spełnione jest równanie

$$\hat{G}\Psi = \boxed{G_{liczba}}\Psi$$

i dany stan ma określoną wartość "obserwabli" odpowiadającej danemu operatorowi. Ten sam stan własny Ψ może nie być stanem własnym innego operatora i wtedy wartość tej obserwabli jest dla tego stanu nieokreślona.

Obowiązuje zasada superpozycji każdą funkcję falową można przedstawić jako kombinację liniową zupełnego układu funkcji będących stanami własnymi jakiegoś innego operatora.

$$\Psi = \sum c_i \cdot \varphi_i$$

Wszystkie operatory, które komutują ze sobą mają wspólny układ funkcji wlasnych.

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \left[\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\right] = 0$$

Każdemu obiektowi przypisujemy funkcję falową. Funkcja ta zależy od zbioru niezależnych zmiennych. W odróżnieniu od mechaniki klasycznej nie można ich wszystkich określić. Dla obiektu klasycznego możemy wyznaczyć położenie i pęd zaś dla obiektu opisanego mechaniką kwantową albo jedno albo drugie.

Zauważmy, że równanie operatorowe $\widehat{Operator} \cdot \Psi = wartość \cdot \Psi$

Może prowadzić do wyznaczenia wartości własnej albo funkcji określającej stan ψ

Probabilistyczna interpretacja funkcji falowej.

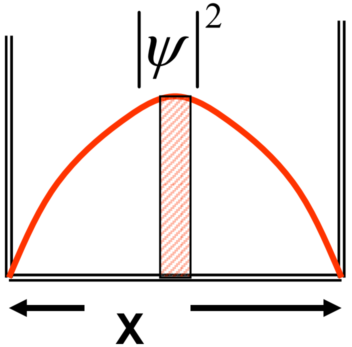
Jeśli funkcja falowa zależy od jakiejś wielkości fizycznej np. od pędu $\psi(pęd)$

daje prawdopodobieństwo, że rozpatrywany stan znajdzie się w stanie pędowym w przedziale

$$|\psi(p)|^2 dp = \psi(p)\psi^*(p)dp$$

daje prawdopodobieństwo, że rozpatrywany stan znajdzie się w stanie pędowym w przedziale $(p, p+dp)$

np. dla funkcji zależnej od położenia



Jeśli rozwiązaniem byłaby taka fala wtedy stwierdzilibyśmy, że największe prawdopodobieństwo spotkania cząstki jest w środku pudła. Najmniejsze na brzegach.

to kwadrat tej funkcji falowej podaje gęstość prawdopodobieństwa, tzn.

Równanie Schrödingera opisuje rozwój w czasie stanu "prostego" (tzn. nierelatywistyczny i bez dodatkowych stopni swobody np. spinu) – załóżmy dla prostoty przypadek jednowymiarowy, a do energii kinetycznej dodajemy również **operator energii potencjalnej**, x.

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x,t) \right) \psi(x,t) = \hat{H} \psi(x,t)$$

dla 3-wymiarów

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x,t) \right) \psi(x,t) = \hat{H} \psi(x,t)$$

Jeśli $V(x,t) = V(x)$ to zmienne są separowalne, tzn. $\boxed{\psi(x,t) = \phi(x) \cdot f(t)}$ **fala stojąca**

Jest to najprostsza postać równania, które rozwiązuje się np. Dla atomu wodoru

Równanie Schroedingera jest NIERELATYWISTYCZNE !!

Próby konstrukcji równań relatywistycznych:

1. Równanie Kleina-Gordona
2. Równanie Diraca

Równanie Kleina-Gordona

$$\boxed{E^2 = p^2c^2 + m^2c^4}$$

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \qquad p \to -i\hbar\nabla \qquad \left(p_x \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

ale $\quad E^2 \to -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} \qquad p^2 = -\hbar^2\nabla^2$

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\hbar^2c^2\nabla^2 + m^2c^4 \quad \to \quad \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hbar^2c^2\nabla^2 + m^2c^4 = 0$$

zbudowaliśmy operator, teraz działamy nim na funkcję stanu φ

$$\left(\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hbar^2c^2\nabla^2 + m^2c^4\right)\varphi = 0$$

jeśli zdefiniujemy $\quad \Box = \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hbar^2c^2\nabla^2$

i przyjmiemy układ jednostek $\quad c = \hbar = 1 \quad$ to otrzymujemy równanie Kleina-Gordona

$$\boxed{\left(\Box + m^2\right)\varphi = 0}$$

masa jest skalarem, $\Box$ też jest skalarem – **stąd równanie to opisuje tylko cząstki skalarne (bez spinu)**

Równanie Diraca

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\hat{H}\psi$$

poprzednio

$$H=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(x,t)$$

Dirac założył, że jego równanie będzie również niezmiennicze względem transformacji Lorentza ale będzie miało inną postać

$$H=c\alpha\left(-i\hbar\nabla\right)+\beta mc^2$$

wtedy po działaniu na funkcję otrzymujemy

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left[c\alpha\left(-i\hbar\nabla\right)+\beta mc^2\right]\psi$$

Rozwiązaniem jest już NIE JEST funkcja opisująca cząstki bezspinowe (skalarne) ale FERMIONY (o spinie połówkowym) $\hbar\cdot\frac{1}{2}$ np. elektrony oraz ich antycząstki pozytony

$$\psi=\begin{pmatrix} u\rightarrow elektron \\ v\rightarrow pozyton \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

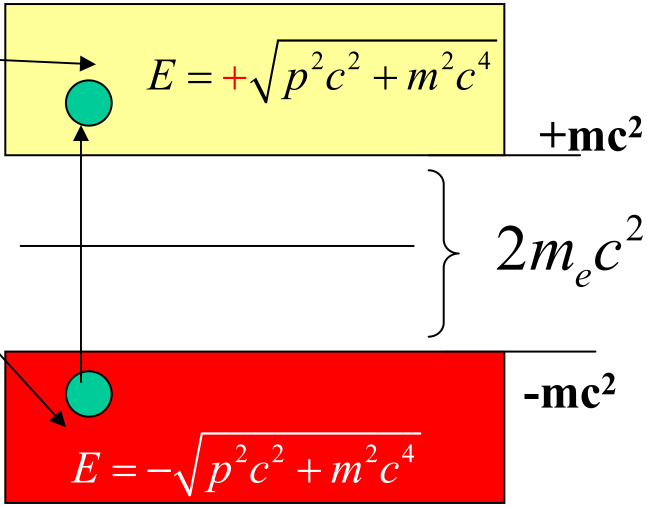
[Pozyton](#) **(1928)**

Paul Dirac

$$E^2 = p^2 + m^2$$

$$E = \pm\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \ \mathbf{?}$$

pasma elektronowe



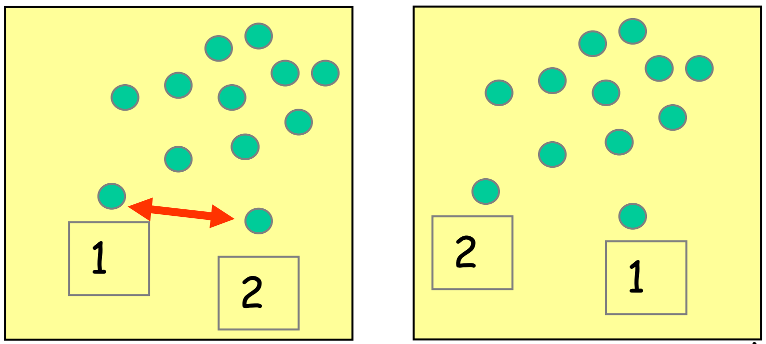
Gdy energia $E > 2m_ec^2$

wtedy elektron z dolnego pasma przeskakuje do górnego. W dolnym dziura (dodatnia – pozyton) a w górnym elektron. Kreacja pary elektron-pozyton.

Inny przykład na równanie własne:

Problem statystyk kwantowych – statystyka Fermiego-Diraca i Bosego-Einsteina

Rozważamy układ nierozróżnialnych cząstek. Wśród różnych operatorów takich jak operator energii, pędu itd. istnieje operator zamiany miejscami dwóch cząstek (operator permutacji)



Jeśli podziałamy takim operatorem na funkcję takiego układu to otrzymamy wartość własną tego dziwnego operatora (zakładamy, że badany stan jest stanem własnym operatora permutacji.

$$\hat{P}\psi\left(r_1,r_2,s_1,s_2\right)=\psi\left(r_2,r_1,s_2,s_1\right)=$$

$$\eta\psi\left(r_1,r_2,s_1,s_2\right)$$

Dla prostoty opuszczamy dalej pozostałe liczby kwantowe.

W skrócie napiszemy $\hat{P}\psi(1,2)=\psi(2,1)=\eta\ \psi(1,2)$

gdy podziałamy takim operatorem raz jeszcze to, $\hat{P}\hat{P}\psi(1,2)=\hat{P}\psi(2,1)=\ \hat{P}\eta\psi(1,2)$

$$\psi(1,2)=\eta^2\ \psi(1,2)$$

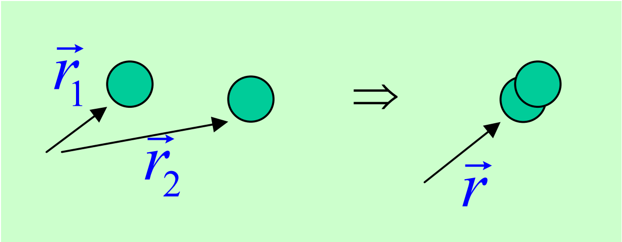
stąd widać, że $\eta^2=1 \ \rightarrow \ \eta=\pm1$ czyli dla jednego typu cząstek wartość własna wynosi +1 a dla drugiego typu -1

$$\underbrace{\hat{P}\psi\left(r_1,r_2\right)=\psi\left(r_2,r_1\right)=+\psi\left(r_1,r_2\right)}_{\text{bozony spin całkowity 0,1,2.....}} \qquad \underbrace{\hat{P}\psi\left(r_1,r_2\right)=\psi\left(r_2,r_1\right)=-\psi\left(r_1,r_2\right)}_{\text{fermiony spin } \frac{1}{2}\text{, 3/2 itd}}$$

Ponieważ kwadrat funkcji wyznacza prawdopod. więc można powiedzieć, że z tego punktu widzenia zmiana jest niezauważalna! Zasadnicza różnica !!! Dotąd w fizyce nie znaleziono przejść bozon w fermion (lub odwrotnie).

Czyli po działaniu operatorem permutacji dla bozonów funkcja własna przyjmuje znak plus zaś dla fermionów znak minus. Z tego wynika praktyczna własność zwana <u>zakazem Pauliego</u>. Wyobraźmy sobie dwa fermiony będące tak blisko siebie, że

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_2 = \vec{r}$$



wtedy z poprzedniego wyniku

$$\psi(r_2, r_1) = \hat{P}\psi(r_1, r_2) = \eta\psi(r_1, r_2)$$

$$\hat{P}\psi(r,r) = \underbrace{\psi(r,r) = -\psi(r,r)}_{\text{Możliwe tylko w wypadku gdy } \psi = 0}$$

Stwierdzamy zatem, że dwie cząstki nierozróżnialne (czyli mające takie same liczby kwantowe) nie mogą przebywać w "tym samym miejscu". Stąd krok do zasady Pauliego, która mówi, że na jednej orbicie nie mogą przebywać dwa elektrony (fermiony) mające wszystkie liczby kwantowe identyczne. Muszą np. różnić się kierunkiem spinu.

Co dzieli mechanikę klasyczną i mechanikę kwantową ?

W mechanice Newtona i jej relatywistycznym rozszerzeniu obiekt ma zawsze określone parametry. Zawsze można (jest to tylko kwestią użytych narzędzi) zmierzyć prędkość, położenie, energię, moment pędu oraz interwał czasowy zdarzenia. W kwantowym podejściu jest jednak inaczej !

Np. jeśli potrafimy określić położenie obiektu to nie potrafimy określić jego pędu (prędkości) – i na odwrót jeśli znamy pęd to nie jesteśmy w stanie określić gdzie się badany obiekt znajduje (położenie obiektu). Przez obiekt rozumiemy np. elektrony, protony itd..

Znajduje to swoje odbicie w tzw. nierówności Heisenberga (wyprowadza się ją z zasad mechaniki kwantowej).

$$\boxed{\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar}$$

Aby ta nierówność była spełniona to dokładne wyznaczenie położenia $\Delta x \to 0$ pociąga za sobą warunek $\Delta p_x \to \infty$ (i na odwrót)

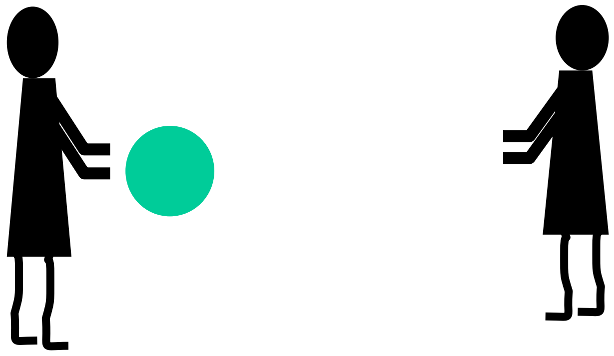
Dotyczy to również składowej x i y oraz odpowiednich pędów tzw. zmienne kanonicznie sprzężone !!

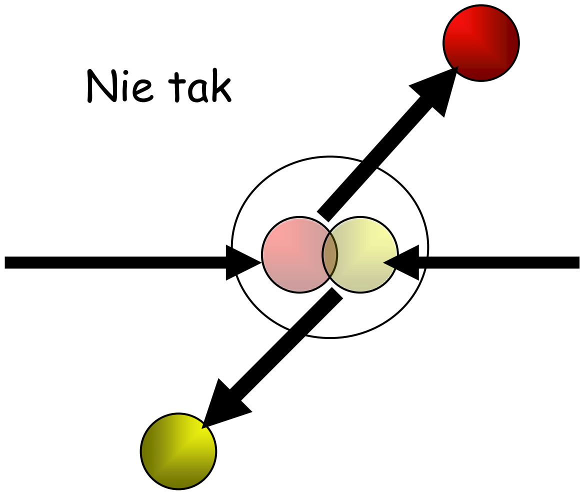
Zasada nieoznaczoności H. wiąże nie tylko położenie i pęd ale też i inne wielkości fizyczne, które w podejściu Newtona (dotąd poznana fizyka klasyczna) uważała za niezależne od siebie. Np. czas i energia,

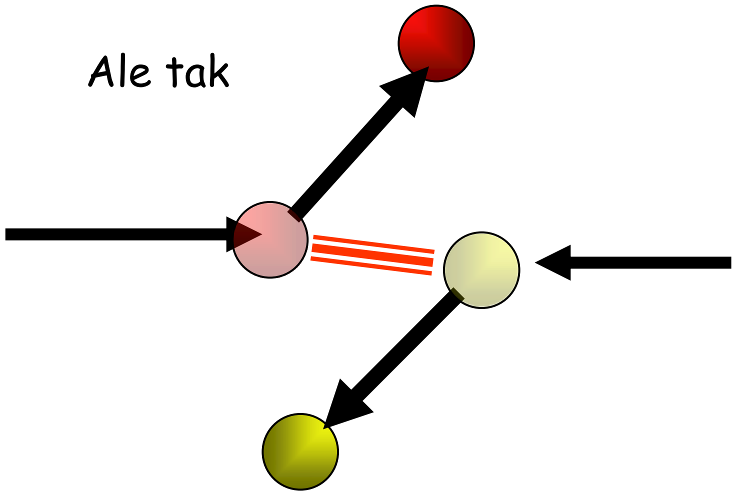
$$\boxed{\Delta E \cdot \Delta t \geq h}$$

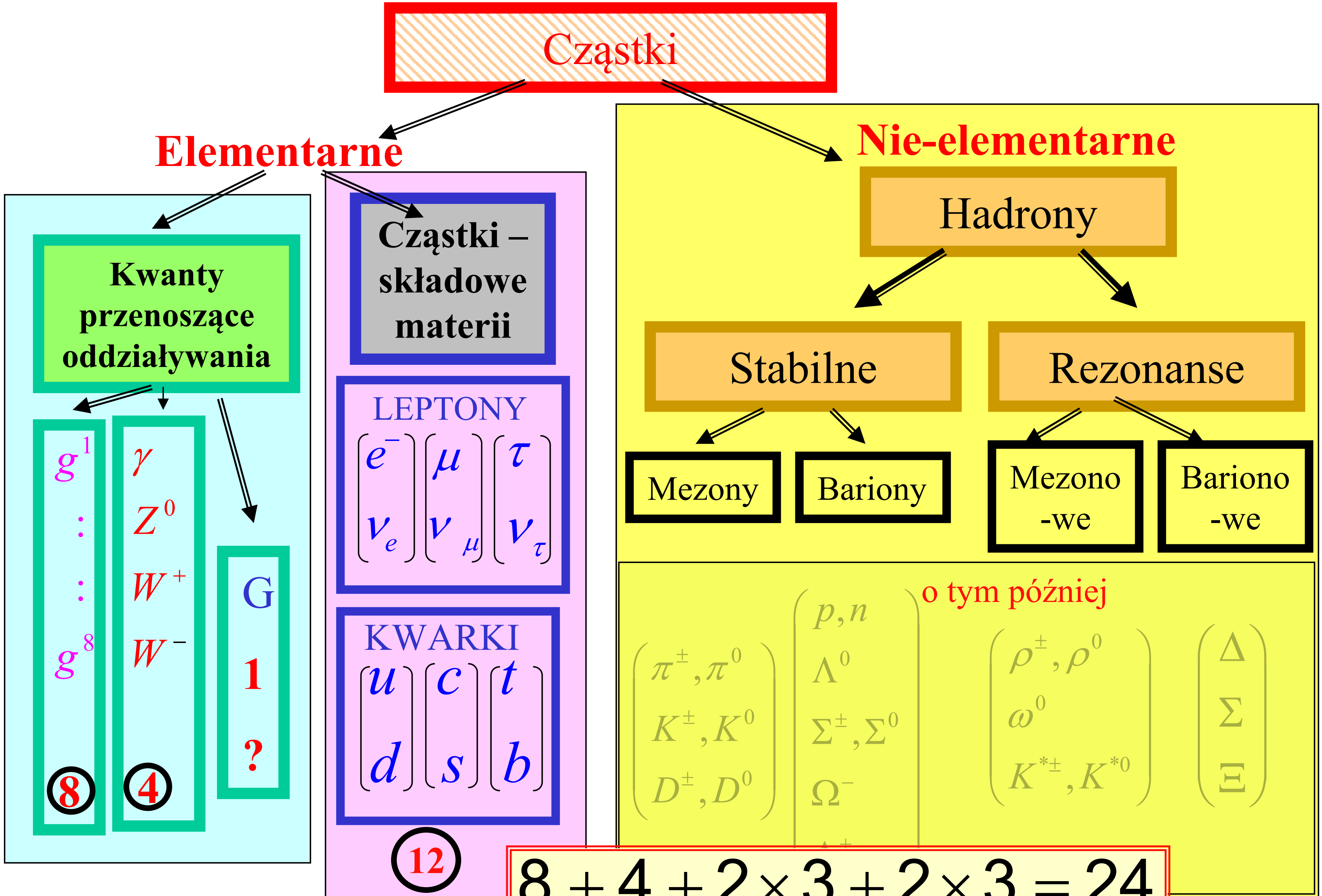
W chwili obecnej mamy około **450** różnych (cząstek) uważanych jeszcze w latach 70 – za elementarne. W ramach wiedzy, którą obecnie dysponujemy obiektów elementarnych mamy zaledwie **24**.

Przed pobieżnym przeglądem musimy podkreślić bardzo ważną rzecz a mianowicie, że oddziaływania obiektów odbywają się przez pośredników nazywanych cząstkami pośredniczącymi.









$$8 + 4 + 2 \times 3 + 2 \times 3 = 24$$

B. Muryn

Jeśli chodzi o skalę masy

$$m_p \approx 1\ GeV \quad (GeV/c^2)$$

$$m_e \approx 10^{-5}\ GeV\ (GeV/c^2)$$

$$m_{W^\pm, Z^0} \approx 100\ GeV\ (GeV/c^2)$$

$$1\ GeV = 10^9\ eV = 10^6\ keV = 10^3\ MeV$$

$$1 MeV = 1.6 \cdot 10^{-13}\ J$$

Jaka skala czasowa odpowiada przyjętej skali masy 1 GeV ? Posłużmy się zasadą nieoznaczoności Heisenberga.

$$\Delta E \cdot \Delta t \approx h$$

lub w naturalnym układzie jednostek:

$$\Delta E \cdot \Delta t \approx 1$$

$$\Delta t \approx h / \Delta E \approx h / 1GeV$$

$$\Delta t = 10^{-17}\ s$$

Zacznijmy od sił: W ramach Modelu Standardowego istnieją tylko cztery podstawowe siły

Siły	Lata 60/70	Obecnie	
Grawitacja	Tylko klasyczna	Bez zmian	
Elektr.	QED **kwant. elektrodynamika**	Teoria elektro-słabych	SM
Słabe	Brak		
Silne	Brak	QCD **kwantowa chromodyn.**	

Podstawowe parametry oddziaływań

	Typ	Obiekty wymieniane	**Inten-sywność**	Promień [R]=m	**Czas charakterystyczny [s]**
1	Silne	**Gluony** $g_1, \ldots, g_8$	0.1-1.	10^{-15}	10^{-23}
2	Elektro-magn.	**Foton** γ	1/137	∞	10^{-20}
3	Słabe	**Bozony** W^+, W^-, Z^0	10^{-7}	10^{-18}	10^{-13}
4	Grawitit.	**Grawiton** G	10^{-38}	∞	?

Problem intensywności oddz. (fachowo stałej sprzężenia).

B. Muryn

Rozważmy oddz. EM (patrz poprzednia redefinicja ładunku)

$$F = k \cdot \frac{Q^2}{R^2} \qquad \left[k \cdot Q^2\right] = \left[F \cdot R^2\right] = kg\frac{m^3}{s^2}$$

$$\left[\hbar c\right] = J \cdot s \cdot \frac{m}{s} = kg \cdot \frac{m^3}{s^2}$$

Czyli stosunek

$$\frac{k \cdot Q^2}{\hbar c} \Rightarrow bezwymiarowy \qquad \longrightarrow \qquad \alpha_{EM} = \frac{k \cdot e^2}{\hbar c} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot \hbar c} = \frac{1}{137.05}$$

Tak wybraliśmy stałą sprzężenia EM aby była bezwymiarowa (niezależność od skali!). Podobnie są zdefiniowane pozostałe stałe dla oddz. silnych i słabych !

Zróbmy podobnie dla oddz. grawitacyjnego pomiędzy dwoma protonami o masach m_p,

$$\alpha_{graw} = \frac{Gm_p^2}{\hbar c} \approx 10^{-38}$$

Zadajmy sobie pytanie jakie warunki muszą być spełnione aby można było oddz. grawitacyjne porównać chociaż z siłą EM? Weźmy dwa protony. Oddziaływania mogą odgrywać rolę gdy odległość między protonami będzie tak mała, że energia potencjalna będzie porównywalna z energią spoczynkową układu protonów.

wtedy $\frac{G \cdot m_p^2}{l} \approx m_p c^2$ stąd $l = \frac{G \cdot m_p}{c^2} \approx 10^{-54}\ m$

Rozmiar protonu wynosi 10^{-13} m ! Czyli proton jest "większy" o 41 rzędów wielkości. Można oczywiście wyobrazić sobie tak wysokie masy, że oddziaływanie będzie porównywalne ze znanymi przy większych odległościach, odpowiadających tzw. długości naturalnej zdefiniowanej przez zasadę nieoznaczoności.

$$\frac{GM^2}{l} = Mc^2 \qquad \underbrace{Mc}_{\Delta p} \cdot \underbrace{l}_{\Delta x} = \hbar \qquad l = \frac{\hbar}{Mc}$$

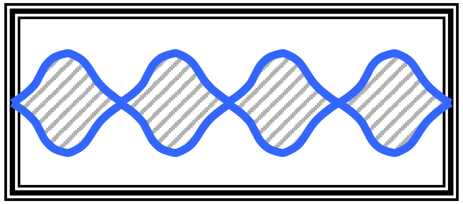
Po podstawieniu

$$\frac{GM^2}{\hbar/Mc} = Mc^2$$ stąd $$M = 10^{19}\ GeV$$

Masa powyższa nazywa się masą Plancka i wyznacza skalę przy, której być może zaczynają się kwantowe efekty grawitacyjne.

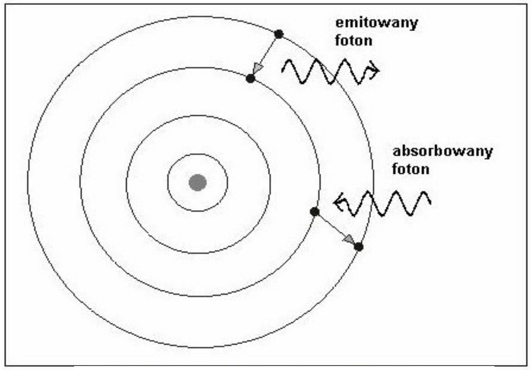
B. Muryn

Kwantowe rozwiązanie dla cząstki uwięzionej w studni potencjału reprezentuje przy większości warunków początkowych fale stojącą – stąd po prostu kwantowanie.



$$n\lambda = a \quad n\frac{h}{p} = a \quad p_n = n\frac{h}{a}$$

Bohr proponuje swój model atomu H

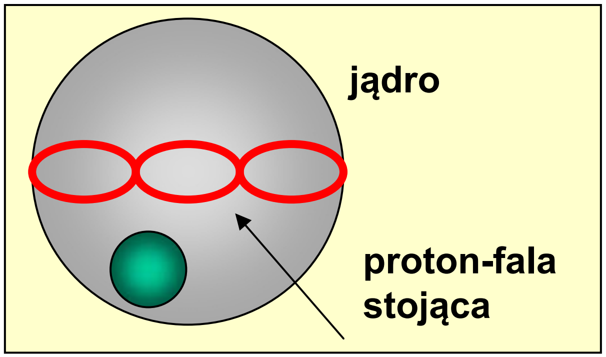


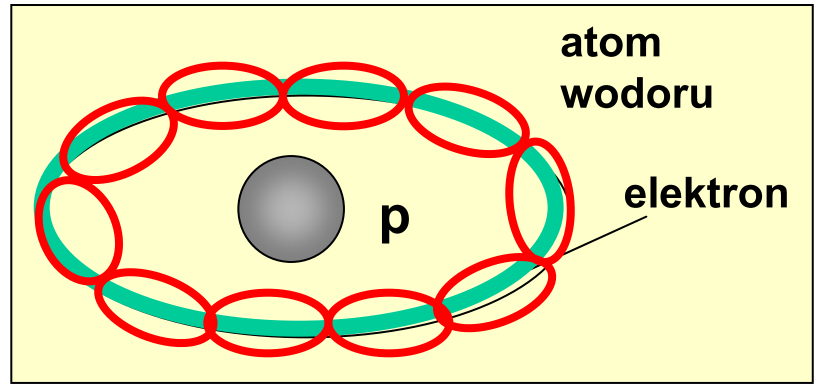
1. Elektrony poruszają się po orbitach kołowych lub eliptycznych.
2. Zmiana orbity (zmiana energii) związana jest z emisją lub absorpcją fotonu.
3. Moment pędu jest skwantowany (wtedy intuicja!)

$$\underbrace{E = T + U = \frac{mv^2}{2} - \frac{e^2}{R} \quad (*) \qquad \frac{e^2}{R^2} = \frac{mv^2}{R} \quad (**) \qquad L = R \cdot p = n\hbar \quad (***)}_{\text{Założenia}}$$

przyciąganie

A jak interpretować cząstkę, która jest "uwięziona" – np. proton w jądrze lub elektron na orbicie w atomie ? – JEST TO FALA STOJĄCA





"obrazek" ten jest niczym innym niż warunkiem na zaproponowane przez Bohra kwantowanie momentu pędu (Bohr traktował to jako założenie) bo:

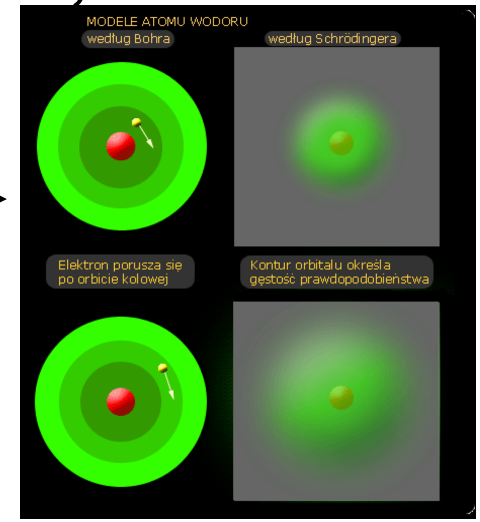
$$2\pi R = n \cdot \lambda \qquad \lambda = \frac{h}{p} \qquad 2\pi R = n \cdot \frac{h}{p} \qquad p \cdot R = L = \frac{nh}{2\pi} = n\hbar$$

jest to znane założenie Bohra i poprzednio zacytowane

A jak w świetle tego co wiemy obecnie podchodzimy do rozwiązywania problemów związanych ze strukturą atomową (a w szczególności atomu wodoru) ?

Piszemy tzw.- równanie Schrödingera

orbity Bohra



Schrödingera

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\Delta\,\psi^2(x,t) - \frac{Ze^2}{r}\psi(x,t)$$

Rozwiązanie tego równania wyznaczone jest przez trzy liczby kwantowe:

$$n, l, m_l \qquad \psi_{n,l,m_l}$$

$$n = 1,2,3.....$$

energia

$$E_n = -\frac{2\pi^2 m e^4}{h^2}\cdot\frac{1}{n^2}$$

dokładnie taka sama jak z modelu Bohra

dla danego n,

$$l = 0,1,2,...(n-1)$$

l-numeruje stany o momencie pędu (numeruje możliwe orbity)

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$$

Liczba **m** określa rzut l na jakiś wyróżniony kierunek (np. na kierunek pola magnetycznego B)

$$m = -l, (-l+1), (-l+2)..-1, 0, +1, 2, ..(l-1), l$$

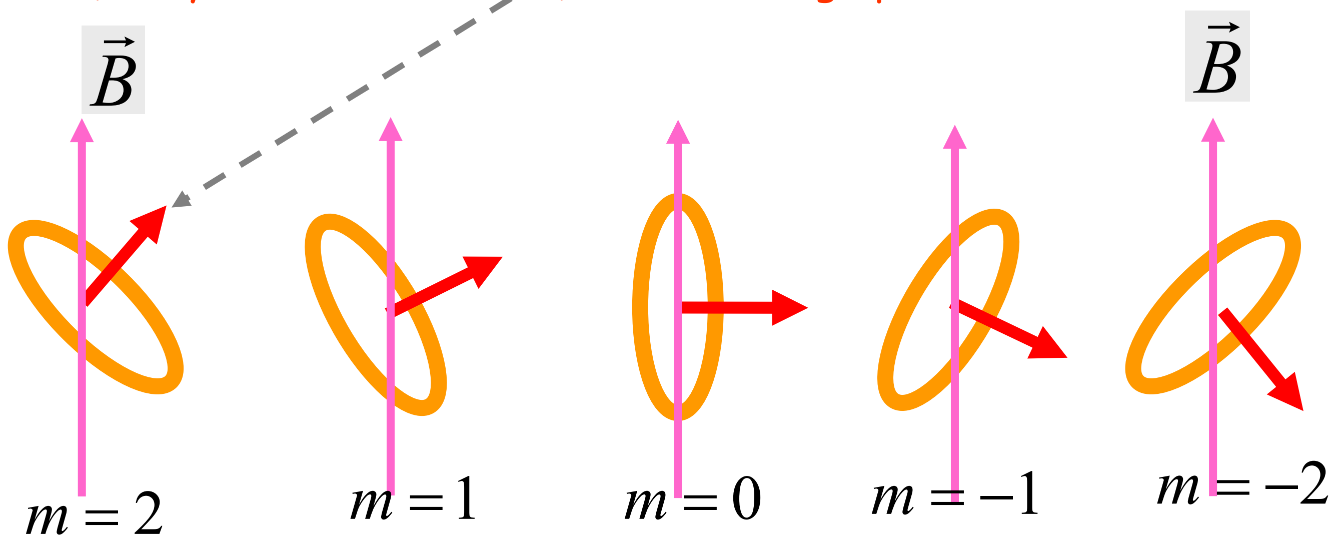
ilość stanów m przy danej liczbie l $(2l+1)$

Elektron krążąc po orbicie posiada moment pędu (jak kulka o masie m poruszająca się po okręgu) – ale ten moment pędu jest skwantowany.

Liczba l- numeruje wyznacza poszczególne momenty pędu L ale wartość jego wynosi

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar = L = \sqrt{l(l+1)}$$

Liczba m, która przyjmuje (2l+1) wartości wyznacza rzut L na oś (rzuty też skwantowane) zewnętrznego pola



W polu B energetyczna wielkość tego rozczepienia w wynosi:

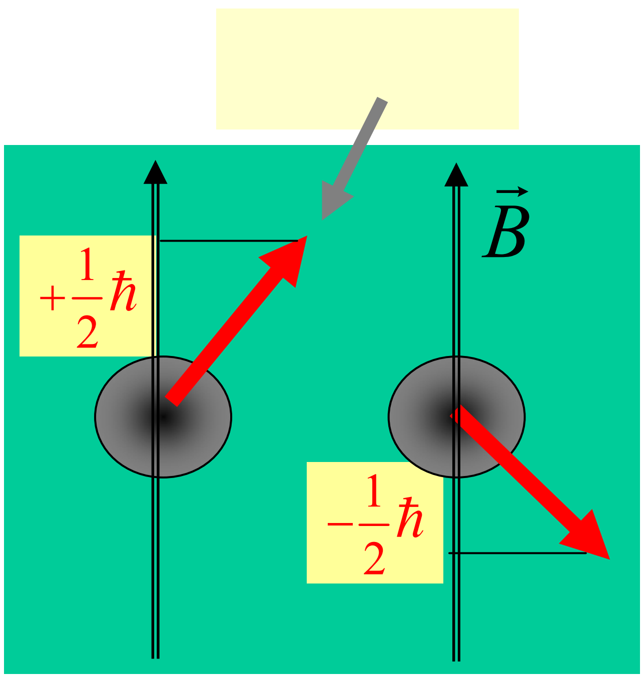
$$\Delta E = \frac{e\hbar}{2mc} m_l \cdot B$$

B. Muryn

Spin

Jest to wewnętrzny kwantowy stopień swobody elektronu **(równanie Diraca)** –

Spin geometrycznie można traktować jako wektor –można pokazać, że jego długość wynosi $\sqrt{s(s+1)}\cdot\hbar$ podobnie jak dla orbitalnego momentu pędu.



Rzut spinu na dowolny kierunek jest skwantowany i wynosi

$$+\frac{1}{2}\hbar \qquad -\frac{1}{2}\hbar$$

Istnienie spinu (momentu pędu elektronu pociąga za sobą istnienie momentu magnetycznego (analogiczna wielkość do momentu magn. dla ładunku)

$$\mu_e = \frac{e\hbar}{2m_e c}$$

ważne

Dziś nikt nie mówi o modelu Bohra jako aktualnym modelu. Ale do oceny "skali" jest wciąż bardzo wygodny: Pamiętamy, że $ke^2 \to e^2$

Z równań poprzednich po prostych rachunkach (są trzy równania i trzy niewiadome E, r, v)

$$E = T + U = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} - \frac{e^2}{r} = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} - \frac{e^2}{r} \quad (*)$$

$$\frac{e^2}{r^2} = \frac{m\mathrm{v}^2}{r} \quad (**)$$

$$L = r \cdot p = n\hbar = rm\mathrm{v} = n\hbar \quad (***)$$

$$\boxed{r_n = \frac{\hbar^2 n^2}{m \cdot e^2}, \quad \mathrm{v}_n = \frac{e^2}{\hbar}\frac{1}{n}, \quad E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2}}$$

(***) podnosimy do kwadratu i wyliczamy $m\mathrm{v}^2$ a następnie wstawiamy do (**) otrzymując r

n-klasyczny numer orbity,

Stąd podstawiając n=1, możemy dostać z dobrym przybliżeniem wartości powyższych wielkości (wskaźnik A oznacza skale atomowe).

$$r_A = \frac{\hbar^2}{m \cdot e^2} \cong 0.5 \cdot 10^{-10} m \qquad \mathrm{v}_A = \frac{e^2}{\hbar} \cong 10^6 \ m/s \qquad \tau_A = \frac{R_A}{\mathrm{v}_1} \cong 10^{-17} s$$

$$E_A = \frac{me^4}{2\hbar^2} \cong 14 \ eV \qquad \rho_A = \frac{m_p}{r_1^3} \sim 10^3 \ kg/m^3$$

Jak to wygląda na poziomie jądra atomowego ? Można skorzystać z poprzednich wzorów pod warunkiem, że podstawimy zamiast e wielkość f odpowiadająca silnym oddziaływaniom (wiadomo, że "intensywność" silnych jest około 10 razy większa niż EM, więc

$$f^2 \approx 100 \cdot e^2$$

Silne oddział. to inaczej oddziaływania jądrowe (a więc oddział. między nukleonami) – zamiast masy elektronu podstawiamy masę protonu $m_p = 2000 \cdot m_e$

$$r_N = \frac{\hbar^2}{m_p f^2} \cong 10^{-15} m \qquad v_N = \frac{f^2}{\hbar} \cong 10^7 \ m/s \qquad \tau_N = \frac{R_A}{v_1} \cong 10^{-22} s$$

$$E_N = \frac{mf^2}{2\hbar^2} \cong 1 \ MeV \qquad \rho_N = \frac{m_p}{r_1^3} \sim 10^{18} \ kg/m^3$$

Zobaczmy porównanie bezwzględne skal:

$$\frac{r_N}{r_A} \sim 10^{-5} \qquad \frac{v_N}{v_A} \sim 10 \qquad \frac{\tau_N}{\tau_A} \sim 10^{-5}$$

Atom wydaje się być pusty

$$\frac{E_N}{E_A} \sim 10^{5} \qquad \frac{\rho_N}{\rho_A} \sim 10^{15}$$

Są to ogromne, jakościowe wręcz, różnice.